VII. Integration über Maße

VII.1. Riemann-Integrabilität monotoner Funktionen

Zu Beginn dieses Kapitels beweisen wir zwei wichtige Lemmata über das Riemann-Integral monotoner Funktionen auf $\mathbb{R}^+$. Dazu rufen wir in Erinnerung, dass, für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, die Menge der Partitionen des Intervalls (a, b) gegeben ist durch

$$\mathcal{P}[a,b] \; := \; \bigcup_{N=1}^{\infty} \Big\{ (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N) \; \Big| \; a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N := b \Big\}. \tag{VII.1}$$

Für eine beschränkte Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $P = (x_n)_{n=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$ sind dann

$$\overline{\mathcal{I}}[F,P] \; := \; \sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n-1}) \sup_{x_{n-1} \le x \le x_n} \big\{ F(x) \big\}, \tag{VII.2}$$

$$\underline{\mathcal{I}}[F,P] \; := \; \sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n-1}) \inf_{x_{n-1} \le x \le x_n} \big\{ F(x) \big\}, \tag{VII.3}$$

und *Obersumme* und *Untersumme* berechnen sich aus

$$\overline{\int_a^b} F \; := \; \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \overline{\mathcal{I}}[F,P] \qquad \text{und} \qquad \underline{\int_a^b} F \; := \; \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \underline{\mathcal{I}}[F,P]. \tag{VII.4}$$

Stimmen Ober- und Untersumme überein, so heißt die beschränkte Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $F \in \mathcal{R}[a, b]$, und die Obersumme heißt das Integral von F,

$$\int_a^b F(x)\, dx \; := \; \overline{\int_a^b} F \; = \; \underline{\int_a^b} F. \tag{VII.5}$$

Das uneigentliche Integral, für $a = -\infty$, $b = \infty$ oder unbeschränktes F, ist durch einen geeigneten Grenzprozess definiert.

Wir wollen hier die spezielle Situation studieren, dass $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ monoton fallend ist. Dann ist die Einschränkung von F auf $[a, b]$ beschränkt, für alle $0 < a < b < \infty$.

Lemma VII.1. Ist $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ monoton fallend, so ist F auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar, für alle $0 < a < b < \infty$. Ist darüber hinaus

$$I_F \ := \ \sup_{0<a<b<\infty} \int_a^b F(x)\, dx \ < \ \infty, \tag{VII.6}$$

so ist F auch auf $[0,\infty)$ Riemann-integrierbar, und $\int_0^\infty F(x)\, dx = I_F$.

Beweis. Seien $0 < a < b < \infty$, dann ist $F : [a,b] \to [0, F(a)]$ beschränkt. Für $P = (x_n)_{n=0}^N \in \mathcal{P}[a,b]$ sind

$$\sup_{x_{n-1} \le x \le x_n} \big\{F(x)\big\} \ = \ F(x_{n-1}) \ \text{ und } \ \inf_{x_{n-1} \le x \le x_n} \big\{F(x)\big\} \ = \ F(x_n) \tag{VII.7}$$

Wählen wir speziell $x_n := a + \frac{n}{N}(b-a)$, für $n = 0, 1, \ldots, N$, so folgt damit, dass

$$\begin{aligned} 0 \ \le \ \overline{\int_a^b} F \ - \ \underline{\int_a^b} F \ &\le \ \overline{\mathcal{I}}[F,P] \ - \ \underline{\mathcal{I}}[F,P] \\ = \ \frac{b-a}{N} \left(\sum_{n=1}^N F(x_{n-1}) \ - \ \sum_{n=1}^N F(x_n) \right) \ &= \ \frac{(b-a)\,[F(a) - F(b)]}{N} \ \to \ 0, \end{aligned} \tag{VII.8}$$

für $N \to \infty$. Somit ist F auf $[a,b]$ Riemann-integrabel. Da $F \ge 0$, gilt außerdem

$$\forall\, 0 < a' \le a < b \le b' : \quad \int_a^b F(x)\, dx \ \le \ \int_{a'}^{b'} F(x)\, dx. \tag{VII.9}$$

Daher ist die Folge $(I_{k,\ell})_{k,\ell=1}^\infty$, wobei

$$I_{k,\ell} \ := \ \int_{1/k}^{\ell} F(x)\, dx, \tag{VII.10}$$

monoton wachsend in k und ℓ, und es gilt

$$I_F \;=\; \lim_{k\to\infty}\lim_{\ell\to\infty} I_{k,\ell} \;=\; \lim_{\ell\to\infty}\lim_{k\to\infty} I_{k,\ell}. \tag{VII.11}$$

$\square$

Das nächste Lemma zeigt, dass für monotone Funktionen nicht nur die Riemann-Integrabilität leicht zu zeigen ist, sondern dass auch die Vertauschung des Integrals mit dem Grenzwert für monotone Folgen monotoner Funktionen unproblematisch ist.

