Technische Universität Braunschweig

9. Übungsblatt

Upload: 06.06.2025.
Deadline: 20.06.2025, 8:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

Aufgabe 9.1 (3 + 3)

(a) Es sei
$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{N} | \#[A] < \infty\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$
Beweisen Sie, dass $\mathcal{A}$ ein Ring über $\mathbb{N}$ und
$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_0^+, \quad A \mapsto \mu(A) = \#[A]$$
ein Inhalt ist.

(b) Sei
$$\mathcal{B} := \{B \subseteq \mathbb{N} | \#[B] < \infty \vee \#[\mathbb{N} \setminus B] < \infty\}$$
die Algebra über $\mathbb{N}$ aus Aufgabe 6.3 (b). Zeigen Sie, dass
$$\nu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_0^+, \quad B \mapsto \nu(B) = \begin{cases} \#[B], & \#[B] < \infty, \\ \#[\mathbb{N} \setminus B], & \#[\mathbb{N} \setminus B] < \infty \end{cases}$$
keinen Inhalt definiert.

Aufgabe 9.2 (3 + 3)

Im Folgenden seien $X, Y \neq \varnothing$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra über X und
$$\mathcal{B} := \{B \subseteq Y | f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$
Beweisen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra über Y ist.

(b) Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ und $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra über Y. Beweisen Sie, dass
$$f^{-1}(\mathfrak{A}(\mathcal{E})) = \mathfrak{A}(f^{-1}(\mathcal{E})).$$

Aufgabe 9.3 (3 + 3)

Im Folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $\mathcal{R}([a, b])$ der Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$. Weiterhin sei für alle $A \subseteq [a, b]$ die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_A : [0, 1] \to \mathbb{R}$ von A gegeben durch
$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$
Beweisen Sie:

(a) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}([a, b])$, gegeben durch
$$\mathcal{A} := \{A \subseteq [a, b] | \mathbf{1}_A \in \mathcal{R}([a, b])\},$$
definiert einen Ring auf $[a, b]$.

(b) Die Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_0^+$, definiert durch

$$\mu(A) := \int_a^b \mathbf{1}_A(x)\,\mathrm{d}x,$$

definiert einen Inhalt.

Aufgabe 9.4 (6)

Bestimmen Sie den minimalen euklidischen Abstand des Punktes $(1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ zum Rotationshyperboloiden

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

Argumentieren Sie vorab, warum ein minimaler Abstand existiert.