VI. Grundzüge der Maßtheorie

VI.1. Ringe und Figuren

Definition VI.1. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{P}(\Omega) := \{A : A \subseteq \Omega\}$ ihre Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt **Ring** :$\Leftrightarrow$

$$\emptyset \in \mathfrak{R}, \tag{VI.1}$$
$$A, B \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathfrak{R}, \tag{VI.2}$$
$$A, B \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathfrak{R}. \tag{VI.3}$$

Wir bemerken, dass aus (VI.2) mit $A, B \in \mathfrak{R}$ auch

$$\begin{aligned} A \cap B &= \big\{\omega \in A \big| \omega \in B\big\} = \big\{\omega \in A \big| \, \omega \notin (A \setminus B)\big\} \\ &= A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{R}. \end{aligned} \tag{VI.4}$$

Damit folgt, dass ein Ring mit endlich vielen Mengen auch deren Vereinigung und Durchschnitt enthält,

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j \, , \, \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{R}. \tag{VI.5}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die leere Menge bildet einen Ring, $\mathfrak{R} = \{\emptyset\}$.
- Ebenso erhält man einen Ring, wenn man noch die volle Menge hinzufügt, $\mathfrak{R}' = \{\emptyset, \Omega\}$.
- Natürlich ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ selbst ein Ring.
- Für das nächste Beispiel erinnern wir an die Halbordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}^d$, die für $a, b \in \mathbb{R}^d$ gegeben ist durch
$$a \leq b \ :\Leftrightarrow \quad a_1 \leq b_1, \ a_2 \leq b_2, \ldots, a_d \leq b_d. \tag{VI.6}$$

Definition VI.2. Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $d \geq 1$. Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$ heißt

$$[a \, , \, b) \ := \ [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_d, b_d) \tag{VI.7}$$

(nach rechts halboffener) **Quader**. Die Menge aller Quader bezeichnen wir mit $\mathfrak{Q}_d$. Die Vereinigung endlich vieler Quader sammeln wir im System der **Figuren**,

$$\mathfrak{F}_d \;:=\; \big\{q_1 \cup \cdots \cup q_N \;\big|\; q_1, q_2, \ldots, q_N \in \mathfrak{Q}_d,\ N < \infty\big\}. \tag{VI.8}$$

Lemma VI.3. $\mathfrak{F}_d$ ist ein Ring.

Beweis. Offensichtlich gelten (VI.1) und (VI.3) trivialerweise, und die einzig nachzuweisende Eigenschaft ist (VI.2).
Dazu zeigen wir zunächst, dass die Differenz zweier Quader eine Figur ist. Seien $a, b, a', b' \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$ und $a' \leq b'$. Wir zeigen, dass $[a, b) \setminus [a', b') \in \mathfrak{F}_d$. Dazu ordnen wir die Koordinaten $a_\nu, b_\nu, a'_\nu, b'_\nu$ nach der Größe, d. h., für alle $\nu = 1, 2, \ldots, d$, definieren wir $-\infty < x_\nu^{(1)} < \ldots < x_\nu^{(k_\nu)} < \infty$, durch $\{x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(4)}\} = \{a_\nu, b_\nu, a'_\nu, b'_\nu\}$, wobei $1 \leq k_\nu \leq 4$, je nachdem, wie viele Koordinaten doppelt auftreten. Anschließend setzen wir

$$\mathcal{K} \;:=\; \{1, \ldots, k_1 - 1\} \times \{1, \ldots, k_2 - 1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, k_d - 1\} \tag{VI.9}$$

und, für $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathcal{K}$,

$$q_\xi \;:=\; [x_1^{(\xi_1)}, x_1^{(\xi_1+1)}) \times [x_2^{(\xi_2)}, x_2^{(\xi_2+1)}) \times \cdots \times [x_1^{(\xi_d)}, x_1^{(\xi_d+1)}). \tag{VI.10}$$

Für $\xi \neq \xi'$ gilt offensichtlich $q_\xi \cap q_{\xi'} = \emptyset$. Außerdem sind

$$[a, b) \;=\; \bigcup_{\xi \in \mathcal{K}:\ q_\xi \cap [a,b) \neq \emptyset} q_\xi, \qquad [a', b') \;=\; \bigcup_{\xi \in \mathcal{K}:\ q_\xi \cap [a',b') \neq \emptyset} q_\xi, \tag{VI.11}$$

und insbesondere ist die Differenz der Quader $[a, b)$ und $[a', b')$ eine Figur,

$$[a, b) \setminus [a', b') \;=\; \bigcup_{\xi \in \mathcal{K}:\ q_\xi \cap ([a,b) \setminus [a',b')) \neq \emptyset} q_\xi \;\in\; \mathfrak{F}_d. \tag{VI.12}$$

Seien nun $\hat{f} \in \mathfrak{F}_d$ eine Figur und $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_M \in \mathfrak{Q}_d$ so, dass $\hat{f} = \bigcup_{i=1}^M \hat{q}_i$.
Sei weiterhin $q \in \mathfrak{Q}_d$. Nach (VI.12) und (VI.3) ist dann

$$\hat{f} \setminus q \;=\; \Big(\bigcup_{i=1}^M \hat{q}_i\Big) \setminus q \;=\; \bigcup_{i=1}^M \big(\hat{q}_i \setminus q\big) \;\in\; \mathfrak{F}_d, \tag{VI.13}$$

d.h., die Differenz einer Figur und eines Quaders ist eine Figur. Sind nun $f \in \mathfrak{F}_d$ eine Figur und $q_1, \ldots, q_N \in \mathfrak{Q}_d$ so, dass $f = \bigcup_{j=1}^N q_j$, dann ist nach (VI.13) auch

$$\hat{f} \setminus f \;=\; \hat{f} \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^N q_j\Big) \;=\; \big(\cdots(\hat{f} \setminus q_1) \setminus q_2\big) \setminus \cdots \setminus q_N \;\in\; \mathfrak{F}_d. \tag{VI.14}$$

$\square$

Mit einer Partition analog zur Konstruktion der Quader q_ξ in (VI.10) kann man zeigen, dass sich jede Figur als endliche Vereinigung *disjunkter* Quader schreiben lässt.

Lemma VI.4.

$$\mathfrak{F}_d \;=\; \big\{ q_1 \cup \cdots \cup q_N \;\big|\; q_1, q_2, \ldots, q_N \in \mathfrak{Q}_d,\; N < \infty, \quad \forall\, i < j : \quad q_i \cap q_j = \emptyset \big\}, \tag{VI.15}$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Wir kommen nun zum Begriff des (Raum-)Inhalts.

