



2. Übungsblatt

Upload: 17.04.2025.

Deadline: 25.04.2025, 8:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

Aufgabe 2.1 (2 + 2 + 2)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann ist (X, ρ_I) mit $\rho_I : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $(x, y) \mapsto \rho_I(x, y) := \|x - y\|$ ein metrischer Raum.
- (b) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und (X, ρ_I) der aus (a) induzierte metrischer Raum. Dann sind die offenen Kugeln $B_{\rho_I}(x, r)$ für $x \in X$ und $r > 0$ konvex.
- (c) Es gibt Vektorräume X mit Metriken ρ , welche nicht durch eine Norm induziert sind, d.h., für welche es keine Norm $\|\cdot\|$ gibt so, dass $(X, \rho) = (X, \rho_I)$.

Aufgabe 2.2 (2 + 2 + 2)

- (a) Seien $d \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{C}^d$ die $\|\cdot\|_p$ -Norm äquivalent ist zur $\|\cdot\|_\infty$ -Norm, d.h., zeigen Sie, dass es Konstanten $0 < c_p(d), C_p(d) < \infty$ gibt, die von der Dimension d und dem Exponenten p abhängen können, so dass für alle $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ gilt

$$c_p(d) \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq C_p(d) \|x\|_\infty.$$

- (b) Beweisen Sie: Seien X ein Vektorraum, $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ zwei äquivalente Normen auf X und $(x_n)_{n=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ eine Folge in X . Die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert in $(X, \|\cdot\|_a)$ genau dann gegen x , wenn sie in $(X, \|\cdot\|_b)$ gegen x konvergiert.
- (c) Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{C}^3)^\mathbb{N}$ auf Konvergenz in $(\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_p)$ und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert, wobei

$$a_n = \begin{pmatrix} 3 + \frac{1}{n} \\ \sin(n) \cdot \exp[-n] \\ \left(\frac{i}{2}\right)^n \end{pmatrix}, \quad b_n = \begin{pmatrix} 2i \cdot \sqrt[n]{n} \\ \frac{(2i)^{n+1}}{2^n + n^2} \\ \frac{n^2 + 3n - 5}{n^3 + 4n + 1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.3 (2 + 2 + 2)

Sei $\mathbb{C}^\mathbb{N} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}\} = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \mid x_n \in \mathbb{C}\}$ die Menge der komplexen Zahlenfolgen.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ bezüglich komponentenweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren ein komplexer Vektorraum ist.
- (b) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass $\ell^p(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{C}^\mathbb{N}$ ein Unterraum ist. Sie dürfen hierbei ohne Beweis benutzen, dass die $\|\cdot\|_p$ -Norm aus Gleichung (I.68) die Dreiecksungleichung erfüllt.
- (c) Seien $1 \leq p < q \leq \infty$. Zeigen Sie, dass $\ell^p(\mathbb{N}) \subsetneq \ell^q(\mathbb{N})$ ein echter Unterraum ist.

Aufgabe 2.4 (2 + 2 + 2)

Seien $d \in \mathbb{N}$, $X_p := (\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_p)$ und

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d,1} & \dots & a_{d,d} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(X_p, X_p).$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} (a) \quad \|A\|_{\mathcal{B}(X_\infty, X_\infty)} &= \max_{1 \leq k \leq d} \left\{ \sum_{l=1}^d |a_{k,l}| \right\}, \\ (b) \quad \|A\|_{\mathcal{B}(X_1, X_1)} &= \max_{1 \leq l \leq d} \left\{ \sum_{k=1}^d |a_{k,l}| \right\}, \\ (c) \quad \|A\|_{\mathcal{B}(X_2, X_2)} &\leq \left(\max_{1 \leq k \leq d} \left\{ \sum_{l=1}^d |a_{k,l}| \right\} \right)^{1/2} \cdot \left(\max_{1 \leq l \leq d} \left\{ \sum_{k=1}^d |a_{k,l}| \right\} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$