Analysis 2
Sommersemester 2025
Prof. Dr. Volker Bach
M.Sc. Jakob Geisler

Technische Universität Braunschweig

12. Übungsblatt

Upload: 04.07.2025.
Deadline: 11.07.2025, 8:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

Aufgabe 12.1 (2 + 2 + 2)

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge messbarer Funktionen $f_k : \Omega \to [0, \infty]$ und f_1 μ-integrabel. Dann sind alle f_k μ-integrabel, $f := \lim_{k\to\infty} f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$ ist messbar und μ-integrabel und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu.$$

(b) Sei $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge messbarer, μ-integrabler Funktionen $f_k : \Omega \to [-\infty, 0]$. Dann ist $f := \lim_{k\to\infty} f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$ messbar. f ist außerdem μ-integrabel genau dann, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k \,\mathrm{d}\mu > -\infty$$

und in diesem Falle gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu.$$

(c) Sei $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monoton wachsende Folge messbarer, μ-integrabler Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann ist $f := \lim_{k\to\infty} f_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ messbar. f ist außerdem μ-integrabel genau dann, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

und in diesem Falle gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Aufgabe 12.2 (3 + 3)

Im Folgenden betrachten wir stets den Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1, \mu_1)$.

(a) Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, definiert durch

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & kx \in [-1, 1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle f_k messbar sind und geben Sie eine μ_1-integrable Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die fast überall der Grenzwert der Funktionenfolge ist. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\mu_1 \neq \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu_1,$$

und begründen Sie, warum dies nicht den Konvergenzsätzen (Satz VII.8 und Satz VII.10) widerspricht.

(b) Geben Sie eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ μ_1-integrabler Funktionen an mit

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int |f_k| \,\mathrm{d}\mu_1 < \infty$$

für die

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\mu_1 \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k \,\mathrm{d}\mu_1.$$

Zeigen Sie auch hier direkt, dass die Voraussetzungen aus den Konvergenzsätzen nicht erfüllt sind.

Aufgabe 12.3 (3 + 3)

Gegeben seien die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1], \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} f_i \,\mathrm{d}\mu_1, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\begin{aligned} (i) \lim_{n\to\infty} &\int_{[0,1]} \cos(x^n + x) \,\mathrm{d}\mu_1(x), \\ (ii) \lim_{n\to\infty} &\int_{\mathbb{R}} \exp[-|x| - \tfrac{x^4}{n}] \,\mathrm{d}\mu_1(x), \\ (iii) \lim_{n\to\infty} &\int_{\mathbb{R}_0^+} x^n \exp[-nx] \,\mathrm{d}\mu_1(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 12.4 (3 + 3)

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) Youngsche Ungleichung: Für $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Sie dürfen hierbei die Konvexität der Exponentialfunktion benutzen, d.h., für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$\exp[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda \cdot \exp[x] + (1-\lambda) \cdot \exp[y].$$

(b) Höldersche Ungleichung: Seien $1 < p, q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ so, dass $|f|^p$ und $|g|^q$ μ-integrabel sind. Dann ist auch $f \cdot g$ μ-integrabel und es gilt

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\Omega} |g|^q \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/q}.$$