Definition VI.5. Sei $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **Inhalt** (auf $\mathfrak{R}$) :⇔

(i) $$\mu(\emptyset) \;=\; 0.$$

(ii) Sind $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathfrak{R}$ paarweise disjunkt, so ist μ **additiv**,

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i \Big) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i). \tag{VI.16}$$

Ist $\mu(A) < \infty$, für alle $A \in \mathfrak{R}$, so bezeichnen wir den Inhalt μ als **endlich**.

Das wichtigste Beispiel für Definition VI.5 in unserem Zusammenhang ist das übliche, $d-$dimensionale Volumen: Für $a, b \in \mathbb{R}^d$, mit $a \leq b$, ist $[a, b) \in \mathfrak{Q}_d$ ein Quader mit Volumen

$$\mu_d\big(\, [a, b) \, \big) \;:=\; \prod_{\nu=1}^{d} (b_\nu - a_\nu). \tag{VI.17}$$

Sind weiterhin $q_1, q_2, \ldots, q_N \in \mathfrak{Q}_d$ paarweise disjunkte Quader, so setzen wir

$$\mu_d\Big(\bigcup_{i=1}^{N} q_i \Big) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \mu_d(q_i). \tag{VI.18}$$

Nach Lemma VI.4 ist jede Figur darstellbar in eine endliche Vereinigung disjunkter Quader, und insofern lässt sich jeder Figur durch (VI.18) ein Volumen zuordnen.

Lemma VI.6. μ_d ist ein Inhalt auf $\mathfrak{F}_d$.

Beweis. Definition VI.5(i) und (ii) gelten trivialerweise, falls die Wohldefiniertheit von $\mu_d : \mathfrak{F}_d \to [0, \infty]$ gesichert ist. Dazu ist zu bemerken, dass die Zerlegung einer Figur in disjunkte Quader keineswegs eindeutig ist. Sind $q_1, \ldots, q_M \in \mathfrak{Q}_d$ und $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_N \in \mathfrak{Q}_d$ jeweils paarweise disjunkt, ergeben aber in der Vereinigung dieselbe Menge,

$$\bigcup_{i=1}^{M} q_i \;=\; \bigcup_{j=1}^{N} \hat{q}_j, \tag{VI.19}$$

so bleibt zu zeigen, dass auch die zugeordneten Volumina gleich sind,

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_d(q_i) \;=\; \mu_d\Big(\bigcup_{i=1}^{M} q_i \Big) \;=\; \mu_d\Big(\bigcup_{j=1}^{N} \hat{q}_j \Big) \;=\; \sum_{j=1}^{N} \mu_d(\hat{q}_j). \tag{VI.20}$$

Dafür bemerken wir, dass $\tilde{q}_{ij} := q_i \cap \hat{q}_j \in \mathfrak{Q}_d$ eine Familie disjunkter Quader definiert, und dass

$$q_i \;=\; \bigcup_{j=1}^{N} \tilde{q}_{ij} \quad \text{und} \quad \hat{q}_j \;=\; \bigcup_{i=1}^{M} \tilde{q}_{ij} \tag{VI.21}$$

für alle $i = 1, \ldots, M$ und alle $j = 1, \ldots, N$ gilt. Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M} \mu_d(q_i) \;&=\; \sum_{i=1}^{M} \mu_d\Big(\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{q}_{ij} \Big) \;=\; \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \mu_d(\tilde{q}_{ij}) \\ &=\; \sum_{j=1}^{N} \mu_d\Big(\bigcup_{i=1}^{M} \tilde{q}_{ij} \Big) \;=\; \sum_{j=1}^{N} \mu_d(\hat{q}_j), \end{aligned} \tag{VI.22}$$

und μ_d ist auf den Figuren wohldefiniert. □

VI.2. Prämaße

In den folgenden Betrachtungen gehen wir von endlichen Vereinigungen $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_L$ von Mengen $A_n \in \mathfrak{R}$ in einem Ring $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ zu abzählbar unendliche Vereinigungen $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ solcher Mengen über. Um dies zu beschreiben, führen wir noch etwas Notation ein:

Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{R}$.

- Dann heißt $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ **aufsteigend**, falls $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- und $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt **absteigend**, falls $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Wir schreiben $\boldsymbol{A_n \nearrow A}$, falls $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ aufsteigend ist und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ gilt
- und $\boldsymbol{A_n \searrow A}$, falls $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ absteigend ist und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ gilt.

Definition VI.7. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **Prämaß** (auf $\mathfrak{R}$) :⇔

(i) $$\mu(\emptyset) \;=\; 0.$$

(ii) Die Abbildung μ ist **Sigma-additiv**, d. h., ist $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{R}$, so dass auch ihre Vereinigung in $\mathfrak{R}$ liegt, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{VI.23}$$

Gibt es außerdem eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $A_n \nearrow \Omega$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, so heißt das Prämaß μ **Sigma-endlich**.

Wir sehen, dass jedes Prämaß auf $\mathfrak{R}$ auch einen Inhalt auf $\mathfrak{R}$ definiert. Um Bedingungen für die Umkehrung dieser Aussage zu formulieren, führen wir noch den Begriff der $\emptyset$-Stetigkeit ein.

Definition VI.8. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring. Ein Inhalt $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **$\emptyset$-stetig**, falls für jede absteigende Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\mu(A_1) < \infty$ und $A_n \searrow \emptyset$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \; = \; 0. \tag{VI.24}$$

Das folgende Lemma besagt, dass unter der Bedingung der $\emptyset$-Stetigkeit endliche Inhalte auch Prämaße sind.

Lemma VI.9. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Ist μ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$, so ist μ ist $\emptyset$-stetig.

(ii) Ist der Inhalt μ endlich und $\emptyset$-stetig, so ist μ auch ein Prämaß.

Beweis. (i): Sei $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ eine absteigende Folge in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(B_1) < \infty$ und $B_n \searrow \emptyset$. Bilden wir $A_n := B_n \setminus B_{n+1}$, so ist $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{R}$, und B_1 lässt sich als disjunkte Vereinigung für alle $N \in \mathbb{N}$ wie folgt darstellen,

$$B_1 \; = \; \bigcup_{n=1}^{N} A_n \, \cup \, B_{N+1} \; = \; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{VI.25}$$

Weil μ ein Prämaß ist, folgt daraus, dass

$$\mu(B_1) \; = \; \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \Big) \; + \; \mu(B_{N+1}) \; = \; \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \; + \; \mu(B_{N+1}) \quad \text{und} \tag{VI.26}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \; = \; \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \; = \; \mu(B_1) \; < \; \infty\,. \tag{VI.27}$$

Insbesondere ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ konvergent, und deshalb muss

$$\mu(B_{N+1}) \; = \; \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n) \; \to \; 0 \tag{VI.28}$$

konvergieren, für $N \to \infty$.

