

VI. Matrizen

VI.1. Definitionen

Definition VI.1. Seien $M, N \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K}$ der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

$$(i) \quad \mathbb{K}^{N \times M} := \left\{ (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,M}} \mid a_{i,j} \in \mathbb{K} \right\} \quad (VI.1)$$

definiert die Menge der $N \times M$ -**Matrizen über $\mathbb{K}$** . Dabei ist $(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,M}}$ eine abkürzende Schreibweise für eine Tabelle von Zahlen,

$$(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,M}} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix}. \quad (VI.2)$$

- (ii) Seien X und Y zwei $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit $\dim(X) = M$, $\dim(Y) = N$ und $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_M\} \subseteq X$, $\mathcal{Y} := \{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N\} \subseteq Y$ Basen in X bzw. in Y . Ist nun $\Phi \in \mathcal{L}(X; Y)$ mit

$$\Phi(\vec{x}_j) = a_{1,j}\vec{y}_1 + a_{2,j}\vec{y}_2 + \dots + a_{N,j}\vec{y}_N, \quad (VI.3)$$

für $j \in \mathbb{Z}_1^M$, so heißt

$${}_Y\mathcal{M}_X[\Phi] := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{N \times M} \quad (VI.4)$$

Matrixdarstellung von Φ bezüglich der Basen $\mathcal{X} = \{\vec{x}_j\}_{j=1}^M \subseteq X$ und $\mathcal{Y} = \{\vec{y}_i\}_{i=1}^N \subseteq Y$.

- (iii) Für $\Phi \in \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X; X)$ schreiben wir $\mathcal{M}_X[\Phi] := {}_X\mathcal{M}_X[\Phi]$.
 (iv) Sind $X = \mathbb{K}^M$ und $Y = \mathbb{K}^N$ mit Standardbasen $\mathcal{E}_M = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_M\} \subseteq X$ und $\mathcal{E}_N = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\} \subseteq Y$, so bezeichnet

$$\mathcal{M}[\Phi] := {}_{\mathcal{E}_N}\mathcal{M}_{\mathcal{E}_M}[\Phi] \quad (VI.5)$$

die **Matrixdarstellung von $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ bezüglich der Standardbasen**.

Bemerkungen und Beispiele.

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $M = 3$, $N = 2$, $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, $\mathcal{Y} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$, $\Phi \in \mathcal{L}(X; Y)$ mit

$$\Phi(\vec{x}_1) := 2\vec{y}_1, \quad \Phi(\vec{x}_2) := \vec{y}_1 - \vec{y}_2, \quad \Phi(\vec{x}_3) := -2\vec{y}_2, \quad (\text{VI.6})$$

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{Y}}\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.7})$$

- Seien $X = \mathbb{K}^M$, $Y = \mathbb{K}^N$ mit Standardbasen $\mathcal{E}_M = \{\vec{e}_1^{(X)}, \dots, \vec{e}_M^{(X)}\} \subseteq \mathbb{K}^M$ und $\mathcal{E}_N = \{\vec{e}_1^{(Y)}, \dots, \vec{e}_N^{(Y)}\} \subseteq \mathbb{K}^N$ und $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ mit

$$\Phi(\vec{e}_i^{(X)}) := a_{1,i}\vec{e}_1^{(Y)} + \dots + a_{N,i}\vec{e}_N^{(Y)} = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{N,i} \end{pmatrix}, \quad (\text{VI.8})$$

für $i = 1, \dots, M$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\Phi] &\equiv {}_{\mathcal{E}_N}\mathcal{M}_{\mathcal{E}_M}[\Phi] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & & a_{N,M} \end{pmatrix} \\ &= \left(\Phi(\vec{e}_1^{(X)}), \Phi(\vec{e}_2^{(X)}), \dots, \Phi(\vec{e}_M^{(X)}) \right), \end{aligned} \quad (\text{VI.9})$$

d.h. die Matrixdarstellung von Φ bzgl. der Standardbasis erhält man durch Aneinanderreihung der Bilder $\Phi(\vec{e}_1^{(X)}), \dots, \Phi(\vec{e}_M^{(X)})$ (als Spaltenvektoren) der Basisvektoren $\vec{e}_1^{(X)}, \dots, \vec{e}_M^{(X)}$.

