Technische Universität Braunschweig

0. Übungsblatt

Upload: 08.04.2025.
Besprechung: 2. Vorlesungswoche in den kleinen Übungen (dieses Blatt wird nicht abgegeben).

Aufgabe 0.1

(a) Bestimmen Sie alle reelle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 0 &= 3. \end{aligned}$$

(b) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie

$$(i)\, \vec{v} + 3 \cdot \vec{w},\ (ii)\, A + B,\ (iii)\, A \cdot B,\ (iv)\, B \cdot A,\ (v)\, A \cdot \vec{v}.$$

Aufgabe 0.2

(a) Es seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Matrizen. Berechnen Sie alle möglichen Matrix-Produkte $A_i \cdot A_j$, für $i, j \in \mathbb{Z}_1^4$.

(b) Es seien

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizen. Berechnen Sie alle möglichen Matrix-Summen $B_i + B_j$ für $i, j \in \mathbb{Z}_1^3$.

(c) Geben Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, die

$$(A + B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB \tag{1}$$

erfüllen.

Aufgabe 0.3 Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass es sich bei den folgenden Abbildungen um lineare Abbildungen handelt:

(i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda \cdot x + c$, wobei $\lambda, c \in \mathbb{R}$.

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$.

(iii) $f_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \vec{x} = (x_1, ..., x_n)^T \mapsto \sum_{k=1}^n x_k$.

(iv) $f_4 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad \vec{x} = (x_1, ...x_n)^T \mapsto (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)^T$.

(v) $f_5 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$, wobei $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der reellen Funktionen ist.

(vi) $f_6 : \Pi \to \Pi, \quad p(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k \mapsto \sum_{k=1}^n k \cdot \alpha_k x^{k-1}$, wobei Π der Vektorraum der rellen Polynome ist.