V. Umkehrfunktionen und implizite Funktionen

V.1. Umkehrfunktionen und lokale Invertibilität

In Kapitel III haben wir gezeigt, dass totale und partielle Differenzierbarkeit zusammenfallen, sofern die Ableitungen stetig sind, was uns in Definition III.10 auf folgende Verallgemeinerung des Begriffs des stetigen Differenzierbarkeit geführt hat:

$$C^1(U;V) \;:=\; \Big\{ F : U \to V \;\Big|\; F \text{ ist total differenzierbar auf } U \text{ und } F' \in C[U;\mathcal{B}(X;Y)] \Big\}. \tag{V.1}$$

Zur Vorbereitung des Satzes über die Umkehrfunktion benötigen wir ein Lemma zur Lipschitz-Stetigkeit total differenzierbarer Abbildungen.

Lemma V.1. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y$ zwei $\mathbb{K}$-Banach-Räume, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $x, x' \in U$ so, dass

$$S \;:=\; \big\{ (1-\alpha)x + \alpha x' \;\big|\; 0 \le \alpha \le 1 \big\} \;\subseteq\; U. \tag{V.2}$$

Seien weiterhin $F : U \to Y$ total differenzierbar auf U und

$$M \;:=\; \sup_{z \in S} \|F'(z)\|_{\mathcal{B}(X;Y)} \;<\; \infty. \tag{V.3}$$

Dann gilt

$$\|F(x) - F(x')\|_Y \;\le\; M\, \|x - x'\|_X. \tag{V.4}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass sich (V.4) im Fall $Y = \mathbb{R}$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung dahingehend verschärfen lässt, dass $F(x) - F(x') = F'((1-\alpha)x + \alpha x') \cdot (x - x')$, für ein geeignetes $\alpha \in (0,1)$ gilt.

- Für vektorwertige Abbildungen gilt dies aber im Allgemeinen nicht. Sind beispielsweise $U = (-\pi, \pi)$, $Y = \mathbb{R}^2$ und $F(\vartheta) = \binom{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$, so ist einerseits $F(\pi/2) - F(0) = \binom{0}{1} - \binom{1}{0} = \binom{-1}{1}$. Andererseits ist $F'(\vartheta) = \binom{-\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$, und mit $\vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$\|F(\vartheta_2) - F(\vartheta_1)\|_Y \;=\; \sqrt{2} \;\neq\; \frac{\pi}{2} \;=\; \|F'(\vartheta)\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R};Y)} \cdot |\vartheta_2 - \vartheta_1|\,, \tag{V.5}$$

  für jede Wahl von ϑ. Insofern hat der Mittelwertsatz der Differentialrechnung *kein* mehrdimensionales Analogon.

Satz V.2 (Lokale Invertibilität)**.** Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$, $U \subseteq X$ eine nichtleere, offene Teilmenge, $x_0 \in U$ und $F \in C^1(U;X)$. Sei weiterhin $A := F'(x_0) \in \mathcal{B}(X)$ invertierbar mit (beschränkter) Inverse $A^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\widetilde{U} \subseteq U$ mit $\widetilde{U} \ni x_0$ so, dass folgende Aussagen gelten:

(i) $\widetilde{V} := F(\widetilde{U}) \subseteq X$ ist offen und $y_0 := F(x_0) \in \widetilde{V}$.

(ii) Die Restriktion $F \in C^1(\widetilde{U};\widetilde{V})$ von F auf $\widetilde{U}$ ist eine Bijektion mit stetig differenzierbarer inverser Funktion $F^{-1} \in C^1(\widetilde{V};\widetilde{U})$.

(iii) Für alle $y \in \widetilde{V}$ gilt

$$\big(F^{-1}\big)'(y) \;=\; \big(F'[F^{-1}(y)]\big)^{-1}. \tag{V.6}$$

Beweis. Wir schreiben im Folgenden $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X;X)$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{op}} := \|\cdot\|_{\mathcal{B}(X)}$. Wegen $F \in C^1(U;X)$ ist $F' \in C[U;\mathcal{B}(X)]$ stetig. Daher können wir ein $\delta > 0$ so finden, dass

$$\forall\, x \in B_X(x_0, 2\delta): \qquad \|F'(x) - A\|_{\mathrm{op}} \;=\; \|F'(x) - F(x_0)\|_{\mathrm{op}} \;\leq\; \frac{1}{2\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}}. \tag{V.7}$$

Wir setzen nun $\eta := \delta/(2\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}})$ und betrachten für $y \in B_Y(y_0, \eta)$ die Abbildung $\phi_y : U \to X$,

$$\phi_y(x) \;:=\; x + A^{-1}[y - F(x)]. \tag{V.8}$$

Für $x \in \overline{B_X(x_0,\delta)} = \{x \in X : \|x - x_0\|_X \leq \delta\}$ ist dann nach Lemma V.1

$$\begin{aligned} \|\phi_y(x) - x_0\|_X \;&\leq \|\phi_y(x) - \phi_y(x_0)\|_X \;+\; \|\phi_y(x_0) - x_0\|_X \qquad (V.9)\\ &\leq \sup_{z \in \overline{B_X(x_0,2\delta)}} \big\{\|\phi_y'(z)\|_{\mathrm{op}}\big\}\, \|x - x_0\|_X \;+\; \|A^{-1}(y - F(x_0))\|_X \\ &\leq \sup_{z \in \overline{B_X(x_0,2\delta)}} \big\{\|\phi_y'(z)\|_{\mathrm{op}}\big\}\, \|x - x_0\|_X \;+\; \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}\, \|y - y_0\|_X. \end{aligned}$$

Nun ist $\|y - y_0\| < \eta = \frac{\delta}{2\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$ und, für alle $z \in \overline{B_X(x_0, 2\delta)}$,

$$\begin{aligned} \|\phi_y'(z)\|_{\mathrm{op}} \;&=\; \big\|\mathbb{1} - A^{-1} \cdot F'(z)\big\|_{\mathrm{op}} \;=\; \big\|A^{-1}(A - F'(z))\big\|_{\mathrm{op}} \\ &\leq \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}} \cdot \|F'(z) - A\|_{\mathrm{op}} \;\leq\; \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{V.10}$$