Lemma VI.2. Seien $M, N \in \mathbb{N}$ und X, Y zwei $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Dimensionen $M = \dim(X)$, $N = \dim(Y)$ und Basen $\mathcal{X} \subseteq X$ und $\mathcal{Y} \subseteq Y$.

(i) $\mathbb{K}^{N \times M}$ ist ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension $\dim[\mathbb{K}^{N \times M}] = M \cdot N$ bezüglich

$$\begin{aligned} \gamma \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N,1} & \dots & b_{N,M} \end{pmatrix} &:= \\ \begin{pmatrix} (\gamma a_{1,1} + b_{1,1}) & \dots & (\gamma a_{1,M} + b_{1,M}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\gamma a_{N,1} + b_{N,1}) & \dots & (\gamma a_{N,M} + b_{N,M}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{VI.10})$$

(ii) ${}_{\mathcal{Y}}\mathcal{M}_{\mathcal{X}} : \mathcal{L}(X; Y) \rightarrow \mathbb{K}^{N \times M}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. (i) ist trivial.

(ii): Seien $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_M\}$ und $\mathcal{Y} = \{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N\}$. Zu festen $m \in \mathbb{Z}_1^M$ und $n \in \mathbb{Z}_1^N$ definieren wir $\Theta_{n,m} \in \mathcal{L}(X; Y)$ durch

$$\Theta_{n,m}(\vec{x}_j) := \delta_{j,m} \vec{y}_n. \quad (\text{VI.11})$$

Ist nun eine lineare Abbildung $\Phi \in \mathcal{L}(X; Y)$ durch die Bilder $\Phi(\vec{x}_j) = a_{1,j}\vec{y}_1 + \dots + a_{N,j}\vec{y}_N$ der Basisvektoren in $\mathcal{X}$ gegeben, so ist

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{n,m} \Theta_{n,m}(\vec{x}_j) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{n,m} \delta_{j,m} \vec{y}_n = \sum_{n=1}^N a_{n,j} \vec{y}_n = \Phi(\vec{x}_j), \quad (\text{VI.12})$$

für alle $j \in \mathbb{Z}_1^M$. Also ist

$$\Phi = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{n,m} \Theta_{n,m}, \quad (\text{VI.13})$$

d.h. jede lineare Abbildung in $\mathcal{L}(X; Y)$ kann als Linearkombination der $\Theta_{n,m}$ dargestellt werden, $\mathcal{L}(X; Y) = \text{span}(\{\Theta_{n,m} \mid m \in \mathbb{Z}_1^M, n \in \mathbb{Z}_1^N\})$.

Um die lineare Unabhängigkeit der $\Theta_{n,m}$ zu zeigen, nehmen wir die an, die Nullabbildung sei als Linearkombination der $\Theta_{n,m}$ dargestellt, $\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \gamma_{n,m} \Theta_{n,m} = 0_{\mathcal{L}(X; Y)}$, d.h.

$$\forall \vec{x} \in X : \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \gamma_{n,m} \Theta_{n,m}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (\text{VI.14})$$

gilt, was äquivalent zu

$$\forall j \in \mathbb{Z}_1^M : \vec{0} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \gamma_{n,m} \Theta_{n,m}(\vec{x}_j) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \gamma_{n,m} \delta_{j,m} \vec{y}_n = \sum_{n=1}^N \gamma_{n,j} \vec{y}_n \quad (\text{VI.15})$$

ist. Weil $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N\} \subseteq Y$ eine Basis ist, folgt daraus $\gamma_{1,j} = \gamma_{2,j} = \dots = \gamma_{n,j} = 0$, für alle $j \in \mathbb{Z}_1^M$. Also verschwinden alle $\gamma_{n,m}$ und $\{\Theta_{n,m} \mid m \in \mathbb{Z}_1^M, n \in \mathbb{Z}_1^N\} \subseteq \mathcal{L}(X; Y)$ ist eine Basis.