(ii): Sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{R}$, so dass auch $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$. Setzen wir $\widetilde{B}_N := \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ und $B_N := \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$, so sind $\widetilde{B}_N$ und B_N disjunkt und $A = \widetilde{B}_N \cup B_N$. Offensichtlich sind $\widetilde{B}_N \in \mathfrak{R}$ und somit auch $B_N = A \setminus \widetilde{B}_N \in \mathfrak{R}$. Da μ ein endlicher Inhalt ist, sind

$$\mu(A)\,, \; \mu(B_N)\,, \; \mu(\widetilde{B}_N) \; < \; \infty \tag{VI.29}$$

endlich, und die Disjunktheit von $\widetilde{B}_N$ und B_N impliziert, dass $\mu(A) = \mu(\widetilde{B}_N) + \mu(B_N)$ bzw.

$$\forall\, N \in \mathbb{N} : \qquad \mu(B_N) \; = \; \mu(A) \; - \; \mu(\widetilde{B}_N). \tag{VI.30}$$

Außerdem impliziert die Disjunktheit der Mengen A_n, dass $B_N \searrow \emptyset$, für $N \to \infty$, denn zu jedem $x \in A$ gibt es genau ein $n(x) \in \mathbb{N}$, so dass $x \in A_{n(x)}$, und somit ist $x \notin B_N$, für alle $N > n(x)$. Aus der $\emptyset$-Stetigkeit und (VI.30) folgt deshalb

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ \lim_{N\to\infty} \mu(B_N) \ = \ \lim_{N\to\infty} \mu(A \setminus \widetilde{B}_N) \\ &= \ \mu(A) \ - \ \lim_{N\to\infty} \mu(\widetilde{B}_N) \ = \ \mu(A) \ - \ \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \Big) \\ &= \ \mu(A) \ - \ \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \ = \ \mu(A) \ - \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \end{aligned} \tag{VI.31}$$

was gerade die Sigma-Additivität ergibt. □

In dem nun folgenden Satz verwenden wir folgende elementare Identität,

Lemma VI.10. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring, $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt und $A, B \in \mathfrak{R}$. Dann gilt

$$\mu(A \cup B) \ + \ \mu(A \cap B) \ = \ \mu(A) \ + \ \mu(B). \tag{VI.32}$$

Beweis. Wir beobachten, dass in

$$A \cup B \ = \ A \ \cup \ (B \setminus A) \quad \text{und} \quad B \ = \ (A \cap B) \ \cup \ (B \setminus A) \tag{VI.33}$$

auf den rechten Seiten jeweils zwei disjunkte Mengen vereinigt sind. Aus der Additivität des Inhalts folgt damit

$$\mu(A \cup B) \ - \ \mu(A) \ = \ \mu(B \setminus A) \ = \ \mu(B) \ - \ \mu(A \cap B), \tag{VI.34}$$

woraus sich sofort Glg. (VI.32) ergibt. □

Satz VI.11. μ_d ist ein σ-endliches Prämaß auf $\mathfrak{F}_d$.

Beweis. Da wir in Lemma VI.6 bereits gezeigt haben, dass μ_d einen (offensichtlich endlichen) Inhalt auf $\mathfrak{F}_d$ definiert, bleibt nach Lemma VI.9 nur die $\emptyset$-Stetigkeit und die σ-Endlichkeit von μ_d zu zeigen.

Die σ-Endlichkeit ist aber trivial richtig, da mit $Q_n := [-n, n)^d \in \mathfrak{Q}_d$ eine aufsteigende Folge $(Q_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{F}_d^{\mathbb{N}}$ mit $\mu_d(Q_n) = (2n)^d < \infty$ und $Q_n \nearrow \mathbb{R}^d$ definiert wird.

Für den Beweis der $\emptyset$-Stetigkeit von μ_d sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge in $\mathfrak{F}_d$, d.h. $A_n \supseteq A_{n+1}$. Es reicht zu zeigen, dass

$$\delta \ := \ \lim_{n\to\infty} \mu_d(A_n) \ = \ \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu_d(A_n) \ > \ 0, \tag{VI.35}$$

die Aussage

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \ \neq \ \emptyset \tag{VI.36}$$

impliziert, wobei wir o. B. d. A. $\delta \leq 1$ annehmen können. Wir fixieren nun $n \in \mathbb{N}$ und wählen nichtleere, disjunkte Quader $q^{(1)}, \ldots, q^{(L)}$ in $\mathfrak{Q}_d$ so, dass

$$A_n \;=\; \bigcup_{\ell=1}^{L} q^{(\ell)}, \tag{VI.37}$$

wobei $q^{(\ell)} = x^{(\ell)} + [-\varepsilon^{(\ell)}, \varepsilon^{(\ell)})$, für geeignete $x^{(\ell)} \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon^{(\ell)} \in (\mathbb{R}^+)^d$. Anschließend definieren wir etwas kleinere Quader

$$\hat{q}^{(\ell)} \;:=\; x^{(\ell)} \;+\; \left(1 - \frac{\delta\, 2^{-n-1-\ell}}{1 + \mu_d(q^{(\ell)})}\right)^{1/d} \big[- \varepsilon^{(\ell)} \;,\; \varepsilon^{(\ell)} \big) \;\in\; \mathfrak{Q}_d \tag{VI.38}$$

und setzen

$$B_n \;:=\; \bigcup_{\ell=1}^{L} \hat{q}^{(\ell)}. \tag{VI.39}$$

Wir beobachten, dass der Abschluss von B_n kompakt ist und dass

$$\overline{B_n} \;=\; \bigcup_{\ell=1}^{L} \overline{\hat{q}^{(\ell)}} \;\subseteq\; A_n\,. \tag{VI.40}$$