Setzen wir dies in (V.9) ein, so erhalten wir

$$\forall x \in \overline{B_X(x_0,\delta)}: \qquad \|\phi_y(x) - x_0\|_X \;\le\; \frac{1}{2}\,\delta \;+\; \frac{1}{2}\,\delta \;=\; \delta, \tag{V.11}$$

also bildet ϕ_y die abgeschlossene Kugel $\overline{B_X(x_0,\delta)}$ in sich ab,

$$\forall y \in B_Y(y_0,\eta): \qquad \phi_y : \overline{B_X(x_0,\delta)} \;\to\; \overline{B_X(x_0,\delta)}. \tag{V.12}$$

Außerdem ist ϕ_y auf $\overline{B_X(x_0,\delta)}$ eine Kontraktion, denn für alle $x, x' \in \overline{B_X(x_0,\delta)}$ gilt

$$\|\phi_y(x) - \phi_y(x')\|_X \;\le\; \sup_{z\in B_X(x_0,2\delta)} \big\{\|\phi_y'(z)\|_{\mathcal{B}(x)}\big\}\, \|x - x'\|_X \;\le\; \frac{1}{2}\,\|x - x'\|_X, \tag{V.13}$$

gemäß (V.10). Nach dem Banachschen Fixpunktsatz, Satz I.8, hat deshalb ϕ_y, für jedes $y \in B_Y(y_0,\eta)$, einen eindeutigen Fixpunkt $x_y \in \overline{B_X(x_0,\delta)}$, so dass

$$x_y \;=\; \phi_y(x_y) \;=\; x_y + A^{-1}\cdot[y - F(x_y)], \tag{V.14}$$

was gleichwertig ist zu

$$y \;=\; F(x_y). \tag{V.15}$$

Zu (i): Setzen wir nun

$$\widetilde{V} \;:=\; B_Y(y_0,\eta), \qquad \widetilde{U} \;:=\; F^{-1}(\widetilde{V}), \tag{V.16}$$

so folgt, dass $\widetilde{V} \ni y_0$ offen ist und $\widetilde{U} \ni x_0$. Außerdem impliziert die Stetigkeit von F, dass mit $\widetilde{V}$ auch $\widetilde{U} = F^{-1}(\widetilde{V})$ offen ist.

Zu (ii): Die Eindeutigkeit der Lösung der Glg. (V.15) zeigt, dass $F : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ eine Bijektion mit Umkehrfunktion $G := F^{-1} : \widetilde{V} \to \widetilde{U}$ ist.

Als Nächstes zeigen wir, dass $F'(x) \in \mathcal{B}(X)$ invertibel ist mit beschränkter Inverse $(F'(x))^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, für alle $x \in B_X(x_0,2\delta)$. Dazu fixieren wir $x \in B_X(x_0,2\delta)$ und definieren $Q := F'(x) \in \mathcal{B}(X)$ und, für $N \in \mathbb{N}$,

$$R_N \;:=\; \sum_{n=0}^{N} A^{-1}\big[(A-Q)A^{-1}\big]^n. \tag{V.17}$$

Wegen $x \in B_X(x_0,2\delta)$ ist $\|A - Q\|_{\rm op}\cdot\|A^{-1}\|_{\rm op} \le \frac{1}{2}$, nach (V.7). Für $M, N, N_0 \in \mathbb{N}$ mit $M > N \ge N_0$ folgt dann

$$\begin{aligned}
\|R_M - R_N\|_{\rm op} \;&=\; \Big\| \sum_{n=N+1}^{M} A^{-1}\left[(A-Q)A^{-1}\right]^n \Big\|_{\rm op} \\
&\le \|A^{-1}\|_{\rm op} \sum_{n=N+1}^{M} \|A-Q\|_{\mathcal{B}(X)}^n \cdot \|A^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)}^n \;\le\; \|A^{-1}\|_{\rm op} \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{2^n} \\
&\le \|A^{-1}\|_{\rm op} \sum_{n=N_0+1}^{\infty} 2^{-n} \;=\; \frac{\|A^{-1}\|_{\rm op}}{2^{N_0}} \;\longrightarrow\; 0.
\end{aligned} \tag{V.18}$$

für $N_0 \to \infty$. Also ist $(R_N)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(X)$ und deshalb konvergent,

$$R \;:=\; \lim_{N\to\infty} R_N \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} A^{-1}\big[(A-Q)A^{-1}\big]^n. \tag{V.19}$$

Außerdem erhalten wir wie in (V.18), dass

$$\|R\|_{\mathrm{op}} \;\le\; \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \;=\; 2\,\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}. \tag{V.20}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} QR \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} QA^{-1}\left[(A-Q)A^{-1}\right]^n \qquad (V.21)\\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{ -(A-Q)A^{-1}\left[(A-Q)A^{-1}\right]^n + AA^{-1}\left[(A-Q)A^{-1}\right]^n \Big\}\\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\left[(A-Q)A^{-1}\right]^n - \left[(A-Q)A^{-1}\right]^{n+1}\Big\} \;=\; \left[(A-Q)A^{-1}\right]^0 \;=\; \mathbb{1}, \end{aligned}$$

und genauso folgt $RQ = \mathbb{1}$, also

$$R \;=\; Q^{-1} \;=\; \big(F'(x)\big)^{-1}. \tag{V.22}$$

Seien jetzt $y, y+z \in \widetilde{V}$ und $x := G(y)$, $x+w := G(y+z) \in \widetilde{U} \subseteq B_X(x_0, 2\delta)$. Wir setzen wieder $Q := F'(x) = F'[G(y)]$ und $R := Q^{-1}$ und beobachten, dass

$$w \;=\; (x+w) - x \;= G(y+z) - G(y), \tag{V.23}$$

$$z \;=\; (y+z) - y \;= F(x+w) - F(x). \tag{V.24}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} G(y+z) - G(y) - Rz \;&= w - R\big[F(x+w) - F(x)\big]\\ &=\; -R\big[F(x+w) - F(x) - Qw\big]. \end{aligned} \tag{V.25}$$