Damit sind $\dim[\mathbb{K}^{N \times M}] = M N = \dim[\mathcal{L}(X; Y)] < \infty$, und $\mathbb{K}^{N \times M}$ und $\mathcal{L}(X; Y)$ sind gemäß Korollar V.9(ii) zueinander isomorph. Die zugehörigen Matrixdarstellungen

$$E_{n,m} := {}_Y \mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Theta_{n,m}] = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & 0 & \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow n. \text{ Zeile}$$

$\uparrow$
 $m. \text{ Spalte}$

(VI.16)

bezeichnet man als **Matrixeinheiten**. Die Menge der Matrixeinheiten $\{E_{n,m} \mid m \in \mathbb{Z}_1^M, n \in \mathbb{Z}_1^N\} \subseteq \mathbb{K}^{N \times M}$ bildet eine Basis. $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $M = 3$, $N = 2$, so ist z.B.

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \cdot 1 + 2) & (3 \cdot 2 - 1) & (3 \cdot 3 - 1) \\ (3 \cdot 1 + 3) & (3 \cdot 0 + 2) & (3 \cdot 2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.17})$$

VI.2. Matrixmultiplikation

Definition VI.3. Seien $L, M, N \in \mathbb{N}$. Das **Matrixprodukt** ist eine Verknüpfung

$$(\cdot) : \mathbb{K}^{N \times M} \times \mathbb{K}^{M \times L} \rightarrow \mathbb{K}^{N \times L}, \quad (\text{VI.18})$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,M} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,L} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{M,1} & \cdots & b_{M,L} \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,L} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{N,1} & \cdots & c_{N,L} \end{pmatrix}, \quad (\text{VI.19})$$

wobei

$$c_{n,\ell} := \sum_{m=1}^M a_{n,m} b_{m,\ell}. \quad (\text{VI.20})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Zunächst ein Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 7 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

- Zur Berechnung des Matrixproduktes ist folgendes Schema hilfreich:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,\ell} & \cdots & b_{1,L} \\ \vdots & & \downarrow & & \vdots \\ b_{M,1} & \cdots & b_{M,\ell} & \cdots & b_{M,L} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,M} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & | & \cdots & c_{1,L} \\ \vdots & & \downarrow & & \vdots \\ \text{---} & \longrightarrow & c_{n,\ell} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{N,1} & \cdots & & \cdots & c_{N,L} \end{pmatrix} \end{array}. \quad (\text{VI.22})$$

- Auch Vektoren lassen sich als Matrizen auffassen. Es sind $\mathbb{K}^{1 \times M}$, $\mathbb{K}^{M \times 1}$ und $\mathbb{K}^M$ isomorph, denn sie haben alle Dimension M . Identifiziert man $\mathbb{K}^M$ mit $\mathbb{K}^{M \times 1}$, d.h. liest man die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^M \longleftrightarrow \mathcal{M}[\vec{x}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{M \times 1} \quad (\text{VI.23})$$

als $(M \times 1)$ -Matrix, so lässt sich die Anwendung von $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ auch als Matrixmultiplikation schreiben. Ist nämlich

$$\mathcal{M}[\Phi] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix}, \quad (\text{VI.24})$$

so ist $\mathcal{M}[\Phi(\vec{x})] \in \mathbb{K}^{N \times 1}$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\Phi(\vec{x})] &= \mathcal{M}[\Phi] \cdot \mathcal{M}[\vec{x}] \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,M}x_M \\ \vdots \\ a_{N,1}x_1 + \dots + a_{N,M}x_M \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{VI.25})$$

Wegen dieser Interpretation der Anwendung von Φ auf $\vec{x}$ als Matrixmultiplikation lässt man häufig die Argumentsklammern weg und schreibt

$$\Phi \vec{x} := \Phi(\vec{x}). \quad (\text{VI.26})$$

Der folgende Satz zeigt nun, dass die Matrixmultiplikation genau der Komposition von linearen Abbildungen entspricht.

