Prof. Dr. Volker Bach

M.Sc. Merten Mlinarzik

1. Übungsblatt

Ausgabe: 23.10.2025

Abgabe: 30.10.2025, 13:15 Uhr (in den Briefkästen vor PK 4.3).

Aufgabe 1.1 (2+3 Punkte)

Im Folgenden sei $M \subset \mathbb{N}$ eine nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen.

(a) Formulieren Sie den Inhalt der folgenden Aussagen in gewöhnlicher Sprache:

$$\begin{aligned} (i) &\quad \exists n \in \mathbb{N} : (n < 10) \wedge (n > 5)\,. \\ (ii) &\quad \forall n \in M : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\,. \end{aligned}$$

(b) Formulieren Sie den Inhalt der folgenden Aussagen mittels mathematischer Notation und Quantoren:

(i) *Alle Elemente der Menge M sind gerade Zahlen.*
(ii) *Die Menge M enthält die Quadrate aller ihrer Elemente.*
(iii) *Es gibt kein Element in M, welches größer als Zehn ist.*

Aufgabe 1.2 (4+1 Punkte)

Es seien $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{0, 2\}$ und $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 2\}$ Mengen.

(a) Geben Sie die Mengen $A \cup B$, $C \cap B$, $A \setminus C$, $A \times B$ und $\mathfrak{P}(A)$ an.

(b) Bestimmen Sie $|\mathfrak{P}(A)|$.

Aufgabe 1.3 (1+1+1+2 Punkte)

Im Folgenden seien A, B und C nichtleere *endliche* Mengen.

(a) Begründen Sie: Wenn eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ existiert, so ist $|A| = |B|$.

(b) Begründen Sie $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

(c) Für eine natürlich Zahl n schreiben wir

$$A^n := \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-\text{mal}}$$

für das n-fache kartesische Produkt von A mit sich selbst. Zeigen Sie, dass $|A^n| = |A|^n$ indem Sie Aufgabeteil (b) wiederholt auf Ausdrücke der Form $A^n = A \times A^{n-1}$ anwenden.

(d) Zeigen Sie, dass $|\mathfrak{P}(C)| = 2^{|C|}$ indem sie eine Bijektion zwischen $\mathfrak{P}(C)$ und $\{0,1\}^{|C|}$ angeben und Aufgabenteile (a) und (c) ausnutzen.

Aufgabe 1.4 (2+3 Punkte)

Es seien M, N nichtleere Mengen und $A, B \subseteq M$ Teilmengen von M sowie $C, D \subset N$ Teilmengen von N. Ferner sei $f : M \mapsto N$ eine Abbildung.

(a) Im folgenden (falschen) Beweis der (falschen) Aussage $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ist genau eine Äquivalenz nicht richtig.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
& y \in f(A \cap B) \\
\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ & \exists x \in A \cap B : f(x) = y \\
\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\ & \exists x \in M : (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (f(x) = y) \\
\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\ & \exists x \in M : (x \in A \wedge f(x) = y) \wedge (x \in B \wedge f(x) = y) \\
\overset{(4)}{\Leftrightarrow}\ & (\exists x \in M : x \in A \wedge f(x) = y) \wedge (\exists x \in M : x \in B \wedge f(x) = y) \\
\overset{(5)}{\Leftrightarrow}\ & (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\exists x \in B : f(x) = y) \\
\overset{(6)}{\Leftrightarrow}\ & (y \in f(A)) \wedge (y \in f(B)) \\
\overset{(7)}{\Leftrightarrow}\ & y \in f(A) \cap f(B).
\end{aligned}
$$

□

Welche ist es, warum ist diese falsch, und was muss dort anstelle des Äquivalenzpfeils stehen? Wie verändert sich dadurch die Aussage des dann richtigen Beweises?

(b) Beweisen Sie $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.