



6. Übungsblatt

Ausgabe: 27.11.2025

Abgabe: 04.12.2025, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung
"Linear Algebra für Elektrotechnik WiSe 25/26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 6.1 (1+3+1 Punkte)

Durch die Mengen

$$\mathcal{X} := \left\{ \vec{x}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4,$$

$$\mathcal{Y} := \left\{ \vec{y}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

seien jeweils Basen von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Abbildung $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ sei durch

$$\Phi(\vec{x}_1) := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \Phi(\vec{x}_2) := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \Phi(\vec{x}_3) := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \Phi(\vec{x}_4) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert. Weiterhin sei durch die Mengen

$$\mathcal{Z} := \left\{ \vec{z}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{z}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{z}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{z}_4 := \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4,$$

$$\mathcal{W} := \left\{ \vec{w}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

jeweils eine weitere Basis von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_Y\mathcal{M}_X[\Phi]$.

(b) Es seien $\Xi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ und $\Theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ die Basistransformation, welche durch

$$\Xi(\vec{x}_i) := \vec{z}_i, \quad \Theta(\vec{y}_j) := \vec{w}_j$$

definiert sind. Geben Sie die Basiswechselmatrizen $\mathcal{M}_X[\Xi]$ und $\mathcal{M}_Y[\Theta]$ an. Geben Sie weiterhin $\mathcal{M}_Y[\Theta^{-1}]$ an und verifizieren Sie

$$\mathcal{M}_Y[\Theta^{-1}] \cdot \mathcal{M}_Y[\Theta] = \mathcal{M}_Y[\Theta] \cdot \mathcal{M}_Y[\Theta^{-1}] = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3}.$$

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_W\mathcal{M}_Z[\Phi]$.

Aufgabe 6.2 (2+3 Punkte)

Durch die Mengen

$$\mathcal{U} := \left\{ \vec{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ -4 \\ -21 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4,$$

$$\mathcal{V} := \left\{ \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

seien zwei Basen von $\mathbb{R}^4$ gegeben. Die Abbildung $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ habe die Matrixdarstellung

$${}_V\mathcal{M}_U[\Psi] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\text{Ran}[\Psi]$, indem Sie eine Basis von $\text{Ran}[\Psi]$ angeben.

(b) Bestimmen Sie $\text{Ker}[\Psi]$, indem Sie eine Basis von $\text{Ker}[\Psi]$ angeben.

Aufgabe 6.3 (5 Punkte)

Es seien $N \in \mathbb{N}$ und Π_N die Menge der komplexen Polynome vom Grad kleiner gleich N . Weiter sei $D \in \mathcal{L}(\Pi_N, \Pi_{N-1})$ die formale Ableitung (vgl. Aufgabe 5.3).

Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{B}_{N-1}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}_N}[D]$ an, wobei die Basen $\mathcal{B}_N$ durch

$$\mathcal{B}_N := \{1, x, x^2, \dots, x^N\}$$

gegeben sind.

Aufgabe 6.4 (1+1+3 Punkte)

Es sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit $N := \dim(X) < \infty$ und $P \in \mathcal{L}(X)$ eine Projektion, d.h. es gilt $P \circ P = P$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\text{Ran}[P] = \{\vec{x} \in X \mid P(\vec{x}) = \vec{x}\}$.
- (b) Zeigen Sie, dass $\text{Ran}[P] \cap \text{Ker}[P] = \{\vec{0}\}$.
- (c) Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{V} \subseteq X$ existiert, für welche die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{M}_{\mathcal{V}}[P]$ die diagonale Form

$${}_{\mathcal{V}}\mathcal{M}_{\mathcal{V}}[P] = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_N \end{pmatrix}, \quad \delta_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq \dim(\text{Ran}[P]) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

annimmt.

Aufgabe 6.5 (4 Bonuspunkte) Gleichstromnetzwerk

In der Abbildung 1 ist ein Gleichstromnetzwerk gezeigt. Dieses wird von 2 Stromquellen gespeist, hat 3 Verbindungsknoten und 2 Leitwerte. Bitte verwenden Sie für die Berechnung die Größen in den Einheiten Siemens, Volt und Ampere. Rechnen Sie nur mit den Zahlenwerten.

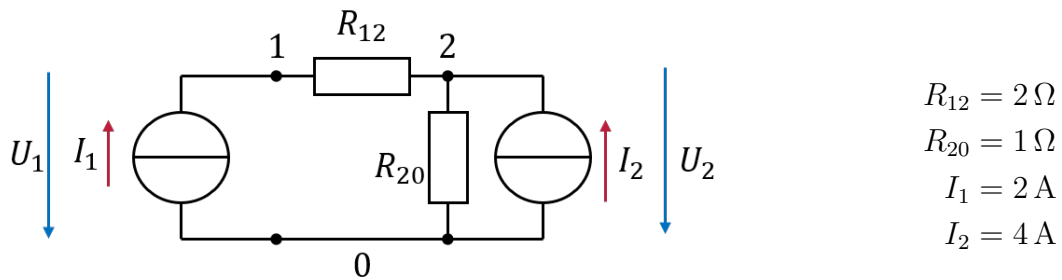


Abbildung 1: Gleichstromnetzwerk

- (a) Geben Sie bitte das Gleichungssystem mit der Leitwertmatrix G , dem Spannungsvektor $\vec{U}$ und dem Stromvektor $\vec{I}$ an!
- (b) Ermitteln Sie bitte die LR-Zerlegung für die Leitwertmatrix und berechnen Sie beide Matrizen.
- (c) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{y}$ der Zwischenlösung und geben Sie bitte den Vektor mit den Zahlenwerten an!
- (d) Berechnen Sie den Lösungsvektor für die Knotenspannungen 1 und 2 zum Bezugsknoten 0 und geben Sie diese bitte in Volt an!