Satz VI.4. *Seien X, Y, Z drei $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Basen $\mathcal{X} := \{\vec{x}_\ell\}_{\ell=1}^L \subseteq X$, $\mathcal{Y} := \{\vec{y}_m\}_{m=1}^M \subseteq Y$, $\mathcal{Z} := \{\vec{z}_n\}_{n=1}^N \subseteq Z$, wobei $L, M, N \in \mathbb{N}$. Sind weiterhin $\Phi \in \mathcal{L}(X; Y)$ und $\Psi \in \mathcal{L}(Y; Z)$, so gilt*

$${}_Z\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Psi \circ \Phi] = {}_Z\mathcal{M}_{\mathcal{Y}}[\Psi] \cdot {}_Y\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi]. \quad (\text{VI.27})$$

Beweis. Sind

$$\forall m \in \mathbb{Z}_1^M : \quad \Psi(\vec{y}_m) = a_{1,m} \vec{z}_1 + \dots + a_{N,m} \vec{z}_N, \quad (\text{VI.28})$$

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}_1^L : \quad \Phi(\vec{x}_\ell) = b_{1,\ell} \vec{y}_1 + \dots + b_{M,\ell} \vec{y}_M, \quad (\text{VI.29})$$

so ist, für jedes $\ell \in \mathbb{Z}_1^L$,

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \Phi)(\vec{x}_\ell) &= \Psi(b_{1,\ell} \vec{y}_1 + \dots + b_{M,\ell} \vec{y}_M) \\ &= b_{1,\ell} \Psi(\vec{y}_1) + \dots + b_{M,\ell} \Psi(\vec{y}_M) \\ &= b_{1,\ell} \cdot (a_{1,1} \vec{z}_1 + \dots + a_{N,1} \vec{z}_N) + \dots + b_{M,\ell} \cdot (a_{1,M} \vec{z}_1 + \dots + a_{N,M} \vec{z}_N) \\ &= (a_{1,1} b_{1,\ell} + a_{1,2} b_{2,\ell} + \dots + a_{1,M} b_{M,\ell}) \vec{z}_1 + \\ &\quad \dots + (a_{N,1} b_{1,\ell} + a_{N,2} b_{2,\ell} + \dots + a_{N,M} b_{M,\ell}) \vec{z}_N. \end{aligned} \quad (\text{VI.30})$$

Die Behauptung ergibt sich nun sofort durch den Vergleich von (VI.30), (VI.20) und (VI.3). $\square$

VI.3. Der Matrixring $\mathbb{K}^{N \times N}$

Definition VI.5. Sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

- (i) Man bezeichnet die linearen Abbildungen $X \rightarrow X$ als **Endomorphismen** und schreibt

$$\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X; X). \quad (\text{VI.31})$$

- (ii) Die bijektiven Elemente in $\mathcal{L}(X)$ bilden die Familie der **Automorphismen**,¹

$$GL(X) := \{ \Phi \in \mathcal{L}(X) \mid \Phi \text{ ist bijektiv} \}. \quad (\text{VI.32})$$

Lemma VI.6. Sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

- (i) Die Endomorphismen $\mathcal{L}(X)$ bilden einen Ring bezüglich punktweiser Addition und Komposition als Multiplikation, d.h. für $\Phi, \Psi, \Theta \in \mathcal{L}(X)$ ist $(\Phi \circ \Psi + \Theta) \in \mathcal{L}(X)$ definiert durch

$$(\Phi \circ \Psi + \Theta)(\vec{x}) := \Phi(\Psi(\vec{x})) + \Theta(\vec{x}). \quad (\text{VI.33})$$

Die Identität $1_X \in \mathcal{L}(X)$, $1_X(\vec{x}) = \vec{x}$, operiert als Einselement.

- (ii) Die Automorphismen $GL(X) \subseteq \mathcal{L}(X)$ bilden eine Gruppe bezüglich Multiplikation (d.h. Komposition).

Beweis.

(i) erhält man durch Nachprüfen der Ringaxiome.

