Technische Universität Braunschweig

# 7. Übungsblatt

Upload: 23.05.2025.
Deadline: 30.05.2025, 8:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

## Aufgabe 7.1 (3 + 3)

Im Folgenden sei $I$ eine beliebige Indexmenge. Beweisen Sie:

(a) Sind $\Omega \neq \varnothing$ und $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ $\sigma$-Algebren für alle $i \in I$, so ist auch

$$\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

eine $\sigma$-Algebra.

(b) Sind $\Omega \neq \varnothing$, $\mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Topologien auf $\Omega$ für alle $i \in I$, so ist auch

$$\mathcal{T} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$$

eine Topologie auf $\Omega$.

## Aufgabe 7.2 (1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5)

Im Folgenden seien $X, Y \neq \varnothing$ zwei nicht-leere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen:

(a) Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine $\sigma$-Algebra über $X$, so ist auch $f(\mathcal{A}) = \{f(A) \subseteq Y | A \in \mathcal{A}\}$ eine $\sigma$-Algebra über $Y$.

(b) Ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Topologie über $X$, so ist auch $f(\mathcal{T})$ eine Topologie über $Y$.

(c) Ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine $\sigma$-Algebra über $Y$, so ist auch $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \subseteq X | B \in \mathcal{B}\}$ eine $\sigma$-Algebra über $X$.

(d) Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine Topologie über $Y$, so ist auch $f^{-1}(\mathcal{S})$ eine Topologie über $X$.

## Aufgabe 7.3 (3 + 3)

(a) Gegeben sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} e^{-x_1 - x_2} \cdot (x_1^2 + 1) \\ e^{-x_1 - x_2} \cdot (x_2^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ an denen $f$ lokal invertierbar ist und bestimmen Sie dort $(f'(x_1, x_2))^{-1}$.

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Begründen Sie, warum $g$ bei $x_0 = 0$ nicht lokal invertierbar ist. Geben Sie alle offenen Intervalle $\widetilde{U}, \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}$ an so, dass die Restriktion $g \in C^1(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ eine Bijektion mit stetig differenzierbarer inverser Funktion $g^{-1} \in C^1(\widetilde{V}, \widetilde{U})$ ist. Geben Sie die Abbildungsvorschrift von $g^{-1} : \widetilde{V} \to \widetilde{U}$ explizit an und verifizieren Sie Gleichung (V.6) aus dem Skript.

## Aufgabe 7.4 (3 + 3)

(a) Beweisen Sie: Seien $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, $(Y, \mathcal{S})$ ein Hausdorffscher Raum und $f : X \to Y$ eine stetige Bijektion. Dann ist die inverse Funktion $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die stetigen Bijektionen $f_1, f_2$ eine stetige Umkehrfunktion besitzen. Hierbei sind

$$f_1 : [0, \pi] \to S^1_\uparrow := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 \geq 0,\ x_1^2 + x_2^2 = 1\},\ \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

$$f_2 : [0, 2\pi) \to S^1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\},\ \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$