Technische Universität Braunschweig

4. Übungsblatt

Upload: 02.05.2025.
Deadline: 09.05.2025, 8:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

Aufgabe 4.1 (3 + 3)

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen:

(a) Partielle Differenzierbarkeit impliziert totale Differenzierbarkeit.

(b) Partielle Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit.

Aufgabe 4.2 (6)

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \ln(1+x^2)\cdot\sin(x+y) \\ \exp[-x^2-y^2] \end{pmatrix}, \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{2xy+2}{x^2+y^2+1}, \end{aligned}$$

und entscheiden Sie jeweils, ob f und g total differenzierbar sind. Geben Sie außerdem die Jacobimatrix von $g \circ f$ an der Stelle $(x,y) = (0,0)$ an.

Aufgabe 4.3 (3 + 3)

Gegeben sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = c \cdot \begin{cases} \exp[\frac{1}{x^2-1}], & |x| < 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei

$$\frac{1}{c} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, dass $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ unendlich oft stetig differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle stetigen Funktionen $f \in C(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n \cdot g(nx) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

Aufgabe 4.4 (3 + 1,5 + 1,5)

Sei T eine Menge, dann nennt man $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(T)$ eine Topologie auf T falls:

(i) $\varnothing \in \mathcal{O}$, $T \in \mathcal{O}$.

(ii) Mit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{O}$ ist auch $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{O}$.

(iii) Ist I eine beliebige Indexmenge und $A_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$, so auch $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}$.

$(a_n)_{n=1}^{\infty} \in T^{\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in T$ genau dann, wenn

$$\forall\, A \in \mathcal{O},\, A \ni a\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_0 : a_n \in A.$$

(a) Geben Sie alle möglichen Topologien auf der Menge $T = \{1, 2, 3, 4\}$ an.

(b) Wählen Sie eine der Topologien aus (a) aus, um zu zeigen, dass in topologischen Räumen der Grenzwert einer Folge nicht mehr eindeutig zu sein braucht.

(c) Ein topologischer Raum $(T, \mathcal{O})$ heißt Hausdorffsch, falls für alle $x, y \in T$, $x \neq y$ eine Umgebung $U \in \mathcal{O}$ existiert, sodass $x \in U$ und $y \notin U$. Beweisen Sie: In Hausdorffschen Räumen ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig.