

IV. Richtungsableitung und Extrema

In der Vorlesung über Differentiation einer reellen Funktion f einer reellen Veränderlichen haben wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Extrema, Minima und Maxima gefunden: An einer solchen Stelle gilt notwendig $f' = 0$, und $f'' > 0$ bzw. $f'' < 0$ sind hinreichend dafür, dass diese Stelle ein Minimum bzw. Maximum ist. Ziel dieses Abschnitts ist die Formulierung eines entsprechenden Kriteriums für reelle Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher.

IV.1. Der Satz von Taylor in mehreren Veränderlichen

Dazu verallgemeinern wir als erstes den Satz von Taylor auf mehrere Variablen.

Satz IV.1 (Taylor). Seien $M \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $U \subset \mathbb{R}^M$ eine offene Teilmenge. Seien weiterhin $x_0 \in U$ und $z \in \mathbb{R}^M$, so dass

$$S := \{x_0 + tz \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U, \quad (\text{IV.1})$$

und sei $F \in C^{k+1}(U; \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x_0 + z) &= \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^M \frac{\partial^p F(x_0)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}} \cdot z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdots z_{j_p} \\ &\quad + \sum_{j_1, \dots, j_{k+1}=1}^M \left(\int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} F(x_0 + sz)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k+1}}} ds \right) \cdot z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdots z_{j_{k+1}}, \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

wobei $z = (z_1, \dots, z_M)^T = \sum_{j=1}^M z_j e_j$.

Beweis. Wir definieren

$$f(t) := F(x_0 + tz). \quad (\text{IV.3})$$

Da U offen ist und $\{x_0 + tz \mid 0 \leq t \leq 1\}$ enthält, ist für genügend kleine $\eta > 0$ auch $\tilde{S} := \{x_0 + tz \mid -\eta < t < 1 + \eta\} \subseteq U$. Durch Anwendung der Kettenregel (Satz III.3) auf $f := F \circ G : I \rightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$I := (-\eta, 1 + \eta) \quad \text{und} \quad G : I \rightarrow U, \quad t \mapsto x_0 + tz, \quad (\text{IV.4})$$

erhält man nun leicht, dass

$$f \in C^{k+1}(I; \mathbb{R}). \quad (\text{IV.5})$$

Die Kettenregel sichert nämlich, dass mit $F \in C^1(U; \mathbb{R})$ und $G \in C^1(I; U)$ auch $f \in C^1(I; \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} f'(s) &= F'(x_0 + sz) \cdot G'(s) \\ &= \left(\frac{\partial F(x_0 + sz)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(x_0 + sz)}{\partial x_M} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(s)}{\partial s} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_M(s)}{\partial s} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F(x_0 + sz)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(x_0 + sz)}{\partial x_M} \right) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_M \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j_1=1}^M \frac{\partial F(x_0 + sz)}{\partial x_{j_1}} \cdot z_{j_1}. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Setzen wir nun

$$F_1(x) := \sum_{j_1=1}^M \frac{\partial F(x)}{\partial x_{j_1}} z_{j_1}, \quad (\text{IV.7})$$

so ist $F_1 \in C^k(U; \mathbb{R})$ und

$$f'(s) = (F_1 \circ G)(s). \quad (\text{IV.8})$$

Abermals erhalten wir dann aus der Kettenregel, dass $f' \in C^1(I; \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} f''(s) &= (f'(s))' = F_1'(x_0 + sz) \cdot G'(s) \\ &= \sum_{j_2=1}^M \frac{\partial F_1(x_0 + sz)}{\partial x_{j_2}} \cdot z_{j_2} = \sum_{j_1, j_2=1}^M \frac{\partial^2 F(x_0 + sz)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} \cdot z_{j_1} z_{j_2}, \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

wobei wir die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen gemäß Satz III.11 verwenden.

Nach $(k+1)$ -maliger Anwendung dieses Arguments erhalten wir dann, dass $f \in C^{k+1}(I; \mathbb{R})$ – wie in (IV.5) behauptet – und dass

$$f^{(p)}(s) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^M \frac{\partial^p F(x_0 + sz)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_p}} z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdots z_{j_p}, \quad (\text{IV.10})$$

für alle $p = 0, 1, \dots, k+1$. Nun wenden wir den Satz von Taylor auf f an und erhalten, für alle $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{p=0}^K \frac{t^p}{p!} f^{(p)}(0) + \int_0^t \frac{(t-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds, \quad (\text{IV.11})$$

und insbesondere für $t = 1 \in I$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F(x_0 + z) &= f(1) = \sum_{p=0}^K \frac{f^{(p)}(0)}{p!} + \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \\ &= \sum_{p=0}^K \frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^K \frac{\partial^p F(x_0)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}} z_{j_1} \dots z_{j_p} \\ &\quad + \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_{k+1}=1}^M \left(\int_0^1 (1-s)^k \frac{\partial^{k+1} F(x_0 + sz)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k+1}}} ds \right) \cdot z_{j_1} \dots z_{j_{k+1}}. \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

□

Korollar IV.2. Seien $M \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine offene Teilmenge. Seien $x_0 \in U$ und $x \in \mathbb{R}^M$, so dass

$$S := \{x_0 + tz \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U, \quad (\text{IV.13})$$

und sei $F \in C^{k+1}(U; \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x_0 + z) &= \sum_{p=1}^k \sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = k+1}}^p \left(\frac{\partial^p F(x_0)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_M^{p_M}} \right) \cdot \left(\frac{z_1^{p_1} \dots z_M^{p_M}}{p_1! \dots p_M!} \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = k+1}}^{k+1} \left(\int_0^1 (k+1)(1-s)^k \left(\frac{\partial^{k+1} F(x_0 + sz)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_M^{p_M}} \right) ds \right) \cdot \left(\frac{z_1^{p_1} \dots z_M^{p_M}}{p_1! \dots p_M!} \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Bemerkungen und Beispiele. Für $M = 2$, $U := \mathbb{R}^2$ und $F(x_1, x_2) := \cos(x_1) + \cos(x_2)$ ist offensichtlich $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Der Graph von F ähnelt einem Eierkarton. Wir wenden nun Satz IV.1 für $k = 2$ an und erhalten mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -\sin x_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -\sin x_2, \quad (\text{IV.15})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = -\cos x_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -\cos x_2, \quad (\text{IV.16})$$

dass

$$\begin{aligned} F(x + z) &= \cos(x_1) + \cos(x_2) - z_1 \cdot \sin(x_1) - z_2 \cdot \sin(x_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} z_1^2 \cdot \cos(x_1) - \frac{1}{2} z_2^2 \cdot \cos(x_2) + R_3 \cdot \|z\|_{\text{eukl}}^3, \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

wobei

$$R_3 = \sum_{j_1, \dots, j_3=1}^2 \left(\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2!} \frac{\partial^3 F(x+sz)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}} ds \right) \cdot \left(\frac{z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdot z_{j_3}}{\|z\|_{\text{eukl}}^3} \right) \quad (\text{IV.18})$$

und deshalb

$$\begin{aligned} |R_3| &\leq \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \left(\frac{\partial^3 F(x+sz)}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 F(x+sz)}{\partial x_2^3} \right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \left\{ \sin(x_1 + sz_1) + \sin(x_2 + sz_2) \right\} ds, \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \{1+1\} (1-s)^2 ds = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

gilt.

IV.2. Gradient, Richtungsableitung und Hessesche Matrix

Definition IV.3. Seien $M \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine nichtleere offene Teilmenge und $x \in U$.

(i) Für $F \in C^1(U; \mathbb{R})$ bezeichnen wir den Spaltenvektor

$$\nabla F(x) := (F'(x))^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_M} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

als **Gradient von F bei x** und

$$\langle \nabla F(x) | z \rangle = \sum_{j=1}^M \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \cdot z_j \quad (\text{IV.21})$$

heißt **Richtungsableitung von F bei x in Richtung z**, wobei $\langle x | y \rangle := \sum_{j=1}^M x_j y_j$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^M$ bezeichnet.

