Technische Universität Braunschweig

3. Übungsblatt

Upload: 25.04.2025.
Deadline: 02.05.2025, 8:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

Aufgabe 3.1 (2 + 1 + 2 + 2 + 2)

Im Folgenden sei $X \coloneqq C([0,1];\mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass

$$\|\cdot\|_\infty : X \to \mathbb{R}_0^+, \quad f \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

eine Norm ist.

(b) Beweisen Sie, dass $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

(c) Beweisen Sie, dass

$$\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}_0^+, \quad f \mapsto \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

eine Norm ist.

(d) Beweisen Sie, dass $(X, \|\cdot\|_1)$ kein Banachraum ist.

(e) Beweisen Sie, dass die $\|\cdot\|_\infty$-Norm echt stärker ist als die $\|\cdot\|_1$-Norm, d.h., zeigen Sie, dass es ein $0 < C < \infty$ gibt so, dass $\|f\|_1 \leq C\|f\|_\infty$ für alle $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ gilt, aber nicht umgekehrt.

Aufgabe 3.2 (4,5 + 1,5)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die punktweise Konvergenz und die gleichmäßige konvergenz der Funktionenfolgen $(f_n)_{n=1}^\infty$, $(g_n)_{n=1}^\infty$ und $(h_n)_{n=1}^\infty$, wobei

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp[-nx],$$

$$g_n : [-1.1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} n \cdot \exp\left[\frac{1}{n^2x^2-1}\right], & |x| < 1/n, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$h_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto n \cdot \sin(\tfrac{x}{n}).$$

(b) Es sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine in $x = 0$ stetige Funktion. Beweisen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\frac{x}{n})$ gleichmäßig konvergiert gegen die konstante Funktion

$$f_\infty : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(0).$$

Aufgabe 3.3 (4 + 2)

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Integrale I_1, I_2, wobei

$$I_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \exp\left[-x - \frac{x^4}{n}\right] dx, \quad I_2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2} \cdot f(x)\, dx,$$

und $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion sei.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge an stetigen Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompakten Trägern, d.h., es existieren $a_n < b_n \in \mathbb{R}$ so, dass $f_n \equiv 0$ außerhalb von $[a_n, b_n]$. Darüber hinaus konvergiere diese Folge gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die absolut Riemann-integrierbar ist. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3.4 (3)

Beweisen Sie: Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum, dann ist auch $\mathcal{B}(X;Y)$, der Raum der beschränkten linearen Operatoren von X nach Y, ein Banachraum.