Weiterhin beobachten wir, dass

$$\begin{aligned}
\mu_d(A_n) \;-\; \mu_d(B_n) \;&=\; \sum_{\ell=1}^{L} \left\{ \mu_d(q^{(\ell)}) \;-\; \left(1 - \frac{\delta\, 2^{-n-1-\ell}}{1 + \mu_d(q^{(\ell)})}\right) \mu_d(q^{(\ell)}) \right\} \\
&=\; \sum_{\ell=1}^{L} \delta\, 2^{-n-1-\ell} \left(\frac{\mu_d(q^{(\ell)})}{1 + \mu_d(q^{(\ell)})} \right) \\
&\leq\; \sum_{\ell=1}^{L} \delta\, 2^{-n-1-\ell} \;\;\leq\;\; \delta\, 2^{-n-1}\,.
\end{aligned} \tag{VI.41}$$

Der Inhalt von $B_n \subseteq \overline{B_n} \subseteq A_n$ ist also nur geringfügig kleiner als der von A_n. Allerdings ist nun unklar, ob auch $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ wie $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton absteigende Folge von Figuren ist. Um dies sicherzustellen, definieren wir im nächsten Schritt eine weitere Folge $(C_N)_{N=1}^{\infty} \in \mathfrak{F}_d^{\mathbb{N}}$ von Figuren durch

$$C_N \;:=\; \bigcap_{n=1}^{N} B_n \;=\; C_{N-1} \cap B_N \;\subseteq\; C_{N-1}\,. \tag{VI.42}$$

Offenbar ist $(C_N)_{N=1}^{\infty}$ monoton absteigend und mit (VI.32) ergibt sich aus (VI.42), dass

$$\mu_d(C_N) \;=\; \mu_d(C_{N-1} \cap B_N) \;=\; \mu_d(C_{N-1}) \;+\; \mu_d(B_N) \;-\; \mu_d(C_{N-1} \cup B_N). \tag{VI.43}$$

Nun ist $C_{N-1} \subseteq B_{N-1} \subseteq A_{N-1}$ und auch $B_N \subseteq A_N \subseteq A_{N-1}$, also $C_{N-1} \cup B_N \subseteq A_{N-1}$. Setzen wir dies und (VI.41) in (VI.43) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mu_d(C_N) \;&\geq\; \mu_d(C_{N-1}) \;+\; \mu_d(B_N) \;-\; \mu_d(A_{N-1}) \\
&\geq\; \mu_d(C_{N-1}) \;+\; \mu_d(A_N) \;-\; \mu_d(A_{N-1}) \;-\; \delta\, 2^{-N-1} \\
&=\; \mu_d(C_{N-1}) \;+\; \mu_d(A_N) \;-\; \mu_d(A_{N-1}) \;-\; \frac{1}{4}\, \delta\, 2^{-(N-1)},
\end{aligned} \tag{VI.44}$$

woraus wir schließen, dass

$$\begin{aligned}
\mu_d(C_N) - \mu_d(A_N) &\geq \mu_d(C_{N-1}) - \mu_d(A_{N-1}) - \frac{1}{4}\,\delta\, 2^{-(N-1)} \\
&\geq \mu_d(C_{N-2}) - \mu_d(A_{N-2}) - \frac{1}{4}\,\delta \left(2^{-(N-1)} + 2^{-(N-2)}\right) \\
&\geq \cdots \geq \mu_d(C_1) - \mu_d(A_1) - \frac{1}{4}\,\delta \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n} \\
&= \mu_d(B_1) - \mu_d(A_1) - \frac{1}{4}\,\delta \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n} \geq -\frac{1}{4}\,\delta - \frac{1}{4}\,\delta = -\frac{1}{2}\,\delta\,,
\end{aligned} \tag{VI.45}$$

wobei wir im letzten Schritt $C_1 = B_1$ und (VI.41) mit $n = 1$ anwenden. Wegen $\mu_d(A_N) \geq \delta$ impliziert dies, dass

$$\forall\, N \in \mathbb{N}: \quad \mu_d(C_N) \geq \frac{\delta}{2} > 0. \tag{VI.46}$$

was wiederum zur Folge hat, dass $C_N \neq \emptyset$, für alle $N \in \mathbb{N}$.

Schließlich stellen wir fest, dass $(\overline{C_N})_{N=1}^{\infty}$ eine monotone Folge nichtleerer, kompakter Mengen ist, $\overline{C_N} \supseteq \overline{C_{N+1}} \neq \emptyset$, was nach Lemma I.3 impliziert, dass auch der Durchschnitt aller $\overline{C_N}$ nichtleer ist. Mit $\overline{C_n} \subseteq \overline{B_n} \subseteq A_n$ folgt also

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{C_n} \neq \emptyset. \tag{VI.47}$$

□

VI.3. Sigma-Algebren

Die entscheidende Einsicht, die den Grundbaustein der Maßtheorie darstellt, ist, dass der Begriff des Mengenrings (hier: die Figuren $\mathfrak{F}_1$) nicht flexibel genug ist und durch den der Sigma-Algebra ersetzt werden muss.

Definition VI.12. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{P}(\Omega) := \{A : \; A \subseteq \Omega\}$ ihre Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt **Sigma-Algebra** (über Ω) :⇔

$$\Omega \in \mathfrak{A}, \tag{VI.48}$$

$$A \in \mathfrak{A} \quad \Rightarrow \quad A^c := \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}, \tag{VI.49}$$

$$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}. \tag{VI.50}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ die kleinstmögliche bzw. die größtmögliche Sigma-Algebra über Ω sind. Der Ausganspunkt der Maßtheorie ist jedoch die Erkenntnis, dass für $\Omega = \mathbb{R}^d$ der Ring der Figuren $\mathfrak{F}_d$ zu klein und die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ zu groß sind.

- Weiterhin bemerken wir, dass jede Sigma-Algebra $\mathfrak{A}$ auch ein Ring ist. Denn mit $\Omega \in \mathfrak{A}$ ist auch $\emptyset = \Omega^c \in \mathfrak{A}$; für $A, B \in \mathfrak{A}$ setzen wir $A_1 := A$, $A_2 := B$ und $A_n := \emptyset$, für alle $n \geq 2$. Dann ist $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, und deshalb ist auch $A \cup B = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{A}$. Schließlich sind mit $A, B \in \mathfrak{A}$ auch $A^c, B^c \in \mathfrak{A}$. Dann ist auch $A^c \cup B \in \mathfrak{A}$ und somit auch

$$A \setminus B \ = \ A \cap B^c \ = \ \big[A^c \cup B\big]^c \ \in \ \mathfrak{A}\,. \tag{VI.51}$$

Lemma VI.13. Jeder (endliche, abzählbare oder auch überabzählbare) Durchschnitt von Sigma-Algebren ist wieder eine Sigma-Algebra.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Nachprüfen der Eigenschaften (VI.48)–(VI.50). □

Ist nun $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein System von Teilmengen von Ω, so setzen wir

$$\mathfrak{A}(\mathcal{E}) \ := \ \bigcap \Big\{ \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega) \ \Big| \ \mathfrak{A} \supseteq \mathcal{E}\,, \ \ \mathfrak{A} \text{ ist eine Sigma-Algebra} \Big\}\,. \tag{VI.52}$$

Dieser Durchschnitt ist nicht leer, denn $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist selbst eine Sigma-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Nach Lemma VI.13 ist $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ wieder eine Sigma-Algebra, und nach Konstruktion ist sie die kleinste Sigma-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

Definition VI.14.