(ii) Für $F \in C^2(U; \mathbb{R})$ heißt $\text{Hess } F(x) \in \mathfrak{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$,

$$(\text{Hess } F(x))_{i,j} \equiv (F''(x))_{ij} := \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{IV.22})$$

Hessesche Matrix von F bei x.

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir betrachten nun einen Vektor $z = (z_1, \dots, z_M) \in \mathbb{R}^M$ der Länge 1, d.h. $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_M^2 = 1$, und bilden für $F \in C^1(U; \mathbb{R})$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ offen und $x \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(x+tz) - F(x)}{t} \right\} = \sum_{j=1}^M \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \cdot z_j = \langle \nabla F(x) | z \rangle. \quad (\text{IV.23})$$

Es gilt also

$$F(x + tz) = F(x) + t[\langle \nabla F(x) | z \rangle + r(t)], \quad (\text{IV.24})$$

mit $\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = 0$. Die Richtungsableitung gibt also an, wie stark F an der Stelle x in Richtung z wächst.

- Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir weiter, dass

$$|\langle \nabla F(x) | z \rangle| \leq \|\nabla F(x)\| \cdot \|z\| = \|\nabla F(x)\|. \quad (\text{IV.25})$$

Andererseits hat aber $\|\nabla F(x)\|^{-1} \cdot \nabla F(x)$, für $\nabla F(x) \neq 0$, die Länge 1, und es gilt

$$\left\langle \nabla F(x) \left| \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|} \right. \right\rangle = \frac{\|\nabla F(x)\|^2}{\|\nabla F(x)\|} = \|\nabla F(x)\|. \quad (\text{IV.26})$$

Also ist

$$\|\nabla F(x)\| = \max \left\{ \langle \nabla F(x) | z \rangle \mid z \in \mathbb{R}^M, \|z\| = 1 \right\}, \quad (\text{IV.27})$$

und somit ist die Richtungsableitung maximal, wenn z parallel zum Gradienten gewählt wird. Anders ausgedrückt, *liegt der Gradient einer Funktion bei x in Richtung des größtmöglichen Anstiegs von F .*

- Außerdem steht der Gradient von F bei x senkrecht zur zu x gehörigen Niveaumenge. Ist nämlich $\alpha \in C^\infty((a, b); \mathcal{N}_E)$ eine Kurve in

$$\mathcal{N}_E = \{x \in U \mid F(x) = E\} = F^{-1}(E), \quad (\text{IV.28})$$

so folgt sofort, dass

$$0 = \frac{d}{ds}(E) = \frac{d}{ds}[(F \circ \alpha)(s)] = \sum_{j=1}^M \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{d\alpha_j(s)}{ds} = \left\langle \nabla F(x) \left| \frac{d\alpha(s)}{ds} \right. \right\rangle. \quad (\text{IV.29})$$

IV.3. Kritische Punkte und Extremalwerte bei mehreren Veränderlichen

Definition IV.4. Seien (M, ρ) ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

$$x_0 \in U \text{ lokales } \left\{ \begin{array}{c} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \right\} \text{ von } F$$

$$:\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall x \in B_\rho(x_0, \delta) \cap U : \left\{ \begin{array}{c} F(x) \geq F(x_0) \\ F(x) \leq F(x_0) \end{array} \right\}. \quad (\text{IV.30})$$

Definition IV.5. Seien X ein Banach-Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $F \in C^1(U; \mathbb{R})$. Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt **kritisch** (oder **extremal**)

$$:\Leftrightarrow \quad F'(x_0) = 0. \quad (\text{IV.31})$$

Bemerkungen und Beispiele. Im Fall, dass $X = \mathbb{R}^M$, bedeutet (IV.31)

$$x_0 \in U \text{ ist kritisch} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla F(x_0) = 0. \quad (\text{IV.32})$$

