



1. Übungsblatt

Upload: 10.04.2025.

Deadline: 17.04.2025, 15:00 Uhr (im gruppeneigenen Briefkasten).

Aufgabe 1.1 (3 + 3)

Überprüfen Sie bei den folgenden Abbildungen alle Eigenschaften einer Metrik und entscheiden Sie jeweils, ob ρ_1 und ρ_2 Metriken sind.

(a) $\rho_1 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

wobei $M \neq \emptyset$ eine nicht-leere Menge ist.

(b) $\rho_2 : \mathcal{R}([0, 1]) \times \mathcal{R}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\rho_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx,$$

wobei $\mathcal{R}([0, 1])$ der Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ ist.

Aufgabe 1.2 (2 + 2 + 2)

- (a) Es sei $M = \mathbb{R}$ und ρ_1 die Abbildung aus Aufgabenteil 1.1 (a). Geben Sie die Menge aller offenen Mengen in (M, ρ) an.
- (b) Erinnern Sie sich an die Analysis 1. Beweisen Sie: Ist (M, ρ) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n=1}^\infty \in M^\mathbb{N}$ eine in M konvergente Folge mit Grenzwert $a \in M$, dann ist dieser Grenzwert eindeutig.
- (c) Beweisen Sie: Sei (M, ρ) ein vollständiger metrischer Raum und $N \subseteq M$ eine nicht-leere abgeschlossene Menge. Dann ist auch die Restriktion $(N, \tilde{\rho})$ auf N ein vollständiger metrischer Raum. Hierbei ist $\tilde{\rho} : N \times N \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definiert als

$$\forall x, y \in N : \tilde{\rho}(x, y) := \rho(x, y).$$

Aufgabe 1.3 (3+3)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Stellen Sie sich die Fläche Deutschlands als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ vor. Angenommen Sie legen eine Landkarte von Deutschland im PK 11.1 auf den Boden. Dann gibt es genau einen Punkt auf der Landkarte, der dort einen Punkt in Deutschland darstellt, an dem er sich auch tatsächlich im Hörsaal befindet.
- (b) Es seien $(\mathbb{C}, \rho_{|\cdot|})$ der metrische Raum der komplexen Zahlen mit dem Betrag, $M \subseteq \mathbb{C}$ eine abgeschlossene, nicht-leere Menge und $(h_s)_{s \in M}$ eine Familie von Abbildungen $h_s : M \rightarrow M$ die alle Kontraktionen sind. Weiterhin seien $M \subseteq N$ und $Q : N \rightarrow M$ eine Abbildung, die

$$h_s(z) = z + s - Q(z)$$

für alle $s, z \in M$ erfüllt. Dann ist Q eingeschränkt als Abbildung von $Q^{-1}(M)$ nach M , eine bijektive Abbildung.

Aufgabe 1.4 (6)

Seien $\varphi \in (0, 2\pi)$ und $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ bzgl. der euklidischen Norm eine Isometrie ist, d.h. dass

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : \|Ax\|_{eukl} = \|x\|_{eukl}$$

gilt.