(i) Zu $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ **die von $\mathcal{E}$ erzeugte Sigma-Algebra**.

(ii) Für $\Omega = \mathbb{R}^d$ heißt die von den Quadern $\mathfrak{Q}_d$ bzw. den Figuren $\mathfrak{F}_d$ erzeugte Sigma-Algebra die Sigma-Algebra der **Borelmengen**,

$$\mathfrak{B}_d \ := \ \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d) \ = \ \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_d). \tag{VI.53}$$

Wir bemerken, dass, wenn $\widehat{\mathfrak{A}}$ bereits eine Sigma-Algebra ist, die von $\widehat{\mathfrak{A}}$ erzeugte Sigma-Algebra mit $\widehat{\mathfrak{A}}$ übereinstimmt. Insbesondere ist

$$\mathfrak{A}\big(\mathfrak{A}(\mathcal{E})\big) \ = \ \mathfrak{A}(\mathcal{E}), \tag{VI.54}$$

für jedes $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$.

Satz VI.15. Seien $\mathcal{O}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die offenen, $\mathcal{C}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die abgeschlossenen und $\mathcal{K}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die kompakten Mengen in $\mathbb{R}^d$. Die von ihnen erzeugten Sigma-Algebren stimmen alle mit den Borelmengen überein,

$$\mathfrak{B}_d \ = \ \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) \ = \ \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) \ = \ \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d). \tag{VI.55}$$

Beweis. In $\mathbb{R}^d$ ist eine Menge genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist; das ist die Aussage des Satzes von Heine-Borel. Also ist $\mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{C}_d$, und deshalb auch $\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d)$. Sind umgekehrt $A \in \mathcal{C}_d$ eine abgeschlossene Menge und $\bar{B}_r \in \mathcal{K}_d$ die abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^d$ um den Ursprung und mit Radius $r \in \mathbb{R}^+$, so sind auch $A_n := A \cap \bar{B}_n \in \mathcal{K}_d$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$A \ = \ \bigcup_{n=1}^\infty A_n \ \in \ \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d). \tag{VI.56}$$

Also ist $\mathcal{C}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d)$, und somit gilt nach (VI.54))

$$\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) \ \subseteq \ \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) \ \subseteq \ \mathfrak{A}\big(\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d)\big) \ \subseteq \ \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d). \tag{VI.57}$$

Also ist $\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d)$.

Ist $A \in \mathcal{C}_d$ abgeschlossen, so ist $A^c \in \mathcal{O}_d$ offen. Weil $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$ mit A^c auch dessen Komplement A enthält, folgt also, dass $\mathcal{C}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$, was nach (VI.54) wiederum $\mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$ nach sich zieht. Dasselbe Argument liefert aber auch $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d)$, und somit erhalten wir

$$\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) \ = \ \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) \ = \ \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d). \tag{VI.58}$$

Wir zeigen nun noch, dass $\mathfrak{B}_d = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$. Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a < b$, d.h. $a_1 < b_1, \ldots, a_d < b_d$. Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$A_n \ := \ \left(a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2n} \ , \ b_1\right) \times \cdots \times \left(a_d + \frac{b_d - a_d}{2n} \ , \ b_d\right). \tag{VI.59}$$

Dann ist $A_n \in \mathcal{O}_d$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$[a \ , \ b) \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ \in \ \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d). \tag{VI.60}$$

Also ist $\mathfrak{Q}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$, woraus abermals mit (VI.54) auch $\mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$ folgt.

Um die umgekehrte Inklusion $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d)$ zu beweisen, betrachten wir eine offene Menge $A \in \mathcal{O}_d$. Da jeder Punkt $x \in A$ ein innerer Punkt ist, gibt es ein $r(x) > 0$, so dass $B_{r(x)}(x) \subseteq A$. Wir wählen nun $\rho(x) \in \mathbb{Q}^+$ so, dass $(2d)^{-1} r(x) \ < \ \rho(x) \ < \ d^{-1} r(x)$ und dann einen Punkt $y(x) \in \mathbb{Q}^d$, mit $\|y(x) - x\| < (4d)^{-1} r(x)$. Definieren wir nun noch $\varepsilon(x) \in \mathbb{Q}^d$ durch $\varepsilon_\nu(x) := \rho(x)$, für alle $\nu = 1, \ldots, d$, so beobachten wir dass $|x_\nu - y_\nu(x)| \ < \ \varepsilon_\nu(x)$ und somit dass

$$x \ \in \ \big[y(x) - \varepsilon(x) \ , \ y(x) + \varepsilon(x)\big) \ \subseteq \ B_{r(x)}(x) \ \subseteq \ A \tag{VI.61}$$

Insbesondere ist

$$A \ = \ \bigcup_{x \in A} \{x\} \ \subseteq \ \bigcup_{x \in A} \big[y(x) - \varepsilon(x) \ , \ y(x) + \varepsilon(x)\big) \ \subseteq \ A, \tag{VI.62}$$

also

$$A \ = \ \bigcup_{x \in A} \big[y(x) - \varepsilon(x) \ , \ y(x) + \varepsilon(x)\big). \tag{VI.63}$$

Die Vereinigung auf der rechten Seite in (VI.63) ist abzählbar, denn die Menge der Quader $[y(x) - \varepsilon(x) \ , \ y(x) + \varepsilon(x)) \in \mathfrak{Q}_d$ ist mit $y(x), \varepsilon(x) \in \mathbb{Q}^d$ abzählbar. Es folgt also, dass $\mathcal{O}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d)$ und somit auch $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d) = \mathfrak{B}_d$. $\square$

VI.4. Das äußere Maß

Wir führen nun den auf Caratheodory zurückgehenden Begriff des äußeren Maßes ein.

