Prof. Dr. Volker Bach
M.Sc. Merten Mlinarzik

7. Übungsblatt

Ausgabe: 04.12.2025

Abgabe: 11.12.2025, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Linear Algebra für Elektrotechnik WiSe 25/26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 7.1 (3+2 Punkte)

Es sei $M \in \mathbb{K}^{N\times N}$ mit Spalten $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_N \in \mathbb{K}^N$ und Reihen $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N \in \mathbb{K}^N$, d.h

$$M = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 & \cdots & \vec{c}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_N \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $1 \le i \ne j \le N$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha \det[M] &= \det\left[\begin{pmatrix} \vec{c}_1 & \cdots & \vec{c}_{i-1} & \alpha\vec{c}_i + \beta\vec{c}_j & \vec{c}_{i+1} & \cdots & \vec{c}_N \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\left[\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_{i-1} \\ \alpha\vec{r}_i + \beta\vec{r}_j \\ \vec{r}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{r}_N \end{pmatrix}\right]. \end{aligned}$$

(b) Für alle $1 \le i \ne j \le N$ bezeichne $M_{i\leftrightarrow j}$ die Matrix, welche aus M durch den Tausch der i. und j. Spalte bzw. Zeile hervorgeht. In beiden Fällen gilt

$$-\det[M] = \det[M_{i\leftrightarrow j}].$$

Aufgabe 7.2 (3+2 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$M_1 \;\coloneqq\; \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad M_2 \;\coloneqq\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

sowie

$$M_3 \;\coloneqq\; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad M_4 \;\coloneqq\; \begin{pmatrix} 1 & i & -2 \\ (1+i) & 3 & -3 \\ 5 & (2-4i) & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$M_5 \;\coloneqq\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 12 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7.3 (5 Punkte)

Zu einen N-Tupel $(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ wird die Matrix $V_{z_1,\dots z_N} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ durch

$$V_{z_1,\dots z_N} \;\coloneqq\; \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{N-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{N-1} \\ 1 & z_3 & z_3^2 & \cdots & z_3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_N & z_N^2 & \cdots & z_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

definiert. Zeigen Sie, dass die Determinante $\det[V_{z_1,\dots z_N}]$ durch

$$\det[V_{z_1,\dots z_N}] \;=\; \prod_{1\le i<j\le N} (z_i - z_j)$$

gegeben ist.

Aufgabe 7.4 (5 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A \;\coloneqq\; \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix A_{minor} der Minoren, überprüfen Sie A auf Invertibilität, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 7.5 (4 Bonuspunkte) Flächenberechnung eines Parallelogramms

Gegeben seien die drei Punkte

$$a_1 = (x_1, y_1), \qquad a_2 = (x_2, y_2), \qquad a_3 = (x_3, y_3),$$

die drei Eckpunkte eines Parallelogramms P in $\mathbb{R}^2$ bilden. Beispielhaft ist dies in Abbildung 1 dargestellt.

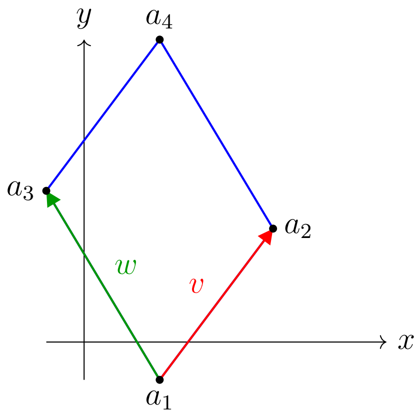

Abbildung 1: Beispielhaftes Parallelogramm

(a) Berechnen Sie die nachfolgende Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die nachfolgende Determinante:

$$\det(v|w) = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

Hilfestellung:

$$v = a_2 - a_1 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1), \qquad w = a_3 - a_1 = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1).$$

(c) Zeigen Sie, dass die Determinanten aus a) und b) gleich sind.

(d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt A_P des Parallelogramms P für die Punkte

$$a_1 = (-3, 2), \qquad a_2 = (1, 4), \qquad a_3 = (-2, -7).$$