Satz IV.6. Seien X ein Banach-Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $F \in C^1(U; \mathbb{R})$. Dann gelten

$$(i) \quad \left(x_0 \in U \text{ ist lokales Minimum von } F \right) \implies \left(F'(x_0) = 0 \right). \quad (\text{IV.33})$$

$$(ii) \quad \left(x_0 \in U \text{ ist lokales Maximum von } F \right) \implies \left(F'(x_0) = 0 \right). \quad (\text{IV.34})$$

Beweis. Wir zeigen nur (i), (ii) ist analog. Seien also $x_0 \in U$ ein lokales Minimum von F und $\delta > 0$ wie in (IV.30). Da $U \subseteq X$ offen ist, gibt es ein $\delta' > 0$, sodass $B_\rho(x_0, \delta') \subseteq U$. Nach (IV.30) gilt also, mit $\delta'' := \min\{\delta, \delta'\} > 0$, dass

$$\forall z \in B_\rho(x_0, \delta'') : \quad F(x_0 + z) - F(x_0) \geq 0. \quad (\text{IV.35})$$

Für $z \in X$ mit $\|z\| = 1$ und $t \in (0, \delta'')$ ist $\pm tz \in B_\rho(x_0, \delta'')$ und deshalb

$$\pm F'(x_0)z = \frac{1}{t} F'(x_0)(\pm tz) = \lim_{t \searrow 0} \left\{ \frac{F(x_0 \pm tz) - F(x_0)}{t} \right\} \geq 0. \quad (\text{IV.36})$$

Für alle $z \in X$ mit $\|z\| = 1$ muss daher $F'(x_0)z = 0$ gelten. Ist nun $w \in X \setminus \{0\}$, so setzen wir $z_w := \|w\|^{-1}w$ und beobachten, dass $\|z_w\| = 1$. Deshalb gilt

$$\forall w \in X \setminus \{0\} : \quad F'(x_0)w = \|w\|(F'(x_0)z_w) = 0, \quad (\text{IV.37})$$

was für $w = 0$ trivial richtig ist. $\square$

Korollar IV.7. Seien $M \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine nichtleere offene Teilmenge und $F \in C^1(U; \mathbb{R})$. Dann gelten

$$(i) \quad \left(x_0 \in U \text{ ist lokales Minimum von } F \right) \implies \left(\nabla F(x_0) = 0 \right). \quad (\text{IV.38})$$

$$(ii) \quad \left(x_0 \in U \text{ ist lokales Maximum von } F \right) \implies \left(\nabla F(x_0) = 0 \right). \quad (\text{IV.39})$$

Bemerkungen und Beispiele. Wir kommen nun auf das Beispiel (IV.15)–(IV.19)

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto F(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2) \quad (\text{IV.40})$$

zurück. Die Menge $\mathcal{E}$ der Extrempunkte von F ist gegeben durch

$$\mathcal{E} := \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla F(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1) \\ -\sin(x_2) \end{pmatrix} = 0 \right\} = \pi\mathbb{Z} \times \pi\mathbb{Z}. \quad (\text{IV.41})$$

Dabei sind etwa $(0, 0) \in \mathcal{E}$ ein lokales Maximum und $(\pi, \pi) \in \mathcal{E}$ ein lokales Minimum, jedoch sind z.B. $(0, \pi), (\pi, 0) \in \mathcal{E}$ weder lokale Minima noch lokale Maxima, sondern Sattelpunkte.

Wie in der Kurvendiskussion für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen, lassen sich hinreichende Bedingungen für die Existenz eines lokalen Maximums oder Minimums durch die zweiten (oder höheren) Ableitungen formulieren.

Sei $F \in C^2(U; \mathbb{R})$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine offene Teilmenge ist. Dann ist nach Satz III.8

$$\forall x \in U, i, j \in \mathbb{N}_1^M : \quad (F''(x))_{i,j} = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j \partial x_i} = (F''(x))_{j,i} \in \mathbb{R}, \quad (\text{IV.42})$$

d.h. die Hessesche Matrix von F ist reell und symmetrisch und somit *selbstadjungiert*. Wir verwenden im Folgenden eine Variante des Spektralsatzes für selbstadjungierte Matrizen, der in der linearen Algebra bewiesen wird. Wir beschränken uns hier auf den Fall reeller, symmetrischer Matrizen.