Lemma VII.2. Sei $(F_k)_{k=1}^\infty$ eine monoton wachsende, punktweise konvergente Folge nichtnegativer, monoton fallender, Riemann-integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^+$, deren Integrale konvergieren, d.h. $F_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ besitze folgende Eigenschaften:

$$\forall\, 0 < x < x' < \infty \;:\; F_k(x) \;\geq\; F_k(x') \;\geq\; 0, \tag{VII.12}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \;:\; F_k(x) \;\leq\; F_{k+1}(x) \;\leq\; F(x) \;:=\; \lim_{k\to\infty} F_k(x) < \infty. \tag{VII.13}$$

Dann gelten

(i) Die Funktion $F := \lim_{k\to\infty} F_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ist genau dann Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}^+$, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty F_k(x)\,dx \;<\; \infty. \tag{VII.14}$$

(ii) Gilt (VII.14), so stimmen auch die Integrale überein,

$$\int_0^\infty F(x)\,dx \;=\; \int_0^\infty \Big(\lim_{k\to\infty} F_k(x)\Big)\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_0^\infty F_k(x)\,dx. \tag{VII.15}$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass mit F_k auch F monoton fallend ist. Sind nämlich $0 < x < x' < \infty$, so ist $F_k(x) \geq F_k(x')$, und deshalb gilt

$$F(x) \;=\; \lim_{k\to\infty} F_k(x) \;\geq\; \lim_{k\to\infty} F_k(x') \;=\; F(x'). \tag{VII.16}$$

Daher ist $F : [a,b] \to [0, F(a)]$, für $0 < a < b < \infty$, beschränkt, monoton fallend und nach Lemma VII.1 auch Riemann-integrabel. Wählen wir wieder die Partition $P = (x_n)_{n=0}^N \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $x_n := a + \frac{n}{N}(b-a)$, für $n = 0, 1, \ldots, N$, so folgt, für alle $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}
0 \;&\leq\; \overline{\int_a^b} F \;-\; \underline{\int_a^b} F_k \;\leq\; \overline{\mathcal{I}}[F,P] \;-\; \underline{\mathcal{I}}[F_k,P] \\
&=\; \frac{b-a}{N}\sum_{n=1}^N \big\{F(x_{n-1}) \;-\; F_k(x_n)\big\} \\
&=\; \frac{b-a}{N}\left(\sum_{n=1}^N \big\{F(x_{n-1}) \;-\; F(x_n)\big\} \;+\; \sum_{n=1}^N \big\{F(x_n) \;-\; F_k(x_n)\big\}\right) \\
&\leq\; \frac{(b-a)\,[F(a) - F(b)]}{N} \;+\; (b-a)\max_{1\leq n\leq N}\big\{F(x_n) \;-\; F_k(x_n)\big\}.
\end{aligned} \tag{VII.17}$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, dann wählen wir erst $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\frac{(b-a)\,[F(a) - F(b)]}{N} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}, \tag{VII.18}$$

und anschließend wählen wir $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\forall\, k \geq k_0 : \qquad (b-a) \max_{1 \leq n \leq N} \big\{ F(x_n) \;-\; F_k(x_n) \big\} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}. \tag{VII.19}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, k \geq k_0 : \qquad 0 \;\leq\; \overline{\int_a^b} F \;-\; \underline{\int_a^b} F_k \;\leq\; \varepsilon. \tag{VII.20}$$

Da $F_k \leq F$ auf $[a, b]$, folgt aus (VII.20) insbesondere, dass F auf $[a, b]$ Riemann-integrabel ist und dass

$$\int_a^b F(x)\, dx \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_a^b F_k(x)\, dx, \tag{VII.21}$$

für alle $0 < a < b < \infty$.

Existiert nun $\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty F_k(x)\, dx < \infty$, so folgt aus (VII.21), dass

$$\int_a^b F(x)\, dx \;\leq\; \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty F_k(x)\, dx, \tag{VII.22}$$

für alle $0 < a < b < \infty$, also

$$\int_0^\infty F(x)\, dx \;=\; \sup_{0<a<b<\infty} \int_a^b F(x)\, dx \;\leq\; \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty F_k(x)\, dx \;<\; \infty, \tag{VII.23}$$

und F ist auf $\mathbb{R}^+$ Riemann-integrabel. Ist umgekehrt F ist auf $\mathbb{R}^+$ Riemann-integrabel, so folgt sofort aus $F_k \nearrow F$, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty F_k(x)\, dx \;\leq\; \int_0^\infty F(x)\, dx \;<\; \infty \tag{VII.24}$$

und $\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty F_k(x)\, dx < \infty$. Aus (VII.23)–(VII.24) ergibt sich unmittelbar die Äquivalenz (i) und die Identität (ii). ☐

VII.2. Messbare Funktionen

Nach diesen vorbereitenden Lemmata über Riemann-Integrale monotoner Funktionen kommen wir nun zur Definition des Messbarkeitsbegriffs.

Definition VII.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ zwei Messräume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt **messbar** :⇔

$$\forall\, A' \in \mathfrak{A}' : \qquad f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}. \tag{VII.25}$$

Ist speziell $(\Omega', \mathfrak{A}') = (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}_1})$, wobei wir vereinbaren, dass $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $\overline{\mathfrak{B}_1} := \mathfrak{A}\big(\mathfrak{B}_1 \cup \big\{\{-\infty\}, \{\infty\}\big\}\big)$, so heißt eine messbare Abbildung $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ **reell-messbar**.

