Technische Universität Braunschweig

10. Übungsblatt

Upload: 20.06.2025.
Deadline: 27.06.2025, 8:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

Aufgabe 10.1 (2 + 2 + 2)

Ist $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß und $\mathfrak{R}$ nicht nur ein Ring sondern sogar eine σ-Algebra, dann nennen wir μ ein Maß. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils:

(a) Ist $\Omega \neq \varnothing$, $x \in \Omega$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra über Ω, so definiert

$$\delta_x : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad A \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

ein Maß.

(b) Der Ring $\mathcal{A}$ aus Aufgabe 9.3 (a) ist eine σ-Algebra.

(c) Das Zählmaß

$$\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty], \quad A \mapsto \#[A]$$

ist ein Maß. Hierbei definieren wir die Addition mit ∞ durch

$$\forall a \in \mathbb{R} : a + \infty = \infty + a = \infty, \quad \infty + \infty = \infty.$$

Aufgabe 10.2 (3 + 3)

Im Folgenden seien $X, Y \neq \varnothing$ und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Algebren über X bzw. Y. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils:

(a) Ist $M \neq \varnothing$ eine Teilmenge von X so definiert

$$M \cap \mathcal{A} := \{M \cap A | A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über M.

(b) Die Menge

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$$

definiert eine σ-Algebra über dem kartesischen Produkt

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}.$$

Aufgabe 10.3 (2 + 2 + 1 + 1)

Seien $\mathfrak{Q}_1^{(\mathbb{Q})} := \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathfrak{Q}_1$ die Familie aller halboffenen Intervalle mit rationalen Randpunkten und $\mathfrak{A}_1^{(\mathbb{Q})} := \mathfrak{A}[\mathfrak{Q}_1^{(\mathbb{Q})}]$ die von ihnen erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie folgende Inklusionen:

(a) $[\sqrt{2}, \infty) \in \mathfrak{A}_1^{(\mathbb{Q})}$;

(b) $(-\infty, \pi) \in \mathfrak{A}_1^{(\mathbb{Q})}$;

(c) $\mathfrak{Q}_1 \subseteq \mathfrak{A}_1^{(\mathbb{Q})}$;

(d) $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1^{(\mathbb{Q})}$.

Aufgabe 10.4 (2 + 2 + 2)

Sei $\Omega \neq \varnothing$ und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Wir nennen $\mathcal{D}$ Dynkin-System über Ω, falls

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$.

(ii) $\forall\, A \in \mathcal{D} : A^c \in \mathcal{D}$.

(iii) Ist $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathcal{D}$, dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jede σ-Algebra ist ein Dynkin-System.

(b) Es gibt Dynkin-Systeme, die keine σ-Algebren sind.

(c) Ein Dynkin-System ist genau dann eine σ-Algebra, wenn für alle $A, B \in \mathcal{D}$ auch $A \cap B \in \mathcal{D}$.