Technische Universität Braunschweig

5. Übungsblatt

Upload: 09.05.2025.
Deadline: 16.05.2025, 8:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

Aufgabe 5.1 (2 + 2 + 2)

Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = c \cdot \begin{cases} \exp[\frac{1}{x^2-1}], & |x| < 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

mit

$$\frac{1}{c} = \int_{-1}^{1} \exp\left[\frac{1}{x^2-1}\right] \mathrm{d}x,$$

die Funktion aus Aufgabe 4.3. Sei nun $f \in C(\mathbb{R})$ eine stetige Funktion. Die Faltung von g mit f sei definiert als die Funktion $(g * f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$(g * f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \cdot f(y)\, \mathrm{d}y$$

(a) Zeigen Sie, dass $g * f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Sei $(g_n)_{n=1}^\infty \in (C_0^\infty(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ die durch $g_n(x) = n \cdot g(nx)$ definierte Funktionenfolge. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Faltung $(g_n * f)(x) \to f(x)$ punktweise konvergiert, für $n \to \infty$.

(c) Seien nun $a < b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ und $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion auf I, d.h.,

$$\chi(x) = \mathbf{1}_I(x) := \begin{cases} 1, & x \in I, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ gibt, mit $\chi_\varepsilon(x) = \chi(x) = 1$ für alle $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ und $\chi_\varepsilon(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$.

Aufgabe 5.2 (2 + 4)

Berechnen Sie die Taylorpolyome zweiten Grades der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$ um den Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (1, 2)$.

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto e^{-x_3^2} \sin(x_1^2 + x_2^2)$ um den Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$.

Aufgabe 5.3 (3 + 3)

(a) Eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt Figur, falls F die Vereinigung endlich vieler halboffener Quader ist, d.h.

$$F = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_m$$

wobei

$$Q_i = [a_i, b_i) \times [c_i, d_i) \subseteq \mathbb{R}^2, \quad a_i \leq b_i,\ c_i \leq d_i \in \mathbb{R}.$$

Die Menge aller Figuren sei $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ ein Mengenring ist.

(b) Sei nun $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiger Mengenring über $\Omega \neq \varnothing$. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{R}, \triangle, \cap)$ mit der symmetrischen Differenz

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

ein Ring im Sinne der Algebra ist wobei Addition durch $\triangle$ und Multiplikation durch $\cap$ definiert sind.

Aufgabe 5.4 (2 + 2 + 2)

Auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ sei $\mu : \mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben als

$$\mu(F) := \sum_{i=1}^{m} \mu(Q_i) = \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \cdot (d_i - c_i),$$

falls $Q_1 \dot\cup ... \dot\cup Q_m$ eine disjunkte Zerlegung von F ist, d.h., falls $F = Q_1 \cup \ldots \cup Q_m$ und $Q_1, \ldots, Q_m$ paarweise disjunkte halboffene Quader sind.

(a) Zeigen Sie graphisch, dass jede Figur als endliche Vereinigung paarweise disjunkter halboffener Quader geschrieben werden kann und dass diese Zerlegung im Allgemeinen nicht eindeutig ist.

(b) Zeigen Sie, dass μ wohldefiniert ist, d.h., falls $F = Q_1 \dot\cup ... \dot\cup Q_m = Q_1' \dot\cup ... \dot\cup Q_n'$ auch durch eine zweite Zerlegung realisiert werden kann, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i' - a_i') \cdot (d_i' - c_i') = \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \cdot (d_i - c_i).$$

(c) Zeigen Sie, dass μ eine Inhaltsfunktion definiert, d.h., es gelten

1. $\mu(\varnothing) = 0$,
2. $\mu(F) \geq 0$ für alle $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$,
3. Für paarweise disjunkte Figuren $F_1, ..., F_n$, $F_i \cap F_j = \varnothing$, $\forall\, i \neq j$, gilt $\mu(F_1 \dot\cup ... \dot\cup F_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$.