Wir werden in dieser Vorlesung nur *reell-messbare* Funktionen behandeln, es wird also stets $(\Omega', \mathfrak{A}') = (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}_1})$ sein. Das folgende, wichtige Lemma besagt, dass die Menge der reell-messbaren Funktionen unter abzählbaren Supremums- und Infimumsbildung, sowie den Limes Superior und Limes Inferior abgeschlossen ist.

Lemma VII.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge reell-messbarer Funktionen. Dann sind $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k$, $\limsup_k f_k$, $\liminf_k f_k$, und, falls für alle $\omega \in \Omega$ existent, auch $\lim_k f_k$ reell-messbar.

Beweis. Wir beweisen nur exemplarisch, dass $f := \sup_k f_k$ reell-messbar ist, und dazu schreiben wir $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega | f(\omega) \in A\} =: \{f(\omega) \in A\}$ u. s. w. Für $b \in \mathbb{R}$ ist

$$f^{-1}\big([-\infty, b) \big) \ = \ \big\{ \sup_k f_k(\omega) < b \big\} \ = \ \bigcap_{k=1}^{\infty} \big\{ f_k(\omega) < b \big\}. \tag{VII.26}$$

Da f_k reell-messbar ist, ist $\{f_k(\omega) < b\} \in \mathfrak{A}$. Weil $\mathfrak{A}$ unter Differenzbildung und abzählbarer Durchschnittsbildung abgeschlossen ist, ist also auch $f^{-1}\big([-\infty, b) \big) \in \mathfrak{A}$. Somit ist auch

$$f^{-1}\big([a, b) \big) \ = \ f^{-1}\big([-\infty, b) \big) \ \setminus \ f^{-1}\big([-\infty, a) \big) \ \in \ \mathfrak{A}, \tag{VII.27}$$

für alle $a < b$. Ebenso ist

$$f^{-1}\big(\{\infty\} \big) \ = \ f^{-1}\big([0, \infty] \big) \ \setminus \ \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\big([0, n) \big) \ \in \ \mathfrak{A}, \tag{VII.28}$$

und analog $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathfrak{A}$. Wir definieren nun

$$\mathfrak{C}_1 \ := \ \Big\{ A \in \mathfrak{P}(\overline{\mathbb{R}}) \ \Big| \ f^{-1}(A) \in \mathfrak{A} \Big\}, \tag{VII.29}$$

und erhalten also aus (VII.27) und (VII.28), dass

$$\mathfrak{Q}_1 \ \cup \ \big\{ \{\infty\} \, , \, \{-\infty\} \big\} \ \subseteq \ \mathfrak{C}_1. \tag{VII.30}$$

Weiterhin beobachten wir, dass $\mathfrak{C}_1$ eine Sigma-Algebra ist, weil dies auf $\mathfrak{A}$ zutrifft und das Urbild f^{-1} mit mengentheoretischen Operationen vertauscht. Da die halboffenen Intervalle $\mathfrak{Q}_1$ zusammen mit $\{\infty\}$ und $\{-\infty\}$ die Sigma-Algebra $\overline{\mathfrak{B}_1}$ erzeugen, folgt also $\overline{\mathfrak{B}_1} \subseteq \mathfrak{C}_1$. ☐

Die Klasse der reell-messbaren Funktionen ist genügend groß um alle erdenklichen Beispiele miteinzuschließen – auch die meisten “pathologischen” Beispiele, wie etwa die Dirichlet-Funktion. In der Tat ist die Konstruktion konkreter nicht-messbarer Funktionen genauso schwierig wie etwa die Konstruktion von Mengen in $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d)$.

Wir wollen nun das Integral für nichtnegative Funktionen eines Maßraums definieren.

Definition VII.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine reell-messbare Funktion. Für $\lambda > 0$ definieren wir die **Niveaumengen** von f durch

$$A(f, \lambda) \ := \ f^{-1}\big((\lambda, \infty] \big) \ = \ \big\{ \omega \in \Omega \ \big| \ f(\omega) > \lambda \big\}. \tag{VII.31}$$

Nach Definition VII.3 ist $A(f,\lambda) \in \mathfrak{A}$, und

$$F(f,\lambda) \;:=\; \mu\big(A(f,\lambda)\big) \;=\; \mu\big[f^{-1}\big((\lambda,\infty]\big)\big] \tag{VII.32}$$

definiert eine Abbildung $F(f,\,\cdot\,) : \mathbb{R}^+ \to [0,\infty]$.

Offensichtlich ist $F(f,\lambda)$ stets eine in λ monoton fallende Funktion, denn für $\lambda < \lambda'$ ist $(\lambda,\infty] \supseteq (\lambda',\infty]$, daher auch

$$A(f,\lambda) \;=\; f^{-1}\big((\lambda,\infty]\big) \;\supseteq\; f^{-1}\big((\lambda',\infty]\big) \;=\; A(f,\lambda'), \tag{VII.33}$$

und somit

$$F(f,\lambda) \;=\; \mu\big(A(f,\lambda)\big) \;\geq\; \mu\big(A(f,\lambda)\big) \;=\; F(f,\lambda'). \tag{VII.34}$$

Nach Lemma VII.1 ist dann $F(f,\cdot)$ auf $[a,b]$ Riemann-integrabel, falls $0 < a < b < \infty$ so gewählt sind, dass $F(f,a) < \infty$.