Aus der Kontraktionseigenschaft (V.13) erhalten wir außerdem, dass

$$\begin{aligned} &\Big\| w - A^{-1}\big(F(x+w) - F(x)\big)\Big\|_X\\ &\quad= \Big\|\big\{(x+w) + A^{-1}\big(y - F(x+w)\big)\big\} \;-\; \big\{x + A^{-1}\big(y - F(x)\big)\big\}\Big\|_X\\ &\quad= \|\phi_y(x+w) - \phi_y(x)\|_X \;\le\; \tfrac{1}{2}\,\|(x+w) - x\|_X \;=\; \tfrac{1}{2}\,\|w\|_X, \end{aligned} \tag{V.26}$$

was, mit $F(x+w)-F(x)=y+z-y=z$,

$$\frac{1}{2}\,\|w\|_X \;\geq\; \|w\|_X - \big\|A^{-1}[F(y+w)-F(x)]\big\|_X \;=\; \|w\|_X - \big\|A^{-1}z\big\|_X \tag{V.27}$$

und somit

$$\|w\|_X \;\leq\; 2\,\|A^{-1}z\|_X \;\leq\; 2\,\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}\cdot\|z\|_X \tag{V.28}$$

impliziert. Insbesondere konvergiert $w\to 0$, falls $z\to 0$, und G ist stetig in y. Außerdem folgt durch Einsetzen in (V.25), dass

$$\lim_{z\to 0}\left\{\frac{\|G(y+z)-G(y)-Rz\|_X}{\|z\|_X}\right\} \;\leq\; \frac{\|R\|_{\mathrm{op}}}{2\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}}\,\lim_{w\to 0}\left\{\frac{\|F(x+w)-F(x)-Qw\|_X}{\|w\|_X}\right\} \;=\; 0, \tag{V.29}$$

also ist G differenzierbar bei $y\in\widetilde{V}$ und $G'(y)=R$.

Zu (iii): Für $y\in\widetilde{V}$ definieren wir $R(y):=\big(F'[G(y)]\big)^{-1}\in\mathcal{B}(X)$ und beobachten, dass

$$\begin{aligned}
\|R(y+z)-R(y)\|_{\mathrm{op}} \;&=\; \Big\|R(y+z)\,\underbrace{F'[G(y)]\,R(y)}_{=1} - \underbrace{R(y+z)\,F'[G(y+z)]}_{=1}\,R(y)\Big\|_{\mathrm{op}} \\
&=\; \Big\|R(y+z)\,\big\{F'[G(y+z)]-F'[G(y)]\big\}\,R(y)\Big\|_{\mathrm{op}} \\
&\leq\; 4\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2\,\big\|F'[G(y+z)]-F'[G(y)]\big\|,
\end{aligned} \tag{V.30}$$

unter Ausnutzung von (V.20). Da $F':U\to\mathcal{B}(X)$ stetig in $G(y)\in U$ und G stetig in y sind, ist auch $F'\circ G$ stetig in y, und wir erhalten

$$\lim_{z\to 0}\|R(y+z)-R(y)\|_{\mathrm{op}} \;\leq\; 4\|A^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)}^2\cdot\lim_{z\to 0}\Big\|F'\big[G(y+z)\big]-F'[G(y)]\Big\|_{\mathrm{op}} \;=\; 0. \tag{V.31}$$

Also ist $R=(F^{-1})'$ stetig in $y\in\widetilde{V}$. □

Bemerkungen und Beispiele.
Gleichung (V.6) lässt sich zu $F^{-1}\in C^k(\widetilde{V};\widetilde{U})$ verallgemeinern, falls $F\in C^k(U;X)$.

V.2. Lokale Auflösbarkeit

Als Nächstes werden wir Satz V.2 über die lokale Umkehrbarkeit von Funktionen benutzen, um zu zeigen, dass unter gewissen Bedingungen eine Gleichung

$$F(x,y) \;=\; 0 \tag{V.32}$$

lokal nach y aufgelöst werden kann, d.h. es gibt eine Funktion h so dass

$$\Big(F(x,y)=0\Big) \;\Longrightarrow\; \Big(y=h(x)\Big). \tag{V.33}$$

Zur Motivation betrachten wir erst einmal das Beispiel einer linearen Abbildung. Seien $M, N \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{M+N}; \mathbb{R}^N)$ eine $N \times (M+N)$-Matrix. Schreiben wir $\mathbb{R}^{M+N} = \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ und bezeichnen seine Elemente mit $(x, y) \in \mathbb{R}^{M+N}$, wobei $x \in \mathbb{R}^M$ und $y \in \mathbb{R}^N$ sind, und schreiben wir weiterhin $A = (A_x, A_y)$, wobei $A_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^N)$ und $A_y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, mit

$$A \;=\; \left(\begin{array}{c|c} \overline{\begin{array}{ccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,M} \end{array}} & \overline{\begin{array}{ccc} a_{1,M+1} & \dots & a_{1,M+N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,M+1} & \dots & a_{N,M+N} \end{array}} \\ A_x & A_y \end{array}\right), \tag{V.34}$$

so lässt sich $A(x, y)$ schreiben als

$$A(x, y) \;=\; A_x\, x \;+\; A_y\, y. \tag{V.35}$$

Ist nun A_y invertibel, also $\det A_y \neq 0$, beobachten wir folgende Äquivalenz:

$$A(y, x) \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; A_x\, x + A_y\, y \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; y \;=\; \big[- A_y^{-1} \circ A_x \big]\, x. \tag{V.36}$$

Wir sehen also, dass die Gleichung $A(x, y) = 0$ *implizit* eine Funktion $h : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ definiert, nämlich $h = -A_y^{-1} \circ A_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^N)$, so dass

$$\Big(A(x, y) = 0\Big) \;\Leftrightarrow\; \Big(y = h(x)\Big). \tag{V.37}$$

Dieses lässt sich für differenzierbare Funktionen verallgemeinern, wie der folgende Satz verdeutlicht.

Satz V.3 (Satz über implizite Funktionen)**.** Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^{M+N}$ eine offene Teilmenge, $F \in C^1(U; \mathbb{R}^N)$ und $(x_0, y_0) \in U$ so, dass $F(x_0, y_0) = 0$ und dass $A_y \in \mathfrak{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$ invertibel ist, wobei

$$\forall\, i, j = 1, \dots, N: \quad (A_y)_{i,j} \;:=\; \frac{\partial F_i(x_0, y_0)}{\partial y_j}. \tag{V.38}$$

Dann gibt es zwei offene Teilmengen $\widetilde{U} \subseteq U$ und $W \subseteq \mathbb{R}^M$, mit $\widetilde{U} \ni (x_0, y_0)$ und $W \ni x_0$, sowie eine Abbildung $h \in C^1(W; \mathbb{R}^N)$ so, dass

$$(i) \forall x \in W: \; \big(x, h(x)\big) \in \widetilde{U}, \tag{V.39}$$

$$(ii) \forall (x, y) \in (W \times \mathbb{R}^N) \cap \widetilde{U}: \; \big(F(x, y) = 0\big) \Leftrightarrow \big(y = h(x)\big). \tag{V.40}$$

$$(iii) h(x_0) \;=\; y_0, \tag{V.41}$$

$$(iv) h'(x_0) \;=\; -A_y^{-1} \circ A_x, \tag{V.42}$$

wobei $(A_x)_{i,j} = \partial F_i(x_0)/\partial x_j \in \mathfrak{M}_{N\times M}(\mathbb{R})$.