Definition VI.16. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. Für $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ sei

$$\mathfrak{U}(Q) \ := \ \left\{ (A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{R} \ \middle| \ Q \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \right\}, \tag{VI.64}$$

wobei $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{R}$ eine Folge in $\mathfrak{R}$ bezeichne. Das **äußere Maß** (bezüglich μ) ist die Abbildung $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, \infty]$, die durch $\mu^*(Q) := \infty$, falls $\mathfrak{U}(Q) = \emptyset$, und

$$\mu^*(Q) \ := \ \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \ \middle| \ (A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q) \right\}, \tag{VI.65}$$

falls $\mathfrak{U}(Q) \neq \emptyset$, definiert ist.

Lemma VI.17. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. Für jede Familie $\{Q_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Omega$ von Teilmengen von Ω besitzt das zugehörige äußere Maß folgende Eigenschaften:

$$\mu^* \ \geq \ 0 \quad , \quad \mu^*(\emptyset) \ = \ 0, \tag{VI.66}$$

$$Q_1 \subseteq Q_2 \ \Rightarrow \ \mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2), \tag{VI.67}$$

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^\infty Q_n \Big) \ \leq \ \sum_{n=1}^\infty \mu^*(Q_n). \tag{VI.68}$$

Ist $A \in \mathfrak{R}$, so gelten weiterhin noch

$$\forall\, Q \in \mathfrak{P}(\Omega) : \ \mu^*(Q) \ = \ \mu^*(Q \cap A) \ + \ \mu^*(Q \setminus A), \tag{VI.69}$$

$$\mu^*(A) \ = \ \mu(A). \tag{VI.70}$$

Beweis.
Glg. (VI.66): Die Nichtnegativität von μ^* ist offensichtlich. Mit $A_n := \emptyset$ ist $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(\emptyset)$ und deshalb $0 \leq \mu^*(\emptyset) \leq 0$.

Glg. (VI.67): Mit $Q_1 \subseteq Q_2$ ist $\mathfrak{U}(Q_1) \supseteq \mathfrak{U}(Q_2)$ und daher $\mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)$.

Glg. (VI.68): Seien $(Q_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathfrak{P}(\Omega)$ und $Q := \bigcup_{n=1}^\infty Q_n$. Sei weiterhin $\varepsilon > 0$. Wir können für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen, dass $\mathfrak{U}(Q_n) \neq \emptyset$, denn anderenfalls ist die rechte Seite in (VI.68) unendlich und (VI.68) somit gültig. Nach Definition von μ^* gibt es dann zu jedem $Q_n \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Folge $(A_{n,m})_{m=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q_n)$, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \qquad \mu^*(Q_n) \ \geq \ \sum_{m=1}^\infty \mu(A_{n,m}) \ - \ \varepsilon\, 2^{-n}. \tag{VI.71}$$

Da $Q_n \subseteq \bigcup_{m=1}^\infty A_{n,m}$, ist auch $Q \subseteq \bigcup_{m,n=1}^\infty A_{n,m}$, d.h., die (abzählbare) Doppelfolge überdeckt Q also $(A_{n,m})_{m,n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q)$. Somit ist

$$\mu^*(Q) \ \leq \ \sum_{m,n=1}^\infty \mu(A_{n,m}) \ \leq \ \sum_{n=1}^\infty \big\{ \mu^*(Q_n) + \varepsilon 2^{-n} \big\} \ = \ \varepsilon + \sum_{n=1}^\infty \mu^*(Q_n). \tag{VI.72}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, impliziert dies (VI.68).

Glg. (VI.69): Seien $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ und $A \in \mathfrak{R}$. Setzen wir $Q_1 := Q \cap A$, $Q_2 := Q \setminus A$ und $Q_3 := Q_4 := \cdots := \emptyset$, so folgt aus (VI.66) und (VI.68), dass

$$\mu^*(Q) \ \le \ \mu^*(Q \cap A) \ + \ \mu^*(Q \setminus A). \tag{VI.73}$$

Es verbleibt also die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Dazu können wir wieder $\mathfrak{U}(Q) \neq \emptyset$ annehmen, denn anderenfalls gilt $\mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \le \infty = \mu^*(Q)$ trivialerweise. Ist also $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q)$, dann beobachten wir zunächst, dass $\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A)$, weil μ ein Inhalt ist. Addieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \cap A) \ + \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \setminus A) \ = \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n). \tag{VI.74}$$

Außerdem sind $(A_n \cap A)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q \cap A)$ und $(A_n \setminus A)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q \setminus A)$, daher sind

$$\mu^*(Q \cap A) \ \le \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \cap A) \quad \text{und} \quad \mu^*(Q \setminus A) \ \le \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \setminus A), \tag{VI.75}$$

woraus mit (VI.74)

$$\mu^*(Q \cap A) \ + \ \mu^*(Q \setminus A) \ \le \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \tag{VI.76}$$

für alle $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q)$ folgt. Also gilt auch

$$\mu^*(Q \cap A) \ + \ \mu^*(Q \setminus A) \ \le \ \inf_{(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q)} \Big\{ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \Big\} \ = \ \mu^*(Q). \tag{VI.77}$$

Glg. (VI.70): Mit $A_1 := A$ und $A_2 := A_3 := \cdots := \emptyset$ ist $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(A)$, und deshalb ist

$$\mu^*(A) \ \le \ \mu(A). \tag{VI.78}$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, verwenden wir, dass μ auf $\mathfrak{R}$ ein Prämaß und somit $\emptyset$-stetig ist. Wir wissen bereits, dass $\mathfrak{U}(A) \ni (A, \emptyset, \emptyset, \ldots)$ nicht leer ist. Seien also $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(A)$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir setzen $B_N := A \setminus \big(\bigcup_{n=1}^N A_n\big) \in \mathfrak{R}$ und beobachten, dass $(B_N)_{N=1}^\infty \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ monoton absteigend ist und dass

$$\mu(A) \ = \ \mu\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^N A_n\Big) \ + \ \mu(B_N) \ \le \ \sum_{n=1}^N \mu(A_n) \ + \ \mu(B_N). \tag{VI.79}$$

Mit $N \to \infty$ ergibt dies insbesondere

$$\mu(A) \ \le \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \ + \ \lim_{N \to \infty} \mu(B_N). \tag{VI.80}$$