(ii) Mit $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(X)$ bijektiv ist auch $\Phi \circ \Psi$ bijektiv, also ist $\circ : GL(X) \times GL(X) \rightarrow GL(X)$. Die Komposition von Abbildungen ist auch assoziativ, und es gilt (G1). Die Identitätsabbildung 1_X ist offensichtlich auch ein Automorphismus, also gilt (G2). Es verbleibt die Existenz des Inversen, (G3), nachzuprüfen. Seien dazu $\Phi \in GL(X)$ und $\Phi^{-1} : X \rightarrow X$ die inverse Abbildung, d.h.

$$\forall \vec{x} \in X : (\Phi \circ \Phi^{-1})(\vec{x}) = (\Phi^{-1} \circ \Phi)(\vec{x}) = \vec{x}. \quad (\text{VI.34})$$

Sind nun $\vec{x}, \vec{y} \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, so gibt es $\vec{w}, \vec{z} \in X$ mit $\vec{x} = \Phi(\vec{w})$, $\vec{y} = \Phi(\vec{z})$. Somit ist

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\alpha \vec{x} + \vec{y}) &= \Phi^{-1}(\alpha \Phi(\vec{w}) + \Phi(\vec{z})) = \Phi^{-1}(\Phi(\alpha \vec{w} + \vec{z})) = \alpha \vec{w} + \vec{z} \\ &= \alpha \Phi^{-1}(\vec{x}) + \Phi^{-1}(\vec{y}), \end{aligned} \quad (\text{VI.35})$$

und Φ^{-1} ist linear. Offensichtlich ist Φ^{-1} auch bijektiv, also $\Phi^{-1} \in GL(X)$. $\square$

Satz VI.7. Seien $N \in \mathbb{N}$ und X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Basis $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\} \subseteq X$.

- (i) $\mathbb{K}^{N \times N}$ ist ein Ring (bezüglich komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation) mit Einselement

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{VI.36})$$

der **Einheitsmatrix**.

¹GL steht für "general linear group"

(ii) $\mathcal{M}_{\mathcal{X}} : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{K}^{N \times N}$ ist ein Ringisomorphismus, d.h. $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}$ ist bijektiv und erhält die Ringeigenschaften,

$$\forall \Phi, \Psi, \Theta \in \mathcal{L}(X) : \mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi \circ \Psi + \Theta] = \mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi] \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Psi] + \mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Theta]. \quad (\text{VI.37})$$

Beweis. (i) erhält man wieder durch Nachprüfen der Ringaxiome, und (ii) ergibt sich trivial aus Satz VI.4 und Lemma VI.6. $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- $\mathbb{K}^{N \times N}$ ist nicht kommutativ für $N \geq 2$, etwa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.38})$$

- Für $\Phi \in GL(X)$ erhält man aus (VI.37) sofort, dass

$$\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi^{-1}] = (\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi])^{-1}. \quad (\text{VI.39})$$

Die Berechnung der inversen Matrix auf der rechten Seite in (VI.39) ist allerdings nicht ganz einfach. (Siehe Satz VII.8.)

- Wir wählen $N = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$ und Basen

$$\mathcal{X} = \left\{ \vec{x}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{E} = \left\{ \vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (\text{VI.40})$$

und eine lineare Abbildung $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\Phi(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(\vec{x}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.41})$$

Dann sind $\Phi(\vec{x}_1) = 2\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2$ und $\Phi(\vec{x}_2) = 0\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2$, also ist

$$\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.42})$$

Andererseits sind

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{x}_1, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}_2 - \frac{1}{2}\vec{x}_1, \quad (\text{VI.43})$$

und daher sind

$$\Phi(\vec{e}_1) = \frac{1}{2}\Phi(\vec{x}_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_1, \quad (\text{VI.44})$$

$$\Phi(\vec{e}_2) = \Phi(\vec{x}_2) - \frac{1}{2}\Phi(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \quad (\text{VI.45})$$

also ist

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Phi] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi]. \quad (\text{VI.46})$$

VI.4. Transformation von Matrizen bei Basiswechsel

Seien X und Y zwei $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit $\dim(X) = M$, $\dim(Y) = N$ und Basen $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_M\} \subseteq X$, $\mathcal{Y} := \{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N\} \subseteq Y$. Die Matrixdarstellung $\mathcal{M}_{\mathcal{Y}, \mathcal{X}}[\Phi]$ einer linearen Abbildung $\Phi \in \mathcal{L}(X; Y)$ bezüglich dieser Basen ist basisabhängig, so wie die Koordinaten eines Vektors basisabhängig sind. Sind $\mathcal{W} := \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_M\} \subseteq X$ und $\mathcal{Z} := \{\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_N\} \subseteq Y$ auch Basen von X bzw. Y , so stellt sich die Frage, wie man ${}_Y\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi]$ in ${}_Z\mathcal{M}_{\mathcal{W}}[\Phi]$ umrechnet.