Satz IV.8 (Spektralsatz). Seien $M \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathfrak{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$ eine reelle, selbstadjungierte Matrix, $A_{i,j} = A_{j,i} \in \mathbb{R}, \forall i, j \in \{1, \dots, M\}$. Dann sind alle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}$ reell, und es gibt eine ONB $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, M} \subseteq \mathbb{R}^M$ aus zugehörigen Eigenvektoren von A , so dass

$$\forall \alpha = 1, \dots, M : \quad A\varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha. \quad (\text{IV.43})$$

Explizit gilt mit $\varphi_\alpha = \sum_{i=1}^M \varphi_\alpha(i) e_i$ sogar

$$\forall i, j = 1, \dots, M : \quad A_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha \varphi_\alpha(i) \varphi_\alpha(j). \quad (\text{IV.44})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ von A durchaus nicht alle paarweise verschieden sein müssen.
- Weiterhin bemerken wir, dass die Transformationsmatrix U , die die kanonische Basis $\{e_1, \dots, e_M\}$ mit $Ue_i = \varphi_i$ auf die ONB $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ aus Eigenvektoren von A abbildet, **orthogonal** ist, $U \in O(M)$, d.h. $UU^T = U^T U = \mathbb{1}$. Wegen

$$U_{ij} = \varphi_j(i), \quad (U^T)_{k\ell} = \varphi_k(\ell), \quad (\text{IV.45})$$

folgt daraus, dass

$$\sum_{\alpha=1}^M \varphi_\alpha(i) \varphi_\alpha(\ell) = (UU^T)_{i\ell} = (\mathbb{1})_{i,\ell} = \delta_{i,\ell}, \quad (\text{IV.46})$$

$$\sum_{j=1}^M \varphi_\alpha(j) \varphi_\beta(j) = (U^T U)_{\alpha\beta} = (\mathbb{1})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha,\beta}. \quad (\text{IV.47})$$

Definition IV.9. Seien $M \in \mathbb{N}$, $A = A^T \in \mathfrak{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$ eine selbstadjungierte Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}$.

$$(i) \quad A \text{ hei\ss t } \mathbf{positiv definit} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \alpha = 1, \dots, M : \quad \lambda_\alpha > 0; \quad (\text{IV.48})$$

$$(ii) \quad A \text{ hei\ss t } \mathbf{positiv semidefinit} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \alpha = 1, \dots, M : \quad \lambda_\alpha \geq 0; \quad (\text{IV.49})$$

$$(iii) \quad A \text{ hei\ss t } \mathbf{negativ definit} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \alpha = 1, \dots, M : \quad \lambda_\alpha < 0; \quad (\text{IV.50})$$

$$(iv) \quad A \text{ hei\ss t } \mathbf{negativ semidefinit} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \alpha = 1, \dots, M : \quad \lambda_\alpha \leq 0; \quad (\text{IV.51})$$

$$(v) \quad A \text{ hei\ss t } \mathbf{indefinit} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \alpha, \beta \in \{1, \dots, M\} : \quad \lambda_\alpha > 0, \lambda_\beta < 0. \quad (\text{IV.52})$$

Lemma IV.10 (Minimax-Prinzip). Seien $M \in \mathbb{N}$ und $A = A^T \in \mathfrak{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$ eine reelle, selbstadjungierte Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M$. Dann gilt

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\langle x | Ax \rangle}{\langle x | x \rangle} \mid x \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\} \right\} \leq \max \left\{ \frac{\langle x | Ax \rangle}{\langle x | x \rangle} \mid x \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\} \right\} = \lambda_M. \quad (\text{IV.53})$$

