Technische Universität Braunschweig

11. Übungsblatt

Upload: 27.06.2025.
Deadline: 04.07.2025, 8:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

Aufgabe 11.1 (2 + 2 + 2)

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Es sei

$$\mathcal{N} := \{A \in \mathfrak{A} | \mu(A) = 0\}$$

das System der **Nullmengen**. Beweisen Sie: Ist $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ eine Folge von Nullmengen, so ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine Nullmenge.

(b) Nun sei

$$\mathfrak{N} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) | \exists N \in \mathcal{N} : A \subseteq N\}$$

das System der Teilmengen von Nullmengen und

$$\mathfrak{L} := \{A \cup N | A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{L}$ eine σ-Algebra über Ω ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathfrak{L}, \mu_L)$, die Vervollständigung von $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, ein Maßraum ist, wobei

$$\mu_L : \mathfrak{L} \to [0, \infty], \quad A \cup N \mapsto \mu(A).$$

Aufgabe 11.2 (2 + 2 + 2)

Seien $X, Y \neq \varnothing$ sowie $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Algebren über X bzw. Y. Dann nennen wir eine Abbildung $f : X \to Y$ messbar, falls

$$\forall B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

(a) Seien $X, Y \neq \varnothing$ sowie $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{B} = \{\varnothing, Y\}$. Zeigen Sie, dass alle Funktionen $f : X \to Y$ messbar sind. Zeigen Sie umgekehrt, dass von den Funktionen $g : Y \to X$ nur solche messbar sind, welche konstant sind, d.h., für welche ein $x \in X$ existiert mit $g(y) = x$ für alle $y \in Y$.

(b) Seien $X, Y, Z \neq \varnothing$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ σ-Algebren über X, Y bzw. Z und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ messbar. Beweisen Sie, dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ messbar.

(c) Ist $\mathcal{E} \subseteq Y$ und $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra über Y, dann ist $f : X \to Y$ genau dann messbar, wenn

$$\forall E \in \mathcal{E} : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}.$$

Aufgabe 11.3 (2 + 2 + 2)

In dieser Aufgaben beweisen wir die Translations-Invarianz des Lebesgue-Borel-Maßes.

(a) Nutzen Sie Aufgabe 11.2 (c), um zu zeigen, dass stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ messbar sind bezüglich der Borelmengen $\mathfrak{B}_m$ bzw. $\mathfrak{B}_n$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die Funktion $T_a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto x + a$ messbar ist und dass $\lambda = \mu_d \circ T_a : \mathfrak{B}_d \to [0, \infty]$, $A \mapsto \mu_d(A + a)$ ein Maß ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\lambda = \mu_d$ auf $\mathfrak{B}_d$ gilt.

Aufgabe 11.4 (3 + 3)

Im Folgenden betrachten wir stets den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1, \mu_1)$ und positive Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$. Für messbare Funktionen und $\lambda > 0$ sei die Niveaumenge definiert durch

$$A(f,\lambda) \coloneqq f^{-1}((\lambda,\infty]) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) > \lambda\} \in \overline{\mathfrak{B}}_1.$$

Entsprechend ist $F(f,\cdot) : \mathbb{R}^+ \to [0,\infty]$, $\lambda \mapsto F(f,\lambda) = \mu_1(A(f,\lambda))$ eine monoton fallende Funktion. Wir nennen eine messbare Funktion f μ_1-integrabel, wenn das Riemann-Integral

$$\sup_{0<a<b<\infty} \int_a^b F(f,\lambda) \mathrm{d}\lambda < \infty$$

endlich ist und schreiben

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu = \int_0^\infty F(f,\lambda) \, \mathrm{d}\lambda.$$

(a) Zeigen Sie: Ist f eine Treppenfunktion, d.h., existieren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{B}_1$ mit $\mu_1(A_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{Z}_1^n$ so, dass

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}(x),$$

dann ist f messbar, μ_1-integrabel und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu_1(A_i).$$

(b) Seien $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ und $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f_n μ_1-integrabel ist und berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\mu_1.$$