Definition VII.6. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum.

(i) Eine reell-messbare Funktion $f : \Omega \to [0,\infty]$ heißt (μ-)**integrabel**, falls $F(f,\cdot)$ auf $\mathbb{R}^+$ Riemann-integrabel ist. In diesem Fall heißt

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) \;:=\; \int_0^\infty F(f,\lambda)\, d\lambda \tag{VII.35}$$

Integral von f.

(ii) Eine reell-messbare Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt (μ-)**integrabel**, falls $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := \max\{-f, 0\}$ jeweils μ-integrabel sind. Das **Integral** von f ist dann definiert durch

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) \;:=\; \int_\Omega f_+(\omega)\, d\mu(\omega) \;-\; \int_\Omega f_-(\omega)\, d\mu(\omega). \tag{VII.36}$$

(iii) Eine komplexe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **messbar**, falls $\mathrm{Re}\{f\}$ und $\mathrm{Im}\{f\}$ jeweils reell-messbar sind. Sind darüber hinaus $\mathrm{Re}\{f\}$ und $\mathrm{Im}\{f\}$ jeweils μ-integrabel, so ist f (μ-)**integrabel**, und ihr **Integral** ist definiert durch

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) \;:=\; \int_\Omega \mathrm{Re}\{f(\omega)\}\, d\mu(\omega) \;+\; i \int_\Omega \mathrm{Im}\{f(\omega)\}\, d\mu(\omega). \tag{VII.37}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Sind $M \in \mathfrak{A}$ eine messbare Menge eines Maßraums $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ und

$$\mathbf{1}_M(\omega) \equiv \mathbf{1}[\omega \in M] := \begin{cases} 1 & \text{falls} \;\; \omega \in M, \\ 0 & \text{falls} \;\; \omega \notin M, \end{cases} \tag{VII.38}$$

so ist, für $\eta > 0$,

$$A(\mathbf{1}_M,\lambda) \;=\; \big\{\omega \in \Omega \,\big|\, \mathbf{1}_M(\omega) > \eta\big\} \;=\; \begin{cases} \emptyset, & \text{falls} \;\; \eta > 1, \\ M, & \text{falls} \;\; 0 < \eta \leq 1. \end{cases} \tag{VII.39}$$

Somit erhalten wir

$$F(\mathbf{1}_M, \lambda) \;=\; \mu(M) \cdot \mathbf{1}[0 < \eta \leq 1] \tag{VII.40}$$

und

$$\int_\Omega \mathbf{1}_M[\omega] \, d\mu(\omega) \;=\; \mu(\mathcal{M}). \tag{VII.41}$$

- Insbesondere folgt aus (VII.41), mit $M := \{\omega \in \Omega \,|\; f(\omega) > \lambda\}$, wobei $\lambda > 0$ und f messbar sind, dass

$$\int_\Omega \mathbf{1}[f(\omega) > \lambda] \, d\mu(\omega) \;=\; \mu\big(\{f(\omega) > \lambda\}\big) \;=\; F(f, \lambda). \tag{VII.42}$$

- Zur Rechtfertigung von (VII.35) dient folgende formale “Herleitung”, die eine nützliche *Merkhilfe* (aber auch nicht mehr als das) darstellt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty F(f, \lambda) \, d\lambda \;&=\; \int_0^\infty \left(\int_\Omega \mathbf{1}[f(\omega) > \lambda] \, d\mu(\omega) \right) d\lambda \\ &=\; \int_\Omega \left(\int_0^\infty \mathbf{1}[f(\omega) > \lambda] \, d\lambda \right) d\mu(\omega) \\ &=\; \int_\Omega \left(\int_0^{f(\omega)} d\lambda \right) d\mu(\omega) \;=\; \int_\Omega f(\omega) \, d\mu(\omega). \end{aligned} \tag{VII.43}$$

(Problematisch ist in (VII.43) die Vertauschung der Integrationen, d.h. die zweite Gleichung.)

VII.3. Die Konvergenzsätze

Der große Vorteil der Definition VII.6 liegt aber in der Mühelosigkeit, mit der wir mit ihrer Hilfe die *Konvergenzsätze* beweisen können. Das ist der Gegenstand der folgenden Untersuchungen. Dafür definieren wir noch zuvor den Begriff “fast überall”.

Definition VII.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Eigenschaft $\mathcal{E} : \Omega \to \{w, f\}$ (w = wahr, f = falsch) gilt μ-**fast überall** :⇔

$$\mathcal{E}^{-1}(f) \in \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mu\big(\mathcal{E}^{-1}(f)\big) \;=\; 0, \tag{VII.44}$$

d.h., die Menge, auf der $\mathcal{E}$ nicht gilt, hat Maß Null.

Wir kommen zum ersten Konvergenzsatz.