Beweis. Wir definieren $\widehat{F} \in C^1(U;\mathbb{R}^{M+N})$ durch

$$\widehat{F}(x,y) \;:=\; \big(x, F(x,y)\big) \tag{V.43}$$

und beobachten, dass

$$\widehat{F}' \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{F}_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_1}{\partial x_M} & \frac{\partial \widehat{F}_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_1}{\partial y_N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \widehat{F}_M}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_M}{\partial x_M} & \frac{\partial \widehat{F}_M}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_M}{\partial y_N} \\ & & & & & \\ \frac{\partial \widehat{F}_{M+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_{M+1}}{\partial x_M} & \frac{\partial \widehat{F}_{M+1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_{M+1}}{\partial y_N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \widehat{F}_{M+N}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_{M+N}}{\partial x_M} & \frac{\partial \widehat{F}_{M+N}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_{M+N}}{\partial y_N} \end{pmatrix} \tag{V.44}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & \mathbf{0} & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & & & & \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_M} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial x_M} & \frac{\partial F_N}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial y_N} \end{pmatrix}.$$

Nach dem Kästchensatz für Determinanten gilt dann

$$\det[\widehat{F}'(x_0,y_0)] \;=\; \det\left[\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline A_x & A_y \end{array}\right)\right] \;=\; \det A_y \neq 0, \tag{V.45}$$

da A_y invertibel ist. Somit ist auch $\widehat{F}'(x_0,y_0)$ invertibel, und nach dem Satz V.2 über die Umkehrfunktion gibt es Umgebungen

$$(x_0,y_0) \in \widetilde{U} \subseteq U, \quad \big(x_0, \underbrace{F(x_0,y_0)}_{=0}\big) \in \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{M+N}, \tag{V.46}$$

so dass $\widehat{F} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ invertibel ist, mit inverser Funktion $\widehat{G} := \widehat{F}^{-1} : \widetilde{V} \to \widetilde{U}$, $\widehat{G} \in C^1(\widetilde{V};\widetilde{U})$ und $\widehat{G}'(x_0,0) = (\widehat{F}'(x_0,y_0))^{-1}$. Nun ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_x & A_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -A_y^{-1}A_x & A_y^{-1} \end{pmatrix} \;&=\; \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -A_y^{-1}A_x & A_y^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_x & A_y \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{V.47}$$

d.h.

$$\widehat{G}'(x_0,0) \;=\; \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -A_y^{-1}A_x & A_y^{-1} \end{pmatrix}. \tag{V.48}$$

Da $\widetilde{V}$ offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$B_{\mathbb{R}^{M+N}}\big[(x_0,0),\delta\big] \;=\; \Big\{(x,f)\in\mathbb{R}^{M+N}\;\Big|\;\|(x,f)-(x_0,0)\|_{\mathbb{R}^{M+N}}<\delta\Big\} \;\subseteq\; \widetilde{V}. \tag{V.49}$$

Wegen

$$\|(x,0)-(x_0,0)\|_{\mathbb{R}^{M+N}} \;=\; \|x-x_0\|_{\mathbb{R}^M} \tag{V.50}$$

ist mit

$$W \;:=\; B_{\mathbb{R}^M}(x_0,\delta) \tag{V.51}$$

auch

$$W\times\{0\} \;\subseteq\; B_{\mathbb{R}^M}(x_0,\delta)\times\{0\} \;\subseteq\; B_{\mathbb{R}^{M+N}}\big[(x_0,0),\delta\big] \;\subseteq\; \widetilde{V}. \tag{V.52}$$

Daher definiert die Restriktion von $\widehat{G}:\widetilde{V}\to\widetilde{U}$ auf $W\times\{0\}$ eine Funktion $h:W\to\mathbb{R}^N$ durch

$$\forall\, x\in W: \qquad \big(x,h(x)\big) \;:=\; \widehat{G}(x,0). \tag{V.53}$$

Offensichtlich ist dann, für alle $x\in W$,

$$\big(x,h(x)\big) \;=\; \widehat{G}(x,0) \;\in\; \widehat{G}\big(W\times\{0\}\big) \;\subseteq\; \widehat{G}(\widetilde{V}) \;=\; \widetilde{U}, \tag{V.54}$$

und (V.39) ist bewiesen. Weiterhin ist, für $x\in W$,

$$(x,0) \;=\; \widehat{F}\big[\widehat{G}(x,0)\big] \;=\; \widehat{F}\big[x,h(x)\big] \;=\; \big(x,\; F[x,h(x)]\big), \tag{V.55}$$

also $F\,(x,h(x))=0$ und

$$\forall x\in W, y\in\mathbb{R}^N: \quad \big(y=h(x)\big) \;\Rightarrow\; \big(F(x,y)=0\big). \tag{V.56}$$

Umgekehrt ist für $x\in W$ und $y\in\mathbb{R}^N$, mit $(x,y)\in\widetilde{U}$ und $F(x,y)=0$,

$$(x,y) \;=\; \widehat{G}\big(\widehat{F}(x,y)\big) \;=\; \widehat{G}\big(x,F(x,y)\big) \;=\; \widehat{G}(x,0) \;=\; \big(x,h(x)\big), \tag{V.57}$$

also

$$\forall(x,y)\in(W\times\mathbb{R}^N)\cap\widetilde{U}: \qquad \big\{F(x,y)=0\big\} \;\Rightarrow\; \big\{y=h(x)\big\}. \tag{V.58}$$

Glgen. (V.56) und (V.58) ergeben zusammen (V.40) und, falls $(x,y)=(x_0,y_0)$ gesetzt wird, auch (V.41).