Nun bemerken wir, dass $B_N \searrow \emptyset$, da $A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Weil μ $\emptyset$-stetig ist, folgt damit, dass $\lim_{N\to\infty} \mu(B_N) = 0$, und wir haben

$$\mu(A) \ \le \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n), \tag{VI.81}$$

für alle $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(A)$, was $\mu(A) \le \mu^*(A)$ nach sich zieht. □

Satz VI.18 (Caratheodory)**.** Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring, $\mu : \mathfrak{R} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$ und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ das zugehörige äußere Maß. Dann ist

$$\mathfrak{A}^* \ := \ \Big\{ A \in \mathfrak{P}(\Omega) \ \Big| \ \forall\, Q \in \mathfrak{P}(\Omega) : \ \ \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \Big\} \tag{VI.82}$$

eine Sigma-Algebra, die $\mathfrak{R}$ umfasst, also

$$\mathfrak{R} \ \subseteq \ \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \ \subseteq \ \mathfrak{A}^* \ \subseteq \ \mathfrak{P}(\Omega). \tag{VI.83}$$

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass $\mathfrak{A}^*$ eine Sigma-Algebra ist, denn nach (VI.69) ist $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}^*$. Weiterhin ist trivialerweise $\Omega \in \mathfrak{A}^*$, und auch die Implikation $A \in \mathfrak{A}^* \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}^*$ gilt trivial, wenn wir $Q \setminus A = Q \cap A^c$ beachten. Es ist also nur nachzuweisen, dass $\mathfrak{A}^*$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Dazu betrachten wir zunächst $A, B \in \mathfrak{A}^*$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) \ &= \ \mu^*(Q \cap A) \ + \ \mu^*(Q \cap A^c) \\ &= \ \mu^*(Q \cap A \cap B) \ + \ \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \\ &\quad\ + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) \ + \ \mu^*(Q \cap A^c \cap B^c) \\ &= \ \mu^*(Q \cap A \cap B) \ + \ \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \\ &\quad\ + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) \ + \ \mu^*(Q \cap [A \cup B]^c). \end{aligned} \tag{VI.84}$$

Ersetzen wir in dieser Identität Q durch $Q \cap [A \cup B]$, so fällt der letzte Term heraus, und die anderen drei bleiben unverändert,

$$\begin{aligned} \mu^*(Q \cap [A \cup B]) \ &= \ \mu^*(Q \cap [A \cup B] \cap A \cap B) \ + \ \mu^*(Q \cap [A \cup B] \cap A^c \cap B) \\ &\quad\ + \mu^*(Q \cap [A \cup B] \cap A \cap B^c) \\ &= \ \mu^*(Q \cap A \cap B) \ + \ \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \ + \ \mu^*(Q \cap A \cap B^c). \end{aligned} \tag{VI.85}$$

Ersetzen wir die ersten 3 Terme auf der rechten Seite von (VI.84) durch die linke Seite von (VI.85), so erhalten wir

$$\mu^*(Q) \ = \ \mu^*(Q \cap [A \cup B]) \ + \ \mu^*(Q \cap [A \cup B]^c), \tag{VI.86}$$

also $A \cup B \in \mathfrak{A}^*$. Sind nun $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}^*$ disjunkt, so sind $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_2^c = A_1$ und $A_1^c \cap A_2 = A_2$, und aus (VI.85) folgt dann außerdem, dass

$$\mu^*(Q \cap [A_1 \cup A_2]) \ = \ \mu^*(Q \cap A_1) \ + \ \mu^*(Q \cap A_2). \tag{VI.87}$$

Durch Induktion übertragen sich (VI.86) und (VI.87) sofort auf endlich viele Mengen:
Ist $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{A}^*$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen und

$$B_N \ := \ \bigcup_{n=1}^N A_n \quad \text{sowie} \quad A \ := \ \bigcup_{n=1}^\infty A_n, \tag{VI.88}$$

so folgt, dass $B_N \in \mathfrak{A}^*$ und

$$\mu^*(Q \cap B_N) \ = \ \sum_{n=1}^N \mu^*(Q \cap A_n). \tag{VI.89}$$

Wegen $B_N \subseteq A$ ist $Q \setminus B_N \supseteq Q \setminus A$ und daher $\mu^*(Q \setminus B_N) \geq \mu^*(Q \setminus A)$, was mit (VI.89) und $B_N \in \mathfrak{A}^*$ zusammen

$$\mu^*(Q) \;=\; \mu^*(Q \cap B_N) \,+\, \mu^*(Q \setminus B_N) \;\geq\; \sum_{n=1}^{N} \mu^*(Q \cap A_n) \,+\, \mu^*(Q \setminus A) \tag{VI.90}$$

ergibt. Im Limes $N \to \infty$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) \;&\geq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_n) \,+\, \mu^*(Q \setminus A) \\ &\geq\; \mu^*(Q \cap A) \,+\, \mu^*(Q \setminus A) \;\;\geq\;\; \mu^*(Q), \end{aligned} \tag{VI.91}$$

wobei wir zusätzlich (VI.68) verwenden. Also muss tatsächlich Gleichheit überall in (VI.91) gelten, und es folgt, dass $A \in \mathfrak{A}^*$. ☐

VI.5. Maße

Definition VI.19. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Sigma-Algebra. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ heißt **Maß** (auf $\mathfrak{A}$):$\Leftrightarrow$

(i) $$\mu(\emptyset) \;=\; 0.$$

(ii) Die Abbildung μ ist σ-additiv, d. h., ist $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{VI.92}$$

Gibt es außerdem eine Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathfrak{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $A_n \nearrow \Omega$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \Omega$, so heißt das Maß μ **Sigma-endlich**.

Ein Maß ist also ein Prämaß auf einer Sigma-Algebra. Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Kapitels.

Satz VI.20. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. Dann definiert die Restriktion des äußeren Maßes $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ eine Fortsetzung von μ zu einem Maß $\tilde{\mu} := \mu^*\big|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{R})} : \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \to [0, \infty]$, so dass also $\tilde{\mu}\big|_{\mathfrak{R}} = \mu$. Ist das Prämaß μ Sigma-endlich, so ist $\tilde{\mu}$ die einzige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$.