Beweis. Aus (IV.44) erhalten wir, mit $x = \sum_{i=1}^M x_i e_i$,

$$\begin{aligned} \langle x | Ax \rangle &= \sum_{i,j=1}^M x_i A_{i,j} x_j = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{i,j=1}^M \lambda_\alpha x_i \varphi_\alpha(i) \varphi_\alpha(j) x_j \\ &= \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha \underbrace{\left(\sum_{i=1}^M x_i \varphi_\alpha(i) \right)^2}_{\geq 0} \leq \lambda_M \sum_{\alpha=1}^M \left(\sum_{i=1}^M x_i \varphi_\alpha(i) \right)^2 \\ &= \lambda_M \sum_{i,j=1}^M x_i \underbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^M \varphi_\alpha(i) \varphi_\alpha(j) \right)}_{=\delta_{i,j}} x_j = \lambda_M \sum_{i=1}^M x_i^2 = \lambda_M \|x\|^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

Genauso beweist man $\langle x | Ax \rangle \geq \lambda_1 \|x\|^2$. Somit gilt

$$\lambda_1 \leq \min \left\{ \frac{\langle x | Ax \rangle}{\langle x | x \rangle} \mid x \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\} \right\} \leq \max \left\{ \frac{\langle x | Ax \rangle}{\langle x | x \rangle} \mid x \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\} \right\} \leq \lambda_M. \quad (\text{IV.55})$$

Die in (IV.53) behaupteten Gleichungen folgen nun durch Einsetzen speziell von $x := \varphi_1$ bzw. $x := \varphi_M$. $\square$

Satz IV.11. Seien $M \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine offene und nichtleere Teilmenge, $F \in C^2(U; \mathbb{R})$ und $x_0 \in U$ ein Extrempunkt, $\nabla F(x_0) = 0$. Dann gelten:

- (i) Ist die Hessesche Matrix $F''(x_0)$ von F bei x_0 positiv definit, so ist x_0 ein lokales Minimum.
- (ii) Ist die Hessesche Matrix $F''(x_0)$ von F bei x_0 negativ definit, so ist x_0 ein lokales Maximum.

Beweis. Wir beweisen nur (i), der Beweis für (ii) ist analog. Zunächst bemerken wir, dass die positive Definitheit von $F''(x_0)$ und die Stetigkeit von F'' in U impliziert, dass auch $F''(x)$ positiv definit ist, falls $\|x - x_0\|$ genügend klein ist. Sind $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M$ die Eigenwerte von $F''(x_0)$ und $z \in \mathbb{R}^M$, so gilt nämlich nach Lemma IV.10

$$\begin{aligned} \langle z | F''(x) z \rangle &= \langle z | F''(x_0) z \rangle + \langle z | [F''(x) - F''(x_0)] z \rangle \\ &\geq \lambda_1 \|z\|^2 - \|z\| \cdot \|[F''(x) - F''(x_0)] z\| \\ &\geq \{\lambda_1 - \|F''(x) - F''(x_0)\|_{B(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^M)}\} \cdot \|z\|^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

Wählen wir nun $\delta > 0$ so klein, dass $\|F''(x) - F''(x_0)\| \leq \lambda_1/2$, für $x \in B_\delta(x_0)$, so folgt dann

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \quad \forall z \in \mathbb{R}^M : \quad \langle z | F''(x) z \rangle \geq \frac{\lambda_1}{2} \|z\|^2. \quad (\text{IV.57})$$

Nun wenden wir den Satz IV.1 von Taylor mit $k = 1$ auf F für x_0 und $z \in B(0, \delta)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} F(x_0 + z) - F(x_0) &= \underbrace{\langle \nabla F(x_0) | z \rangle}_{=0} + \sum_{i,j=1}^M \int_0^1 (1-s) z_i z_j \left(\frac{\partial^2 F(x_0 + sz)}{\partial x_i \partial x_j} \right) ds \\ &= \int_0^1 (1-s) \underbrace{\langle z | F''(x_0 + sz) z \rangle}_{\geq \lambda_1 \|z\|^2/2} ds \geq \frac{\lambda_1}{4} \|z\|^2 > 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.58})$$

da $\{x_0 + sz \mid 0 \leq s \leq 1\} \subseteq B_\delta(x_0)$. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass aus (IV.58) ersichtlich ist, dass das Minimum bei x_0 auch nicht entartet ist, d.h. dass $F(x_0 + z) > F(x_0)$ für alle $z \in B(x_0, \delta) \setminus \{0\}$ gilt.
- Betrachten wir abermals $F(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ mit kritischen Punkten

$$\mathcal{E} = \{(n_1\pi, n_2\pi) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}. \quad (\text{IV.59})$$