Schließlich berechnen wir h' auf W; zunächst ist

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{h_i(x+te_j)-h_i(x)}{t}\right\} \;=\; \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\widehat{G}_{M+i}(x+te_j,0)-\widehat{G}_{M+i}(x,0)}{t}\right\}. \tag{V.59}$$

Also ist $h\in C^1(W;\mathbb{R}^N)$ und

$$\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \;=\; \frac{\partial \widehat{G}_{M+i}(x,0)}{\partial x_j}, \tag{V.60}$$

für $i\in\mathbb{N}_1^N$ und $j\in\mathbb{N}_1^M$. Speziell für $x=x_0$ folgt dann aus (V.48), dass

$$\frac{\partial h_i(x_0)}{\partial x_j} \;=\; \frac{\partial \widehat{G}_{M+i}(x_0,0)}{\partial x_j} \;=\; \Big(\widehat{G}'(x_0,0)\Big)_{M+i,j} \;=\; \big(-A_y^{-1}\circ A_x\big)_{i,j} \tag{V.61}$$

und damit auch (V.42). □

V.3. Extrema mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren

In diesem Abschnitt lernen wir eine schöne und in der Praxis sehr nützliche Anwendung des Satzes V.3 über implizite Funktionen kennen: Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren zur Berechnung von Minima (oder Maxima, wir behandeln der Einfachheit halber nur Minima) von Funktionen mehrerer Variablen mit Nebenbedingungen. Dazu betrachten wir zunächst ein motivierendes Beispiel:

Sei $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$\forall x,y\in\mathbb{R}: \qquad F(x,y) \;:=\; (x-a)^2+(y-b)^2, \tag{V.62}$$

wobei $a,b>0$. Offensichtlich ist der Graph von F ein Paraboloid um (a,b), und (a,b) ist auch das globale und einzige lokale Minimum von F:

$$F(a,b) \;=\; 0, \qquad F(x,y) \;\geq\; 0, \tag{V.63}$$

denn $F\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$,

$$\nabla F(x,y) \;=\; \begin{pmatrix}2(x-a)\\2(y-b)\end{pmatrix} \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x,y) \;=\; (a,b), \tag{V.64}$$

und

$$F''(x,y) \;=\; \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit.} \tag{V.65}$$

Wir stellen also fest, dass

$$F(a,b) \;=\; 0 \;=\; \min\big\{F(x,y)\;\big|\;(x,y)\in\mathbb{R}^2\big\}. \tag{V.66}$$

Wir wollen nun ein etwas modifiziertes Minimierungsproblem behandeln, bei dem F nicht über $\mathbb{R}^2$, sondern nur über einer Teilmenge $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$ minimiert werden soll. Beispielsweise könnte $\mathcal{G}$ die Gerade $y = \alpha x + \beta$ darstellen, also

$$\mathcal{G} \;=\; \big\{(x, \alpha x + \beta) \;\big|\; x \in \mathbb{R}\big\} \;=\; \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; G(x,y) = 0\Big\}, \tag{V.67}$$

wobei die *Nebenbedingung* $G = 0$ gegeben ist durch

$$G(x,y) \;:=\; \alpha x + \beta - y. \tag{V.68}$$

Gesucht sind nun $F_G,\ x_G,\ y_G \in \mathbb{R}$, so dass

$$F_G \;:=\; F(x_G, y_G) \;=\; \min\big\{F(x,y) \;\big|\; (x,y) \in \mathcal{G}\big\}. \tag{V.69}$$

(Wenn es mehrere Lösungen für x_G, y_G gibt, suchen wir natürlich alle solche Lösungen.) Das Problem (V.69) lässt sich leicht explizit lösen: Wir lösen die Nebenbedingung $G(x,y) = 0$ nach y auf und setzen das Ergebnis in F ein,

$$\begin{aligned} \min\big\{F(x,y) \;\big|\; (x,y) \in \mathcal{G}\big\} \;&=\; \min\big\{F(x, \alpha x + \beta) \;\big|\; x \in \mathbb{R}\big\} \\ &=\; \min\big\{f_{\alpha,\beta}(x) \;\big|\; x \in \mathbb{R}\big\}, \end{aligned} \tag{V.70}$$

wobei $f_{\alpha,\beta} \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ definiert ist durch

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta}(x) \;&= F(x, \alpha x + \beta) \;=\; (x-a)^2 + (\alpha x + \beta - b)^2 \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + \alpha^2 x^2 + 2\alpha x(\beta - b) + (\beta - b)^2 \\ &= (1+\alpha^2)x^2 + 2\left[\alpha\beta - \alpha b - a\right] x + a^2 + (\beta - b)^2. \end{aligned} \tag{V.71}$$

Dann sind

$$f'_{\alpha,\beta}(x) \;=\; 2(1+\alpha^2)x + 2(\alpha\beta - \alpha b - a), \qquad f''_{\alpha,\beta} \;=\; 2(1+\alpha^2) \;>\; 0, \tag{V.72}$$

und somit sind

$$x_G \;=\; \frac{a + \alpha b - \alpha\beta}{1+\alpha^2}, \qquad y_G \;=\; \alpha x_G + \beta \;=\; \frac{\alpha a + \alpha^2 b + \beta}{1+\alpha^2}, \tag{V.73}$$

$$\begin{aligned} F_G \;&= f_{\alpha,\beta}(x_G) \\ &= \frac{1}{1+\alpha^2}\Big\{\big(a + \alpha b - \alpha\beta\big)^2 - 2\big(a + \alpha b - \alpha\beta\big)^2 + (1+\alpha^2)\left(a^2 + (\beta - b)^2\right)\Big\} \\ &= \frac{1}{1+\alpha^2}\Big\{-\big(a + \alpha b - \alpha\beta\big)^2 + (1+\alpha^2)\left(a^2 + \beta^2 + b^2 - 2b\beta\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{V.74}$$

Wie wir sehen, sind die Rechnungen schon für dieses einfache Beispiel ziemlich umfangreich. Außerdem hängt alles an der expliziten, globalen Auflösbarkeit von $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \alpha x + \beta$.

Im Allgemeinen sind mehrere, komplizierte Nebenbedingungen gleichzeitig zu berücksichtigen, die nicht explizit auflösbar sind. Für diesen Fall hat Lagrange eine elegante Methode entwickelt.