Beweis. Wie bereits in (VI.66) bemerkt, gilt $\mu^*(\emptyset) = 0$. Um zu zeigen, dass die Restriktion von μ^* auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ ein Maß definiert, brauchen wir also nur die Sigma-Additivität von μ^* auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ nachzuweisen. Dazu beobachten wir, dass $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{A}^*$, nach Satz VI.18. Die Sigma-Additivität von μ^* erhalten wir aus (VI.91) sogar auf $\mathfrak{A}^*$, indem wir $Q := A$ setzen,

$$\mu^*(A) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap A_n) \,+\, \mu^*(A \setminus A) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{VI.93}$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit der Fortsetzung von μ würden wir noch die Begriffe der *Dynkin-Systeme* bzw. der *monotonen Klassen* benötigen. Aus Zeitmangel verzichten wir auf diese Konstruktion und verweisen den interessierten Leser auf die Bücher von Bauer [1] und von Lieb und Loss [2].

□

Korollar VI.21. Das auf den Figuren $\mathfrak{F}_d$ definierte Prämaß μ_d hat eine eindeutige Fortsetzung zu einem Sigma-endlichen Maß auf $\mathfrak{B}_d$, das **Lebesgue-Borel-Maß**, das wir abermals mit μ_d bezeichnen.

Definition VI.22. Sind Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Sigma-Algebra, so bezeichnet man das Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ als **Messraum** oder **messbaren Raum**, und die Mengen in $\mathfrak{A}$ heißen **messbar**. Ist weiterhin $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ ein Maß, so bezeichnet man das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ als **Maßraum**.

Insbesondere ist nach Korollar VI.21 das Tripel $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \mu_d)$ ein Maßraum.

Wir bemerken noch, dass sich das sogenannte *Lebesgue-Maß* vom Lebesgue-Borel-Maß in einem wichtigen Punkt unterscheidet: Ist $A \in \mathfrak{B}_d$ eine messbare Menge mit Maß Null, $\mu_d(A) = 0$, so gilt wegen der Monotonie des äußeren Maßes auch $\mu_d^*(A') = 0$, für jede Teilmenge $A' \subseteq A$. Trotzdem muss A' nicht notwendig messbar sein, und obwohl 0 ein natürlicher Kandidat für $\mu_d(A')$ ist, wäre dann $\mu_d(A')$ nicht definiert. Diesen Nachteil kann man noch beseitigen, indem man zu den Borelmengen noch die Mengen in $\mathfrak{A}^*$ mit äusserem Maß Null hinzufügt. Genauer gesagt definieren wir die **Nullmengen** durch

$$\mathfrak{N}_d := \Big\{ A \in \mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d) \;\Big|\; \mu_d^*(A) = 0 \Big\} \tag{VI.94}$$

und anschließend die Sigma-Algebra der **Lebesgue-messbaren Mengen** durch

$$\mathfrak{L}_d := \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_d \cup \mathfrak{N}_d). \tag{VI.95}$$

Da $\mathfrak{L}_d \subseteq \mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d)$, kann man sich leicht überzeugen, dass das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathfrak{B}_d$ in eindeutiger Weise zum **Lebesgue-Maß** auf $\mathfrak{L}_d$ fortgesetzt werden kann.

Schließlich stellt sich die Frage, ob $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine echte Teilmenge darstellt. Die Antwort auf diese Frage hängt von Ω, dem Ring $\mathfrak{R}$ und dem darauf definierten Inhalt μ ab. Ist etwa Ω abzählbar, und enthält $\mathfrak{R}$ die Elemente von Ω als einelementige Mengen, so ist sofort $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und somit auch $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{P}(\Omega)$. Für den Ring $\mathfrak{F}_d$ der Figuren mit Prämaß μ_d gilt jedoch

$$\mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d) \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d). \tag{VI.96}$$

Die Konstruktion von Mengen in $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d)$ ist allerdings anspruchsvoll, unintuitiv und führt auf (scheinbar) paradoxe Sachverhalte. Eine interessante Diskussion dieser Mengen findet man bei Oxtoby [3].

Satz VI.23. Das Lebesgue-Maß $\mu_d : \mathcal{B}_d \to [0, \infty]$ besitzt die Eigenschaften der **äußeren Regularität** und der **inneren Regularität**, d.h. für jedes $A \in \mathcal{B}_d$ gilt

$$\mu_d(A) = \inf \big\{ \mu_d(U) \,\big|\, U \supseteq A,\ U \text{ ist offen} \big\} \tag{VI.97}$$

$$= \sup \big\{ \mu_d(C) \,\big|\, C \subseteq A,\ C \text{ ist kompakt} \big\}. \tag{VI.98}$$

Beweis. Wir zeigen nur (VI.97)), bemerken aber zuvor, dass $\mathbb{R}^d \supseteq A$ offen und $\emptyset \subseteq A$ abgeschlossen sind. Für $\mu_d(A) = \infty$ gilt (VI.97) trivialerweise, sei also $\mu_d(A) < \infty$. Da $\mu_d = \mu^*|_{\mathcal{L}_d}$, wobei μ^* das zum Ring $\mathfrak{F}_d$ der Figuren gehörige äußere Maß notiert, gibt es gemäß (VI.82) zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathfrak{F}_d$, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \quad \text{und} \quad \mu_d(A) \geq \left(\sum_{n=1}^\infty \mu_d(A_n) \right) - \varepsilon. \tag{VI.99}$$

Jedes A_n ist aber die Vereinigung endlich vieler halboffener und paarweise disjunkter Quader. Daher gibt es Folgen $(a_k)_{k=1}^\infty, (b_k)_{k=1}^\infty$ in $\mathbb{R}^d$, mit $a_k < b_k$, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty [a_k, b_k) \quad \text{und} \quad \mu_d(A) \geq \left(\sum_{k=1}^\infty \mu_d\big([a_k, b_k)\big) \right) - \varepsilon. \tag{VI.100}$$

Wählen wir nun $c_k < a_k$ so, dass

$$\mu_d\big((c_k, b_k)\big) \leq \mu_d\big([a_k, b_k]\big) + \varepsilon \cdot 2^{-k}, \tag{VI.101}$$

so ist

$$U := \bigcup_{k=1}^\infty (c_k, b_k) \supseteq \bigcup_{k=1}^\infty [a_k, b_k) \supseteq A \tag{VI.102}$$

offen und

$$\begin{aligned} \mu_d(A) &\geq \left(\sum_{k=1}^\infty \left\{ \mu_d\big((c_k, b_k)\big) - \varepsilon \cdot 2^{-k} \right\} \right) - \varepsilon \\ &= \left(\sum_{k=1}^\infty \mu_d\big((c_k, b_k)\big) \right) - 2\varepsilon \geq \mu_d(U) - 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{VI.103}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus (VI.97). □