Dazu bemerken wir, dass es nach Satz V.2 eindeutige lineare Abbildungen $\Xi \in \mathcal{L}(X)$, $\Theta \in \mathcal{L}(Y)$ gibt, mit

$$\Xi(\vec{x}_1) = \vec{w}_1, \quad \Xi(\vec{x}_2) = \vec{w}_2, \quad \dots, \quad \Xi(\vec{x}_M) = \vec{w}_M, \quad (\text{VI.47})$$

$$\Theta(\vec{y}_1) = \vec{z}_1, \quad \Theta(\vec{y}_2) = \vec{z}_2, \quad \dots, \quad \Theta(\vec{y}_N) = \vec{z}_N. \quad (\text{VI.48})$$

Ξ und Θ sind beide surjektiv, also nach Satz V.6 bijektiv und somit Automorphismen, $\Xi \in GL(X)$, $\Theta \in GL(Y)$. Die inversen Abbildungen sind damit ebenfalls Automorphismen $\Xi^{-1} \in GL(X)$, $\Theta^{-1} \in GL(Y)$ und besitzen die Eigenschaften

$$\Xi^{-1}(\vec{w}_1) = \vec{x}_1, \quad \Xi^{-1}(\vec{w}_2) = \vec{x}_2, \quad \dots, \quad \Xi^{-1}(\vec{w}_M) = \vec{x}_M, \quad (\text{VI.49})$$

$$\Theta^{-1}(\vec{z}_1) = \vec{y}_1, \quad \Theta^{-1}(\vec{z}_2) = \vec{y}_2, \quad \dots, \quad \Theta^{-1}(\vec{z}_N) = \vec{y}_N. \quad (\text{VI.50})$$

Die linearen Abbildungen Ξ , Θ , Ξ^{-1} , Θ^{-1} bezeichnet man als **Basistransformationen**.

Satz VI.8. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, X und Y zwei $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Basen $\mathcal{X} := \{\vec{x}_m\}_{m=1}^M \subseteq X$, $\mathcal{Y} := \{\vec{y}_n\}_{n=1}^N \subseteq Y$, $\mathcal{W} := \{\vec{w}_m\}_{m=1}^M \subseteq X$, $\mathcal{Z} := \{\vec{z}_n\}_{n=1}^N \subseteq Y$ und zugehörigen Basistransformationen $\Xi \in \mathcal{L}(X)$, $\Theta \in \mathcal{L}(Y)$ mit $\Xi(\vec{x}_m) = \vec{w}_m$ und $\Theta(\vec{y}_n) = \vec{z}_n$. Dann gilt für jede lineare Abbildung $\Phi \in \mathcal{L}(X; Y)$, dass

$${}_Z\mathcal{M}_{\mathcal{W}}[\Phi] = {}_Y\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Theta^{-1} \circ \Phi \circ \Xi]. \quad (\text{VI.51})$$

Beweis. Seien $a_{n,m} \in \mathbb{K}$ so gegeben, dass

$$\forall m \in \mathbb{Z}_1^M : \quad \Phi(\vec{w}_m) = a_{1,m}\vec{z}_1 + \dots + a_{N,m}\vec{z}_N, \quad (\text{VI.52})$$

d.h.

$${}_Z\mathcal{M}_{\mathcal{W}}[\Phi] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,M} \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.53})$$

Dann ist, für alle $m \in \mathbb{Z}_1^M$,

$$\begin{aligned} \Phi(\Xi(\vec{x}_m)) &= \Phi(\vec{w}_m) = a_{1,m}\Theta(\vec{y}_1) + \dots + a_{N,m}\Theta(\vec{y}_N) \\ &= \Theta(a_{1,m}\vec{y}_1 + \dots + a_{N,m}\vec{y}_N). \end{aligned} \quad (\text{VI.54})$$