Definition V.4. Seien $M, N \in \mathbb{N},\ M > N$, und $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine nichtleere offene Teilmenge. Eine Abbildung $G \in C^1(U; \mathbb{R}^N)$ heißt **Nebenbedingung** :$\Leftrightarrow$

$$V \ := \ G(U) \ \ni \ 0 \text{ und ist offen,} \tag{V.75}$$

$$\forall\, x \in \mathcal{G} := G^{-1}\big(\{0\}\big): \quad \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ran}\big[G'(x)\big] \ = \ N. \tag{V.76}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Gleichung. (V.76) bedeutet, dass die Jacobimatrix G' von G bei jedem Punkt x in $\mathcal{G}$ vollen Rang N hat, $\operatorname{rank}\big[G'(x)\big] = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ran}\big[G'(x)\big] = N$, was gleichwertig mit der Aussage ist, dass die (nicht quadratische!) $N \times M$-Matrix $G'(x)$ für jedes $x \in \mathcal{G}$ maximal viele - nämlich N - linear unabhängige Spalten hat.
- Damit ist (V.76) gleichwertig mit

$$\forall\, x \in \mathcal{G}\ \exists\, 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_N \le M: \quad \det\Big[\big(G'(x)_{i,j_\ell}\big)_{i,\ell=1,\ldots,N}\Big] \ \neq \ 0. \tag{V.77}$$

  Dabei müssen die Indizes $j_1, j_2, \ldots, j_N$ nicht für alle $x \in \mathcal{G}$ gleich sein.

Satz V.5. Seien $M, N \in \mathbb{N},\ M > N, U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine nichtleere offene Teilmenge und $F \in C^1(U; \mathbb{R})$. Sei $G \in C^1(U; \mathbb{R}^N)$ eine Nebenbedingung und

$$\mathcal{G} \ := \ \big\{x \in U \mid G(x) = 0\big\} \ \subseteq \ U. \tag{V.78}$$

Ist nun $x_0 \in \mathcal{G}$ ein lokales Minimum der Restriktion von F auf $\mathcal{G}$, d.h.

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in B(x_0, \delta) \cap \mathcal{G}: \quad F(x) \ \ge \ F(x_0), \tag{V.79}$$

so existiert ein $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$, so dass

$$\vec{\nabla} F(x_0) + \big\langle \lambda \big|\, \vec{\nabla} G(x_0) \big\rangle \ = \ 0, \tag{V.80}$$

d.h.

$$\forall j = 1, \ldots, M: \qquad \frac{\partial F(x_0)}{\partial x_j} \ + \ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, \frac{\partial G_i(x_0)}{\partial x_j} \ = \ 0. \tag{V.81}$$

Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ bezeichnet man als **Lagrangesche Multiplikatoren**.

Beweis. Nach Voraussetzung (V.77) gibt es $1 \le j_1 < j_2, \cdots < j_N \le M$, so dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial x_{j_N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial x_{j_N}} \end{pmatrix} \tag{V.82}$$

invertibel ist. Nach geeigneter Umbenennung der Variablen $x_1, \ldots, x_M$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass

$$j_1 = M - N + 1,\ j_2 = M - N + 2, \ldots,\ j_N = M - N + N = M. \tag{V.83}$$

Schreiben wir nun $x = (w, z)^T$, wobei

$$w = (x_1, \ldots, x_{M-N})^T, \qquad z = (x_{M-N+1}, \ldots, x_M)^T, \tag{V.84}$$

$x_0 = (w_0, z_0)$ und entsprechend auch

$$G'(x_0) \;=\; (A_w, A_z), \tag{V.85}$$

mit

$$A_w := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial w_1} & \ldots & \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial w_{M-N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial w_1} & \ldots & \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial w_{M-N}} \end{pmatrix}, \quad A_z := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial z_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial z_N} \end{pmatrix}, \tag{V.86}$$

so ist nach (V.82) die Matrix A_z invertibel. Nach dem Satz V.3 über die implizite Funktion ist deshalb die Gleichung $G(x) = 0$ lokal bei x_0 nach z auflösbar, d.h. es gibt eine offene Menge $w_0 \in W \subseteq \mathbb{R}^{M-N}$ und eine Funktion $h \in C^1(W; \mathbb{R}^N)$, so dass $h(w_0) = z_0$,

$$\forall\, (w, z) \in (W \times \mathbb{R}^N) \cap U : \quad \big(G(w, z) = 0\big) \;\Leftrightarrow\; \big(z = h(w)\big). \tag{V.87}$$

Außerdem ist

$$h'(w_0) \;=\; -A_z^{-1} \circ A_w. \tag{V.88}$$

Wir zeigen nun, dass w_0 ein lokales Minimum der Funktion $\widetilde{F} \in C^1(W; \mathbb{R})$,

$$\widetilde{F}(w) \;:=\; F[w, h(w)] \tag{V.89}$$

ist. Dazu wählen wir $\delta' > 0$ so klein, dass $B(w_0, 3\delta') \subseteq W$ ist und setzen

$$\mu \;:=\; \max\Big\{ \|h'(w)\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{M-N}; \mathbb{R}^N)} \;\Big|\; w \in \overline{B(w_0, 2\delta')} \Big\} \;<\; \infty, \tag{V.90}$$

als Maximum einer stetigen Funktion auf einer kompakten Kugel. Für $w \in B(w_0, \delta')$ ist dann, nach dem Satz von Taylor mit $k = 0$,

$$\begin{aligned} \Big\| \big(w, h(w)\big) - x_0 \Big\|_{\mathbb{R}^M}^2 \;&= \|w - w_0\|_{\mathbb{R}^{M-N}}^2 \;+\; \|h(w) - z_0\|_{\mathbb{R}^N}^2 \\ &= \|w - w_0\|_{\mathbb{R}^{M-N}}^2 \;+\; \|h(w) - h(w_0)\|_{\mathbb{R}^N}^2 \\ &= \|w - w_0\|_{\mathbb{R}^{M-N}}^2 \;+\; \Big\| \int_0^1 h'\big(w_0 + s(w - w_0)\big)\, [w - w_0]\, ds \Big\|_{\mathbb{R}^N}^2 \\ &\leq (1 + \mu^2)\, \|w - w_0\|_{\mathbb{R}^{M-N}}^2. \end{aligned} \tag{V.91}$$