Satz VII.8 (Monotone Konvergenz)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_k)_{k=1}^\infty$ eine monoton steigende Folge nichtnegativer, μ-integrabler Funktionen, d.h., $f_k : \Omega \to [0, \infty]$, $f_k \leq f_{k+1}$, und

$\int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega) < \infty$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $f := \lim_k f_k = \sup_k f_k$ reell-messbar und genau dann μ-integrabel, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega) \;<\; \infty, \tag{VII.45}$$

und in diesem Fall gilt

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega). \tag{VII.46}$$

Beweis. Die Reell-Messbarkeit von f haben wir bereits in Lemma VII.4 bewiesen. Sei nun $\lambda > 0$. Aus der Monotonie von $(f_k)_{k=1}^\infty$ folgt sofort, dass $\{f_k > \lambda\} \subseteq \{f_{k+1} > \lambda\} \subseteq \{f > \lambda\}$. Sei andererseits $\omega \in \{f > \lambda\}$, was gleichwertig ist mit $\sup_k f_k(\omega) > \lambda$. Dann gibt es aber ein $k_0 \equiv k_0(\omega) \in \mathbb{N}$, so dass $f_{k_0}(\omega) > \lambda$, und damit $\omega \in \{f_{k_0} > \lambda\}$. Also ist

$$\bigcup_{k=1}^\infty \{f_k > \lambda\} \;\subseteq\; \{f > \lambda\} \;\subseteq\; \bigcup_{k=1}^\infty \{f_k > \lambda\}, \tag{VII.47}$$

und es muss tatsächlich Gleichheit überall in (VII.47) gelten. Schreiben wir nun

$$B_k \;:=\; \{f_k > \lambda\} \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \{f_j > \lambda\}, \tag{VII.48}$$

so ist $(B_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}$, und es gilt

$$F(f_k,\, \lambda) \;=\; \mu\Big(\{f_k > \lambda\}\Big) \;=\; \mu\Big(\bigcup_{j=1}^k B_j\Big), \tag{VII.49}$$

$$F(f,\, \lambda) \;=\; \mu\Big(\{f > \lambda\}\Big) \;=\; \mu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\Big). \tag{VII.50}$$

Somit folgt aus der Sigma-Additivität von μ, dass

$$F_k(\lambda) \;:=\; F(f_k,\, \lambda) \;=\; \sum_{j=1}^k \mu(B_j) \;\nearrow\; \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j) \;=\; F(f,\, \lambda) \;=:\; F(\lambda), \tag{VII.51}$$

für $k \to \infty$. Damit ist $(F_k)_{k=1}^\infty$ eine monoton steigende Folge nichtnegativer, monoton fallender Funktionen auf $\mathbb{R}^+$ mit punktweisen Limes $F = \lim_k F_k$. Im Fall, dass $F < \infty$ auf $\mathbb{R}^+$, folgt nun die Behauptung direkt aus Lemma VII.2. Gibt es umgekehrt ein $\lambda_0 > 0$, so dass $F(\lambda_0) = \infty$, so sind beide Seiten der behaupteten Gleichung (VII.46)) unendlich, und die Behauptung gilt trivialerweise. $\square$

Lemma VII.9 (Lemma von Fatou)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge nichtnegativer, μ-integrabler Funktionen, d.h., $f_k : \Omega \to [0, \infty]$ und $\int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega) < \infty$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist darüber hinaus $\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega) < \infty$, so ist $f := \liminf_k f_k$ reell-messbar, μ-integrabel, und es gilt

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega) \;\geq\; \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega). \tag{VII.52}$$

Beweis. Definieren wir $\tilde{f}_k(\omega) := \inf_{j\geq k} f_j(\omega)$, so ist $(\tilde{f}_k)_{k=1}^\infty$ eine monoton steigende Folge reell-messbarer Funktionen mit $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k(\omega) = \liminf_{k\to\infty} f_k(\omega) = f(\omega)$. Außerdem ist $\tilde{f}_k$ μ-integrabel, da $\tilde{f}_k \leq f_k$. Nach Satz VII.8 der monotonen Konvergenz gilt deshalb

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \tilde{f}_k(\omega)\, d\mu(\omega) = \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \tilde{f}_k(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega), \end{aligned} \tag{VII.53}$$

wobei letztere Ungleichung abermals aus $\tilde{f}_k \leq f_k$ folgt. □

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Sätze der Analysis, dem Satz über majorisierte Konvergenz[1].

Satz VII.10 (Majorisierte Konvergenz)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_k)_{k=1}^\infty$ eine punktweise, μ-fast überall konvergente Folge komplexer, μ-integrabler Funktionen, die durch eine μ-integrable Funktion $g : \Omega \to [0,\infty]$ majorisiert wird, d.h. $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(\omega) := \lim_k f_k(\omega) \in \mathbb{C}$, μ-fast überall, $|f_k| \leq g$, für alle $k \in \mathbb{N}$, und $\int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega) < \infty$. Setzen wir $f(\omega) := 0$, falls $f_k(\omega)$ divergiert, so ist f μ-integrabel, und es gilt

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega). \tag{VII.54}$$

Beweis. Es reicht, die Behauptung für nichtnegative f_k zu zeigen, denn wir können stets $f_k = (\mathrm{Re} f_k)_+ - (\mathrm{Re} f_k)_- + i(\mathrm{Im} f_k)_+ - i(\mathrm{Im} f_k)_-$ zerlegen, wobei jeder der vier Terme auf der rechten Seite aus einer nichtnegativen Funktion resultiert.