Durch Anwendung von Θ^{-1} erhalten wir dann

$$\forall m \in \mathbb{Z}_1^M : \quad (\Theta^{-1} \circ \Phi \circ \Xi)(\vec{x}_m) = a_{1,m}\vec{y}_1 + \dots + a_{N,m}\vec{y}_N, \quad (\text{VI.55})$$

d.h.

$${}_Y\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Theta^{-1} \circ \Phi \circ \Xi] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,M} \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.56})$$

□

Korollar VI.9. *Gelten die Voraussetzungen wie in Satz VI.8, so ist*

$${}_Z\mathcal{M}_{\mathcal{W}}[\Phi] = (\mathcal{M}_Y[\Theta])^{-1} \cdot {}_Y\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi] \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Xi]. \quad (\text{VI.57})$$

Beweis. Ergibt sich sofort aus Satz VI.4 und (VI.39). □

Korollar VI.10. *Seien $N \in \mathbb{N}$, X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Basen $\mathcal{X} := \{\vec{x}_n\}_{n=1}^N$, $\mathcal{W} := \{\vec{w}_n\}_{n=1}^N \subseteq X$ und zugehöriger Basistransformation $\Xi \in GL(X)$, mit $\Xi(\vec{x}_n) = \vec{w}_n$. Für alle $\Phi \in \mathcal{L}(X)$ gilt*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{W}}[\Phi] = (\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Xi])^{-1} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi] \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Xi]. \quad (\text{VI.58})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Zur Berechnung der inversen Matrix braucht man die Determinante. Diese ist Gegenstand des nächsten Kapitels. Erst wenn wir Matrizen invertieren können, sind (VI.57) und (VI.58) zu etwas nütze.
- Wir illustrieren Korollar VI.10 durch ein Beispiel und kommen dazu nochmal auf (VI.40)–(VI.46) zurück, wählen also $N = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$ und Basen

$$\mathcal{E} = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{X} = \left\{ \vec{x}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (\text{VI.59})$$

Der Basis $\mathcal{E}$ entspricht nun also $\mathcal{X}$ in Korollar VI.10 und $\mathcal{X}$ in (VI.59) entspricht $\mathcal{W}$ in Korollar VI.10.

Wir berechnen nun die Matrixdarstellungen $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi]$, $(\mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi])^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi^{-1}] \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ zur Basistransformation $\Xi \in GL(X)$, $\Xi(\vec{e}_1) = \vec{x}_1$, $\Xi(\vec{e}_2) = \vec{x}_2$, und ihrer Inversen $\Xi^{-1} \in GL(X)$, $\Xi^{-1}(\vec{x}_1) = \vec{e}_1$, $\Xi^{-1}(\vec{x}_2) = \vec{e}_2$. Dazu beobachten wir, dass

$$\Xi(\vec{e}_1) = \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_1, \quad (\text{VI.60})$$

$$\Xi(\vec{e}_2) = \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad (\text{VI.61})$$

und

$$\vec{e}_1 = \Xi^{-1}(\vec{x}_1) = 2\Xi^{-1}(\vec{e}_1) \Rightarrow \Xi^{-1}(\vec{e}_1) = \frac{1}{2}\vec{e}_1, \quad (\text{VI.62})$$

$$\vec{e}_2 = \Xi^{-1}(\vec{x}_2) = \Xi^{-1}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \Xi^{-1}(\vec{e}_2) \Rightarrow \Xi^{-1}(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_1. \quad (\text{VI.63})$$

Somit sind

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi^{-1}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.64})$$

Nun überprüfen wir $(\mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi])^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi^{-1}]$ durch Matrixmultiplikation. In der Tat sind

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi] \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi^{-1}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}, \quad (\text{VI.65})$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi^{-1}] \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}. \quad (\text{VI.66})$$

Wir kommen nun auf die in (VI.41) definierte lineare Abbildung $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ zurück, die gemäß (VI.42) und (VI.46) die Matrixdarstellungen

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Phi] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.67})$$

besitzt. Durch Matrixmultiplikation erhalten wir nun sofort, dass

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi])^{-1} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Phi] \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Xi] &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Phi], \end{aligned} \quad (\text{VI.68})$$

wie in Korollar VI.10 behauptet.