Setzen wir nun $\delta'' := \frac{1}{2}(1 + \mu^2)^{-1/2} \cdot \min\{\delta, \delta'\} > 0$, so gilt

$$\forall\, w \in B(w_0, \delta'') : \quad \Big\| \big(w, h(w)\big) - x_0 \Big\|_{\mathbb{R}^M} \;\leq\; (1 + \mu^2)^{1/2}\, \|w - w_0\| \;<\; \delta, \tag{V.92}$$

also $(w, h(w)) \in B(w_0, \delta)$. Mit (V.79) und (V.87) erhalten wir damit also, für jedes $w \in B(w_0, \delta'')$,

$$\widetilde{F}(w) \;=\; F[w, h(w)] \;\geq\; F(x_0) \;=\; F[w_0, h(w_0)] \;=\; \widetilde{F}(w_0), \tag{V.93}$$

und $w_0 \in W$ ist ein lokales Minimum von $\widetilde{F}$, wie behauptet.
Nach Satz V.3 ist damit $w_0 \in W$ ein kritischer Punkt, $\widetilde{F}'(w_0) = 0$, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}_1^{M-N}$ gilt

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \frac{\partial \widetilde{F}(w_0)}{\partial w_k} \;=\; \frac{\partial}{\partial w_k} \Big(F[w, h(w)] \Big) \Big|_{w=w_0} \\
&= \frac{\partial F[w_0, h(w_0)]}{\partial w_k} \;+\; \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F[w_0, h(w_0)]}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial h_i(w_0)}{\partial w_k} \\
&= \frac{\partial F(x_0)}{\partial w_k} \;-\; \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_i} \cdot (A_z^{-1})_{i,j} \, (A_w)_{j,k} \\
&= \frac{\partial F(x_0)}{\partial w_k} \;-\; \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_i} \, (A_z^{-1})_{i,j} \Big\} \frac{\partial G_j(x_0)}{\partial w_k}.
\end{aligned} \tag{V.94}$$

Setzen wir nun, für $j = 1, 2, \ldots, N$,

$$\lambda_j \;:=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_i} \cdot (A_z^{-1})_{i,j} \tag{V.95}$$

so folgt unmittelbar

$$\forall\, k = 1, 2, \ldots, M-N: \quad \frac{\partial F(x_0)}{\partial w_k} \;-\; \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, \frac{\partial G_j(x_0)}{\partial w_k} \;=\; 0. \tag{V.96}$$

Multiplizieren wir (V.95) mit $(A_z)_{i,\ell} = \frac{\partial G_j(x_0)}{\partial z_\ell}$ und summieren über $j = 1, \ldots, N$, so erhalten wir, für alle $\ell = 1, 2, \ldots, N$,

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_i} \, (A_z^{-1})_{i,j} \;-\; \lambda_j \Big\} \, (A_z)_{i,\ell} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_i} \underbrace{\Big\{ \sum_{j=1}^{N} (A_z^{-1})_{i,j} \, (A_z)_{j,\ell} \Big\}}_{=\, \delta_{i,\ell}} \;-\; \sum_{j=1}^{N} \lambda_j (A_z)_{i,\ell} \\
&= \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_\ell} \;-\; \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, \frac{\partial G_j(x_0)}{\partial z_\ell}.
\end{aligned} \tag{V.97}$$

Fügen wir (V.96) und (V.97) mit $(w_1, \ldots, w_{M-N}) = (x_1, \ldots, x_{M-N})$ und $(z_1, \ldots, z_N) = (x_{M-N+1}, \ldots, x_M)$ zusammen, so erhalten wir (V.81),

$$\forall k = 1, \ldots, M: \qquad \frac{\partial F(x_0)}{\partial x_k} \; - \; \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, \frac{\partial G_j(x_0)}{\partial x_k} \; = \; 0. \tag{V.98}$$

□

Bemerkungen und Beispiele. Zur Illustration betrachten wir noch ein Beispiel. Wie im motivierenden Beispiel ist $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ gegeben durch

$$F(x, y) \; := \; (x - a)^2 + (y - b)^2, \tag{V.99}$$

allerdings wollen wir jetzt F unter der Nebenbedingung $G(x, y) = 0$ minimieren, wobei

$$G(x, y) \; := \; x^2 + y^2 - 1. \tag{V.100}$$

Es sind also $M = 2$, $N = 1$ und, mit $x_0 = (x_0, y_0)$,

$$\frac{\partial F(x_0)}{\partial x} + \lambda \, \frac{\partial G(x_0)}{\partial x} \; = 2 \big((x_0 - a) + \lambda x_0 \big) \; = \; 0, \tag{V.101}$$

$$\frac{\partial F(x_0)}{\partial y} + \lambda \, \frac{\partial G(x_0)}{\partial y} \; = 2 \big((y_0 - b) + \lambda y_0 \big) \; = \; 0. \tag{V.102}$$

Somit ist $\lambda \neq -1$, und es gilt

$$x_0 \; = \; \frac{a}{1 + \lambda}, \qquad y_0 \; = \; \frac{b}{1 + \lambda}. \tag{V.103}$$

Durch Einsetzen in die Nebenbedingungen erhalten wir dann

$$\begin{aligned} 0 \; = \; G(x_0, y_0) \; &= \; \Big(\frac{a}{1 + \lambda} \Big)^2 + \Big(\frac{b}{1 + \lambda} \Big)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow (1 + \lambda)^2 \; &= \; a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow \lambda_\pm \; &= \; \pm \sqrt{a^2 + b^2} - 1. \end{aligned} \tag{V.104}$$

Daher sind

$$(x_0^\pm, y_0^\pm) \; = \; \pm \Big(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Big) \tag{V.105}$$

die beiden Möglichkeiten für das gesuchte Minimum. Wegen

$$\begin{aligned} F(x_0^-, y_0^-) \; &= \; \Big(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + a \Big)^2 \; + \; \Big(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + b \Big)^2 \\ &= \Big(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 1 \Big)^2 (a^2 + b^2) \; > \; \Big(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} - 1 \Big)^2 (a^2 + b^2) \\ &= F(x_0^+, \, y_0^+), \end{aligned} \tag{V.106}$$

ist somit

$$(x_0^+, y_0^+) \; = \; \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \, (a, b) \tag{V.107}$$

die Lösung des Minimierungsproblems (V.99)–(V.100).