Sei also f_k nichtnegativ, konvergent, $f_k \to f$, μ-fast überall, und majorisiert durch g, d. h. $f_k \leq g$, und sei $f(\omega) := 0$, falls $f_k(\omega)$ divergiert. Wir wenden das Lemma von Fatou auf $(f_k)_{k=1}^\infty$ und $\underline{f} := \liminf_k f_k$ anwenden. (Wir bemerken, dass $\underline{f}(\omega) \in [0,\infty]$ für alle $\omega \in \Omega$ existiert.) Damit sind $\underline{f}$ und f integrabel, $f \leq \underline{f}$, und wir erhalten

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) \leq \int_\Omega \underline{f}(\omega)\, d\mu(\omega) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega). \tag{VII.55}$$

Anschließend können wir das Lemma von Fatou auf $(g - f_k)_{k=1}^\infty$ und $g - \bar{f} = \liminf_k (g - f_k) = g - \limsup_k f_k$ anwenden, da $g - f_k$ dieselben Voraussetzungen wie f_k erfüllt. Beachten wir noch die Linearität (VII.64) des Integrals (für deren Beweis wir zwar den Satz VII.8 über die monotone Konvergenz brauchen, aber nicht die hier zu beweisende majorisierte Konvergenz), so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\Omega \bar{f}(\omega)\, d\mu(\omega) &= \int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega) - \int_\Omega \big\{g(\omega) - \bar{f}(\omega)\big\}\, d\mu(\omega) \\ &\geq \int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega) - \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \big\{g(\omega) - f_k(\omega)\big\}\, d\mu(\omega) \\ &= \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega). \end{aligned} \tag{VII.56}$$

[1] engl.: dominated convergence

Da f_k μ-fast überall konvergiert, stimmen f und $\bar{f}$ bis auf eine Menge vom Maß Null überein, d.h. für alle $\lambda > 0$ gilt

$$\mu\Big[\big\{\omega \in \Omega \big|\, f(\omega) > \lambda\big\}\Big] \;=\; \mu\Big[\big\{\omega \in \Omega \big|\, \bar{f}(\omega) > \lambda\big\}\Big], \tag{VII.57}$$

und nach der Definition des Integrals ist daher auch

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) \;=\; \int_\Omega \bar{f}(\omega)\, d\mu(\omega). \tag{VII.58}$$

Somit müssen $\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega)$ und $\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega)$ mit $\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)$ übereinstimmen. Dies impliziert aber die Konvergenz von $\int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega)$ gegen $\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)$. □

VII.4. Eigenschaften des Integrals

Es gibt verschiedene Wege zur Einführung des Integrals $\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)$ einer reel-messbaren Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, der hier vorgestellte folgt [2]. Ein anderer Weg zum Integral führt über *Treppenfunktionen*, d.h. Funktionen, die auf Ω nur endlich viele Werte annehmen. Das folgende Lemma zeigt, dass sich in der Tat jede (nichtnegative) messbare Funktion als (monotoner) Limes von Treppenfunktionen darstellen lässt.

Lemma VII.11. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ reell-messbar. Dann gibt es eine Folge $(f_L)_{L=1}^\infty$ reell-messbarer Funktionen $f_L : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Zu jedem $L \in \mathbb{N}$ gibt es nichtnegative Zahlen $\alpha_L^{(1)}, \alpha_L^{(2)}, \ldots, \alpha_L^{(2^{2L})} \in \mathbb{R}_0^+$ und paarweise disjunkte Mengen $A_L^{(1)}, A_L^{(2)}, \ldots, A_L^{(2^{2L})} \in \mathfrak{A}$, so dass

$$f_L \;=\; \alpha_L^{(1)}\, \mathbf{1}_{A_L^{(1)}} \;+\; \alpha_L^{(2)}\, \mathbf{1}_{A_L^{(2)}} \;+\; \ldots \;+\; \alpha_L^{(2^{2L})}\, \mathbf{1}_{A_L^{(2^{2L})}}. \tag{VII.59}$$

Funktionen dieser Form heißen **Treppenfunktionen**.

(ii) Für alle $\omega \in \Omega$ gilt $f_L(\omega) \leq f_{L+1}(\omega) \nearrow f(\omega)$, im Limes $L \to \infty$.

Beweis. Für $L \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$f_L(\omega) \;:=\; \left(\sum_{\ell=1}^{2^{2L}} \left(\frac{\ell - 1}{2^L}\right) \cdot \mathbf{1}\left[\frac{\ell-1}{2^L} \leq f(\omega) < \frac{\ell}{2^L}\right]\right) + 2^L \cdot \mathbf{1}\big[f(\omega) \geq 2^L\big]. \tag{VII.60}$$

Dann ist f_L offensichtlich eine Treppenfunktion und es gilt $f_L \leq f$.

