Technische Universität Braunschweig

6. Übungsblatt

Upload: 16.05.2025.
Deadline: 23.05.2025, 8:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

Aufgabe 6.1 (6)

Bestimmen und klassifizieren Sie alle Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto (1 - x_1^2 - x_2^2)^2.$$

Aufgabe 6.2 (2 + 2 + 2)

(a) Es seien $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$ und $(x, y) := \{tx + (1-t)y | 0 < t < 1\}$. Beweisen Sie: Dann existiert ein $x_0 \in (x, y)$ so, dass

$$f(y) - f(x) = \nabla f(x_0) \cdot (y - x).$$

(b) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ und $x < y$ so, dass f in x und in y jeweils ein lokales Minimum besitzt. Beweisen Sie: Dann gibt es ein $x_0 \in (x, y)$ so, dass f in x_0 ein lokales Maximum besitzt.

(c) Geben Sie ein $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ an, welches zeigt, dass die Aussage aus (b) in höheren Dimesionen im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 6.3 (2 + 2 + 2)

Sei Ω eine Menge. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, falls

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
3. $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{A}^\mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ hingegen ein Ring über Ω mit $\Omega \in \mathcal{A}$ so heißt $\mathcal{A}$ Algebra.

(a) Geben Sie alle σ-Algebren über $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ an. Warum sind hier alle Algebren bereits σ-Algebren? Geben Sie ein Beispiel einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω an, die zugleich eine Topologie über Ω ist.

(b) Beweisen Sie: Das System der Mengen über $\mathbb{N}$, die endlich sind oder deren Komplemente endlich sind

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{N} | \#[A] < \infty \vee \#[\mathbb{N} \setminus A] < \infty\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$

ist eine Algebra aber keine σ-Algebra.

(c) Finden Sie eine Menge Ω und eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω, die keine Topologie ist.

Aufgabe 6.4 (3 + 3)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$ eine Folge an Mengen aus $\mathcal{A}$. Dann sind auch $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n, \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(b) Eine Algebra $\mathcal{A}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn für alle konvergente Mengenfolgen $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$ auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ liegt.