Technische Universität Braunschweig

13. Übungsblatt (Bonus)

Upload: 14.07.2025.

Aufgabe 13.1

(a) Zeigen Sie explizit, dass der Integrand aus Großer Übung 13.2

$$f(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,0)\}$$

nicht μ_2-integrabel ist auf $[0,1]^2$ und somit die iterierten Integrale über x und y möglicherweise nicht gleich sind.

(b) Berechnen sie die folgenden Integrale:

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}\times[-1,1]} y \cdot \exp[-x^4 + x^2 + x] \, \mathrm{d}\mu_2(x,y),$$
$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} xy \exp[-x^2 - y^2] \, \mathrm{d}\mu_2(x,y).$$

Aufgabe 13.2

(a) Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \varphi(y)\}.$$

Zeigen Sie, dass das (möglicherweise unendlich große) Volumen von M gegeben ist durch

$$\mu_2(M) = \int_0^1 \int_0^{\varphi(y)} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

(b) Seien $r, L > 0$ und

$$K(r) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq r^2\},$$
$$Z(r,L) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq r^2,\ 0 \leq z \leq L\}$$

der Kreis mit Radius r und der Zylinder mit Radius r und Länge L. Berechnen Sie $\mu_2(K(r))$ und $\mu_3(Z(r,L))$. Überführen Sie dazu $K(r)$ und $Z(r,L)$ in eine zu M ähnliche Form und nutzen Sie ihr Ergebnis aus (a).

(c) Berechnen Sie

$$\int_{K(r)} |x| \, \mathrm{d}\mu_2(x,y).$$

Aufgabe 13.3 Wir definieren die Gamma-Funktion und die Beta-Funktion durch

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \Gamma[x] = \int_{\mathbb{R}_0^+} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_1(t),$$

$$\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \beta(x,y) = \int_{[0,1]} t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}\mu_1(t).$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\Gamma[n+1] = n! \quad .$$

(b) Für alle $x > 0$ gilt

$$\Gamma[x+1] = x \cdot \Gamma[x].$$

(c) Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma[x] \cdot \Gamma[y]}{\Gamma[x+y]}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\Gamma[x] \cdot \Gamma[y]$ und nutzen Sie Fubini-Tonelli sowie eine geeignete Koordinatentransformation.

(d) Seien $m, M \in \mathbb{N}$, $m \leq M$, $x, \rho > 0$ und $y \geq 0$. Darüber hinaus sei

$$A(M,m,\rho,x,y) := \int\limits_{(\mathbb{R}_0^+)^M} \left(\prod_{i=1}^{M} s_i^{x-1} \right) \mathbf{1} \left[\sum_{i=1}^{M} s_i \leq \rho \right] \left(\rho - \sum_{j=1}^{m} s_j \right)^y \mathrm{d}\mu_M(s_1, \ldots, s_M).$$

Dann ist

$$A(M,m,\rho,x,y) = \frac{\rho^{Mx+y} \cdot \Gamma\big[x\big]^M \Gamma\big[(M-m)x+y+1\big]}{\Gamma\big[Mx+y+1\big]\Gamma\big[(M-m)x+1\big]}.$$

Aufgabe 13.4

(a) Bestimmen Sie $V \subseteq \mathbb{R}^3$ so, dass

$$\Phi : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) \to V, \ (r,\theta,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

eine Koordinatentransformation definiert und berechnen Sie die Funktionaldeterminante von Φ.

(b) Berechnen Sie das Volumen der Kugel $B(\vec{0}, R)$ vom Radius $R > 0$ in drei Dimensionen.

(c) Für $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\Psi(\vec{y}) := \int_{B(\vec{0},R)} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|_{eukl}} \mathrm{d}\mu_3(x_1, x_2, x_3).$$

Zeigen Sie, dass

$$\Psi(\vec{y}) = \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 + \|\vec{y}\|_{eukl}^2 - 2r\|\vec{y}\|_{eukl}\cos(\theta)}} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r,$$

und lösen Sie das Integral. *Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass* $\vec{y} = (0, 0, \|y\|_{eukl})^T$ *ein Vektor in positiver z-Richtung ist und verallgemeinern Sie dann Ihr Ergebnis auf beliebige* $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$.