Seien $\omega \in \Omega$ so, dass $f(\omega) < \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \{0, 1\}$ so, dass $2^{-L-1}(2k - \tau - 1) \leq f(\omega) < 2^{-L-1}(2k - \tau)$. Dann ist $f(\omega) < 2^{-L}k$ und somit

$$f_L(\omega) \;\leq\; \frac{k-1}{2^L} \;\leq\; \frac{k - \frac{1}{2}(1+\tau)}{2^L} \;=\; \frac{2k - \tau - 1}{2^{L+1}} \;=\; f_{L+1}(\omega). \tag{VII.61}$$

Da offensichtlich $f_L(\omega) = 2^L \le 2^{L+1} = f_{L+1}(\omega)$ gilt, falls $f(\omega) = \infty$, folgt, dass

$$f_L \;\le\; f_{L+1}. \tag{VII.62}$$

Ist $f(\omega) = \infty$, so ist $f_L(\omega) = 2^L \nearrow \infty$, für $L \to \infty$. Ist hingegen $f(\omega) < \infty$, so gilt für $L > \log_2[f(\omega)]$, dass

$$f_L(\omega) \;\le\; f(\omega) \;<\; f_L(\omega) + 2^{-L}, \tag{VII.63}$$

und somit gilt auch in diesem Fall $f_L(\omega) \nearrow f(\omega)$. □

Satz VII.12. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(i) Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, dann ist auch $|f| : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ reell-messbar. $f$ist genau dann μ-integrabel, wenn $|f|$ μ-integrabel ist.

(ii) Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ μ-integrabel und $\alpha \in \mathbb{C}$, so ist auch $f + \alpha g : \Omega \to \mathbb{C}$ μ-integrabel, und es gilt

$$\int_\Omega \big(f + \alpha g\big)(\omega)\, d\mu(\omega) \;=\; \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) + \alpha \int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega). \tag{VII.64}$$

Beweis. Wir beweisen nur (ii) und auch dies nur für $\alpha = 1$ und für $f, g : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$. Dazu beweisen wir (ii) zunächst für zwei Treppenfunktionen

$$\tilde{f} \;:=\; \sum_{i=1}^M \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \qquad \tilde{g} \;:=\; \sum_{j=1}^N \beta_j \mathbf{1}_{B_j}, \tag{VII.65}$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_M, \beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}^+$ und $A_1, \ldots, A_M,\; B_1, \ldots, B_N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A_i),\; \mu(B_j) < \infty$ und $A_k \cap A_\ell = B_k \cap B_\ell = \emptyset$, für $k \neq \ell$. Setzen wir

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_1^M,\; j \in \mathbb{N}_1^N : \qquad \alpha_{i,j} := \alpha_i,\;\; \beta_{i,j} := \beta_j \tag{VII.66}$$

und $C_{ij} := A_i \cap B_j$, so sind auch die Mengen $C_{ij} \in \mathfrak{A}$ paarweise disjunkt, und es gelten

$$\tilde{f} \;=\; \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \mathbf{1}_{C_{ij}}, \qquad \tilde{g} \;=\; \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} \mathbf{1}_{C_{ij}}, \tag{VII.67}$$

und

$$\tilde{f} + \tilde{g} \;=\; \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \big(\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}\big)\, \mathbf{1}_{C_{ij}}. \tag{VII.68}$$

Beachte nun, dass

$$\begin{aligned} \mu\Big(\{\omega \in \Omega \mid \tilde{f}(\omega) > \lambda\}\Big) \;&=\; \mu\bigg(\Big\{\omega \in \Omega \;\Big|\; \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \mathbf{1}_{C_{ij}}(\omega) > \lambda\Big\}\bigg) \\ &=\; \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \mathbf{1}\big[\alpha_{i,j} > \lambda\big] \cdot \mu(C_{ij}). \end{aligned} \tag{VII.69}$$

Also ist

$$\int_\Omega \tilde{f}(\omega)\, d\mu = \int_0^\infty \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \mu(C_{ij}) \mathbf{1}[\alpha_{i,j} > \lambda]\, d\lambda$$
$$= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \mu(C_{ij}) \left(\int_0^{\alpha_{i,j}} d\lambda \right) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \cdot \mu(C_{ij}). \qquad \text{(VII.70)}$$

Genauso folgen

$$\int_\Omega \tilde{g}(\omega)\, d\mu(\omega) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \beta_{i,j}\, \mu(C_{ij}), \qquad \text{(VII.71)}$$

$$\int_\Omega \big(\tilde{f} + \tilde{g}\big)(\omega)\, d\mu(\omega) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \big(\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}\big)\, \mu(C_{ij}), \qquad \text{(VII.72)}$$

und daher auch

$$\int_\Omega \big(\tilde{f} + \tilde{g}\big)(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega \tilde{f}(\omega)\, d\mu(\omega) + \int_\Omega \tilde{g}(\omega)\, d\mu(\omega). \qquad \text{(VII.73)}$$

Sind nun $f, g : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ beliebige, μ-integrable Funktionen, so gibt es gemäß Lemma VII.11 Folgen $(f_L)_{L=1}^\infty$ und $(g_L)_{L=1}^\infty$ von Treppenfunktionen mit $f_L \nearrow f$ und $g_L \nearrow g$, μ-fast überall. Nach dem Satz über monotone Konvergenz und mit (VII.73) folgt somit, dass

$$\int_\Omega (f+g)(\omega)\, d\mu(\omega) = \lim_{L\to\infty} \left\{ \int_\Omega (f_L + g_L)(\omega)\, d\mu(\omega) \right\}$$
$$= \lim_{L\to\infty} \left\{ \int_\Omega f_L(\omega)\, d\mu(\omega) + \int_\Omega g_L(\omega)\, d\mu(\omega) \right\}$$
$$= \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) + \int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega). \qquad \text{(VII.74)}$$

□

Der nun folgende Satz zeigt, dass das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}$ wirklich eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals ist.

