Technische Universität Braunschweig

5. Übungsblatt

Ausgabe: 20.11.2025

Abgabe: 27.11.2025, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Linear Algebra für Elektrotechnik WiSe 25/26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 5.1 (3+1+1 Punkte)

(a) Es seien U und W Unterräume von $\mathbb{R}^5$, gegeben durch

$$U := \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\4\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\3\\4\end{pmatrix}\right\}\right),$$

$$W := \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\0\\5\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\\4\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von U und W und geben Sie $\dim(U)$ und $\dim(W)$ an.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $U + W$.

(c) Bestimmen Sie $\dim(U \cap W)$.

Aufgabe 5.2 (1+2+2 Punkte)

(a) Es sei $N \in \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Abbildung

$$\kappa : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N, \ \vec{z} = \begin{pmatrix}z_1\\ \vdots \\ z_N\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\overline{z_1}\\ \vdots \\ \overline{z_N}\end{pmatrix}$$

linear ist.

(b) Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $\vec{0} \neq \vec{w} \in \mathbb{C}^N$. Nach Aufgabe 4.2 ist

$$S := \left\{ \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N \,\middle|\, \overline{w_1} z_1 + \overline{w_2} z_2 + \cdots \overline{w_N} z_N = 0 \right\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{C}^N$. Zeigen Sie, dass $\dim(S) = N - 1$, indem Sie zeigen, dass

$$\tau : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}\,,\ \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \mapsto \overline{w_1} z_1 + \overline{w_2} z_2 + \cdots \overline{w_N} z_N$$

eine surjektive lineare Abbildung ist.

(c) Es seien X, Y zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ gilt.

Aufgabe 5.3 (1+2+2 Punkte)

Es seien $N \in \mathbb{N}$ und Π_N die Menge der komplexen Polynome vom Grad kleiner gleich N (vgl. Aufgabe 4.3). Wir definieren zusätzlich $\Pi_0 := \{0\}$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension von Π_N.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von

$$\operatorname{span}\Big(\Big\{ z^2 + z,\ \sqrt{2},\ 2z^3 + z^2 - (4 + i)z,\ z^2 - 2i,\ 3z + 6i,\ \Big\}\Big) \subseteq \Pi_3\,.$$

(c) Wir definieren die *formale Ableitung eines Polynoms* durch die Abbildung

$$D : \Pi_N \to \Pi_{N-1}\,,\ \sum_{k=0}^{N} \alpha_k z^k \mapsto \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1}(k + 1) z^k\,.$$

Zeigen Sie, dass D eine lineare Abbildung ist. Bestimmen Sie weiterhin $\dim(\mathrm{Ker}[D])$ und $\dim(\mathrm{Ran}[D])$.

Aufgabe 5.4 (1+2+2 Punkte)

Es bezeichne $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Menge der $\mathbb{K}$-wertigen Folgen, definiert durch

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \ldots) \,|\, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}\}\,.$$

(a) Begründen Sie in wenigen Worten, dass $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ mit der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation einen $\mathbb{K}$-Vektorraum definiert.

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei den Abbildungen

$$L : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\,,\ (a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_1, a_2, \ldots)\,,$$

$$R : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\,,\ (a_1, a_2, \ldots) \mapsto (a_2, a_3, \ldots)$$

jeweils um lineare Abbildungen handelt. Geben Sie außerdem die Abbildungen $L \circ R$, $R \circ L \in \mathcal{L}\big(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\big)$ an.

(c) Untersuchen Sie die Abbildung L und R aus Aufgabenteil (b) jeweils auf Injektivität und Surjektivität.