V.4. Ergänzungen

V.4.1. Beweis von Lemma V.1

Beweis. Wir definieren drei Folgen

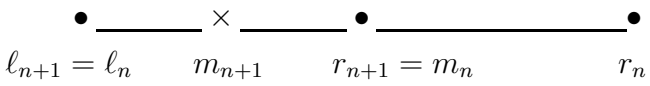
$$(\ell_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (m_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (r_n)_{n=1}^{\infty}, \qquad (\underline{\text{l}}\text{inks}, \underline{\text{m}}\text{itte}, \underline{\text{r}}\text{echts}) \tag{V.108}$$

in S durch folgende Rekursion. Wir setzen

$$\ell_1 := x, \quad m_1 := \frac{1}{2}(x + x'), \quad r_1 := x'. \tag{V.109}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir dann

$$\ell_{n+1} := \ell_n, \quad m_{n+1} := \frac{1}{2}(\ell_n + m_n), \quad r_{n+1} := m_n, \tag{V.110}$$

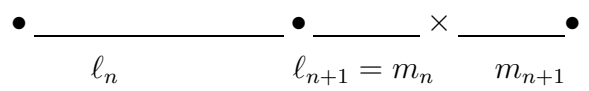


falls

$$\big\|F(\ell_n) - F(m_n)\big\|_Y \;\geq\; \big\|F(m_n) - F(r_n)\big\|_Y, \tag{V.111}$$

und

$$\ell_{n+1} := m_n, \quad m_{n+1} := \frac{1}{2}\left(m_n + r_n\right), \quad r_{n+1} := r_n, \tag{V.112}$$



falls

$$\|F(\ell_n) - F(m_n)\|_Y \;<\; \|F(m_n) - F(r_n)\|_Y. \tag{V.113}$$

Somit gelten stets:

$$\|\ell_n - m_n\|_X \;=\; \|m_n - r_n\|_X \;=\; \frac{1}{2}\|\ell_n - r_n\|_X \;=\; 2^{-n}\,\|x - x'\|_X \tag{V.114}$$

und

$$\|F(\ell_{n+1}) - F(r_{n+1})\|_Y = \max\big\{\|F(\ell_n) - F(m_n)\|_Y,\; \|F(m_n) - F(r_n)\|_Y\big\}. \tag{V.115}$$

Schreiben wir weiter

$$\ell_n = (1 - \alpha_n^{(\ell)})x + \alpha_n^{(\ell)}x', \quad m_n = (1 - \alpha_n^{(m)})x + \alpha_n^{(m)}x', \quad r_n = (1 - \alpha_n^{(r)})x + \alpha_n^{(r)}x', \tag{V.116}$$

für eindeutige Folgen $\big(\alpha_n^{(\ell)}\big)_{n=1}^{\infty}$, $\big(\alpha_n^{(m)}\big)_{n=1}^{\infty}$, $\big(\alpha_n^{(r)}\big)_{n=1}^{\infty}$ in $[0,1]$, so folgt, dass

$$\alpha_n^{(\ell)} \;\le\; \alpha_{n+1}^{(\ell)} \;\le\; \alpha_{n+1}^{(m)} \;\le\; \alpha_{n+1}^{(r)} \;\le\; \alpha_n^{(r)}. \tag{V.117}$$

Damit sind $\big(\alpha_n^{(\ell)}\big)_{n=1}^{\infty}$ und $(\alpha_n^{(r)})_{n=1}^{\infty}$ monoton und beschränkt, also konvergent. Wegen

$$0 \;\le\; \alpha_n^{(r)} - \alpha_n^{(\ell)} \;=\; \frac{\|r_n - \ell_n\|_X}{\|x - x'\|_X} \;=\; 2^{-n} \tag{V.118}$$

gilt dann sogar, dass alle drei Folgen gegen dieselbe Zahl konvergieren,

$$\alpha_* \;:=\; \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(\ell)} \;=\; \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(m)} \;=\; \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(r)}. \tag{V.119}$$

Definieren wir

$$x_* \;:=\; (1-\alpha_*)x + \alpha_*\, x' \;\in\; S \tag{V.120}$$

so folgt damit

$$x_* \;=\; \lim_{n\to\infty} \ell_n \;=\; \lim_{n\to\infty} m_n \;=\; \lim_{n\to\infty} r_n. \tag{V.121}$$

Wir beobachten nun, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{\|F(\ell_n) - F(r_n)\|_Y}{\|\ell_n - r_n\|_X} \;&=\; \frac{\|F(\ell_n) - F(m_n) + F(m_n) - F(r_n)\|_Y}{2\,\|\ell_{n+1} - r_{n+1}\|_X} \\
&\le\; \frac{1}{2\,\|\ell_{n+1} - r_{n+1}\|_X} \Big\{ \|F(\ell_n) - F(m_n)\|_Y + \|F(m_n) - F(r_n)\|_Y \Big\} \\
&\le\; \frac{1}{\|\ell_{n+1} - r_{n+1}\|_X}\; \max\Big\{ \|F(\ell_n) - F(m_n)\|_Y,\; \|F(m_n) - F(r_n)\|_Y \Big\} \\
&=\; \frac{\|F(\ell_{n+1}) - F(r_{n+1})\|_Y}{\|\ell_{n+1} - r_{n+1}\|_X},
\end{aligned} \tag{V.122}$$

wobei wir $\frac{1}{2}\,(a+b) \le \max\{a,b\}$, für $a, b \ge 0$, benutzt haben. Damit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\|F(x) - F(x')\|_Y}{\|x - x'\|_X} \;&=\; \frac{\|F(\ell_1) - F(r_1)\|_Y}{\|\ell_1 - r_1\|_X} \;\le\; \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\|F(\ell_n) - F(r_n)\|_Y}{\|\ell_n - r_n\|_X} \right\} \\
&\le\; \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\|\ell_n - r_n\|_X} \Big\| \big[F(\ell_n) - F(x_*) - F'(x_*)\cdot(\ell_n - x_*)\big] \right. \\
&\qquad \left. - \big[F(r_n) - F(x_*) - F'(x_*)\cdot(r_n - x_*)\big] \;+\; F'(x_*)\cdot(\ell_n - r_n) \Big\|_Y \right\} \\
&\le\; \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\|F(\ell_n) - F(x_*) - F'(x_*)\cdot(\ell_n - x_*)\|_Y}{\|\ell_n - x_*\|_X} \right\} \\
&\quad +\; \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\|F(r_n) - F(x_*) - F'(x_*)\cdot(r_n - x_*)\|_Y}{\|r_n - x_*\|_X} \right\} \;+\; \|F'(x_*)\|_{\mathcal{B}(X;Y)} \\
&=\; \|F'(x_*)\|_{\mathcal{B}(X;Y)} \;\le\; M.
\end{aligned} \tag{V.123}$$

□