Satz VII.13. Ist $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_0^+)$ eine nichtnegative Riemann-integrable Funktion, so gibt es eine reell-messbare und Lebesgue-integrable Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, die μ_1-fast überall mit f auf $\mathbb{R}$ übereinstimmt und für die gilt, dass

$$\underbrace{\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx}_{textRiemann-Integral} = \underbrace{\int_\mathbb{R} \tilde{f}(x)\, d\mu_1(x)}_{textLebesgue-Integral} . \qquad \text{(VII.75)}$$

Beweis. Wir beweisen Satz VII.13 nur für den Fall, dass $\mathrm{supp}(f) \subseteq (a,b)$, für geeignete $-\infty < a < b < \infty$ gilt, d.h. dass $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Partition $\widehat{P}_k \in \mathcal{P}[a,b]$ von (a,b), so dass

$$\overline{I}\big(f, \widehat{P}_k\big) - \underline{I}\big(f, \widehat{P}_k\big) \;\leq\; \frac{1}{k}. \tag{VII.76}$$

Setzen wir $P_k := \widehat{P}_1 \cup \widehat{P}_2 \cup \cdots \cup \widehat{P}_k$, so gilt

$$\overline{I}(f, P_k) - \underline{I}(f, P_k) \;\leq\; \frac{1}{k} \qquad \text{und} \qquad P_k \subseteq P_{k+1}, \tag{VII.77}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$. Wir schreiben nun $P_k =: \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_L < x_{L+1} = b\}$ und bilden nun zwei Funktionenfolgen auf $[a,b)$ durch

$$\tilde{f}_k \;:=\; \textstyle\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell \, \mathbf{1}_{Q_\ell}, \qquad \bar{f}_k \;:=\; \textstyle\sum_{\ell=1}^{L} \beta_\ell \, \mathbf{1}_{Q_\ell}, \tag{VII.78}$$

$$\alpha_\ell \;:=\; \min_{x_{\ell-1} \leq x \leq x_\ell} \{f(x)\}, \qquad \beta_\ell \;:=\; \max_{x_{\ell-1} \leq x \leq x_\ell} \{f(x)\}, \qquad Q_\ell \;:=\; [x_{\ell-1}, x_\ell).$$

Offensichtlich sind $\tilde{f}_k$ und $\bar{f}_k$ Treppenfunktionen, für die nach (VII.70) Lebesgue-Integral und Riemann-Integral übereinstimmen; genauer gelten sogar

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_k(x)\, d\mu_1(x) \;=\; \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell \, \mu_1(Q_\ell) \;=\; \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell \, (x_\ell - x_{\ell-1}) \;=\; \underline{I}\big(f, P_k\big), \tag{VII.79}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{f}_k(x)\, d\mu_1(x) \;=\; \sum_{\ell=1}^{L} \beta_\ell \, \mu_1(Q_\ell) \;=\; \sum_{\ell=1}^{L} \beta_\ell \, (x_\ell - x_{\ell-1}) \;=\; \overline{I}\big(f, P_k\big). \tag{VII.80}$$

Weiterhin sind

$$\tilde{f}(x) \;:=\; \lim_{k\to\infty} \underline{f}_k(x) \;=\; \sup_k \underline{f}_k(x) \;\leq\; f(x), \tag{VII.81}$$

$$\bar{f}(x) \;:=\; \lim_{k\to\infty} \bar{f}_k(x) \;=\; \inf_k \bar{f}_k(x) \;\geq\; f(x), \tag{VII.82}$$

für alle $x \in [a,b)$. Nach Lemma VII.4 sind $\tilde{f}$ und $\bar{f}$ auf $\mathbb{R}$ reell-messbar, und der Satz über monotone Konvergenz sowie (VII.76) und (VII.79) implizieren, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)\, d\mu_1(x) \;=\; \lim_{k\to\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_k(x)\, d\mu_1(x) \right\} \;=\; \lim_{k\to\infty} \underline{I}\big(f, P_k\big) \;=\; \int_a^b f(x)\, dx, \tag{VII.83}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)\, d\mu_1(x) \;=\; \lim_{k\to\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \bar{f}_k(x)\, d\mu_1(x) \right\} \;=\; \lim_{k\to\infty} \overline{I}\big(f, P_k\big) \;=\; \int_a^b f(x)\, dx. \tag{VII.84}$$

Insbesondere ist

$$\int_{\mathbb{R}} \big\{ \bar{f}(x) - \tilde{f}(x) \big\}\, d\mu_1(x) \;=\; 0, \tag{VII.85}$$

was wegen $\bar{f} - \tilde{f} \geq 0$ auch $\bar{f} = \tilde{f}$ fast überall nach sich zieht. Da $\tilde{f} \leq f \leq \bar{f}$, gilt somit auch $f = \tilde{f}$ fast überall. □