Analysis 2
Sommersemester 2025
Prof. Dr. Volker Bach
M.Sc. Jakob Geisler

Technische Universität Braunschweig

8. Übungsblatt

Upload: 30.05.2025.
Deadline: 06.06.2025, 8:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

Aufgabe 8.1 (3 + 3)

Im Folgenden sei $F : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2 \cdot e^{-x_1 - x_2}$.

(a) Bestimmen Sie, falls vorhanden, die lokalen und globalen Extrema von F und geben Sie den Bildbereich $F((0,\infty) \times (0,\infty))$ an.

(b) Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $N_c := \{(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^+)^2 | F(x_1, x_2) = c\}$. Geben Sie jeweils alle Punkte $x = (x_1, x_2) \in N_c$ an, an denen sich $F(x_1, x_2) = c$ lokal nach x_2 auflösen lässt, und alle Punkte $y = (y_1, y_2) \in N_c$, an denen sich $F(y_1, y_2) = c$ lokal nach y_1 auflösen lässt.

Aufgabe 8.2 (3 + 3)

(a) Nutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, Satz V.3, um den Satz über lokale Invertibilität, Satz V.2, für den Banachraum $X = \mathbb{R}^m$ zu beweisen.

(b) Es seien $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ und

$$\mathbb{S}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | F(x_1, x_2, x_3) = 1\}.$$

Geben Sie die Menge $M_1 \subseteq \mathbb{S}^2$ der Punkte $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ an, in denen sich $F(x_1, x_2, x_3) = 1$ lokal nach (x_2, x_3) auflösen lässt, d.h., für die Umgebungen $W_{23} \subseteq \mathbb{R}^2, \widetilde{U}_{23} \subseteq \mathbb{R}^3$, $x \in \widetilde{U}_{23}$ und Funktionen $h_{23} : W_{23} \to \mathbb{R}$ existieren so, dass

$$\forall\, y = (y_1, y_2, y_3) \in (\mathbb{R} \times W_{23}) \cap \widetilde{U}_{23} : F(y_1, y_2, y_3) = 1 \Leftrightarrow y_1 = h_{23}(y_2, y_3).$$

Geben Sie für jedes $x \in M_1$ die Umgebungen W_{23} und $\widetilde{U}_{23}$ sowie die Abbildung h_{23} explizit an und zeigen Sie, dass M_1 offen ist bezüglich der Unterraumtopologie auf $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ (siehe Große Übung 7.2 (a)). Geben Sie anschließend entsprechend auch die Mengen M_2 und $M_3 \subseteq \mathbb{S}^2$ an, in denen sich $F(x_1, x_2, x_3) = 1$ jeweils lokal nach x_2 bzw. x_3 auflösen lässt und geben Sie auch hier für jedes $x \in M_2$ und $x \in M_3$ jeweils die Umgebungen W_{13} bzw. W_{12} und $\widetilde{U}_{13}$ bzw. $\widetilde{U}_{12}$ sowie die Abbildung h_{13} bzw. h_{12} explizit an. Zeigen Sie, dass $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{S}^2$ ist.

Aufgabe 8.3 (1 + 4 + 1)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 4x_2^2$.

(a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Funktion f auf

$$M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + 2x_2^2 = 4\}$$

ihr Maximum und Minimum annimmt.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f auf M.

(c) Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum von f auf M.

Aufgabe 8.4 (3 + 1,5 + 1,5)

(a) Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein System von Teilmengen von $\Omega \neq \varnothing$. Nutzen Sie Aufgabe 7.1(a) um zu zeigen, dass es genau eine kleinstmögliche σ-Algebra $\mathfrak{U}(\mathcal{E})$ gibt, die $\mathcal{E}$ enthält, d.h., für alle σ-Algebren $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, die $\mathcal{E}$ enthalten, gilt $\mathfrak{U}(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{U}$. $\mathfrak{U}(\mathcal{E})$ heißt die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.

Nun sei im Folgenden $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

(b) Bestimmen Sie die von $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{2, 3\}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ erzeugte σ-Algebra.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}' = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ die gleiche σ-Algebra erzeugt.