Mit

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = -\cos(x_1), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -\cos(x_2) \quad (\text{IV.60})$$

ist dann

$$F''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\cos(x_1) & 0 \\ 0 & -\cos(x_2) \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.61})$$

Nun ist

$$-\cos(n\pi) = \begin{cases} -1, & \text{falls } n \in 2\mathbb{Z}, \\ +1, & \text{falls } n \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases} \quad (\text{IV.62})$$

Also zerfällt $\mathcal{E} = \pi\mathbb{Z} \times \pi\mathbb{Z}$ in disjunkte Teilmengen,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}) \dot{\cup} (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi) \dot{\cup} \\ & (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z}) \dot{\cup} (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi), \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

und

$$F'' \text{ ist } \begin{cases} \text{positiv definit auf} & (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi), \\ \text{negativ definit auf} & (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}), \\ \text{indefinit auf} & (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi) \cup (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z}). \end{cases} \quad (\text{IV.64})$$

Entsprechend sind

- $(0, 0) \in (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z})$ ein lokales Maximum, da $F''(0, 0)$ negativ definit ist,
 - $(\pi, \pi) \in (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi)$ ein lokales Minimum, da $F''(\pi, \pi)$ positiv definit ist und
 - $(0, \pi), (\pi, 0) \in (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z}) \cup (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi)$ sind Sattelpunkte, da $F''(0, \pi)$ und $F''(\pi, 0)$ indefinit sind.
- Tatsächlich kann man im Fall, dass x_0 ein kritischer Punkt mit *indefiniten* Hesseschen Matrix $F''(x_0)$ zeigen, dass die Eigenvektoren $\{\varphi_\alpha\}$ zu negativen Eigenwerten die Richtungen angeben, in denen F lokal maximal ist. Genauso geben die Eigenvektoren $\{\varphi_\alpha\}$ zu positiven Eigenwerten die Richtungen an, in denen F lokal minimal ist.

Wegen dieser geometrischen Interpretation bezeichnet man die durch die Eigenvektoren $\{\varphi_\alpha\}$ definierten Raumrichtungen als *Hauptachsen* und die orthogonale Matrix U , die die Hessesche Matrix diagonalisiert als *Hauptachsentransformation*.

- Sind $U = \mathbb{R}^2$ und $F(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2^4$, so ist

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -4x_2^3 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \{(0, 0)\}, \quad (\text{IV.65})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -12x_2^2, \quad (\text{IV.66})$$

Somit ist

$$F''(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.67})$$

positiv semidefinit. Der Punkt $x = (0, 0)$ ist aber kein lokales Minimum. Wir sehen an diesem Beispiel, dass sich Satz IV.11 nicht auf kritische Punkte mit positiv semidefiniten Hesseschen Matrix verallgemeinern lässt.

Definition IV.12. Seien $M \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine offene und nichtleere Teilmenge und $F \in C^2(U; \mathbb{R})$. Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt **Sattelpunkt** $:\Leftrightarrow x_0$ ist extremal, $\nabla F(x_0) = 0$, und

$$\exists \delta > 0, z_{\pm} \in \mathbb{R}^M \forall 0 < t < \delta : \quad F(x_0 + tz_-) < F(x_0) < F(x_0 + tz_+). \quad (\text{IV.68})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist x_0 ein Extrempunkt von F mit indefiniter Hesseschen Matrix $F''(x_0)$, so ist x_0 auch ein Sattelpunkt von F .

IV.4. Ergänzungen

IV.4.1. Beweis von Korollar IV.2

Beweis. Korollar IV.2 folgt unmittelbar aus Satz IV.1 und der Identität

$$\frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^M \frac{\partial^p F(x)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}} = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p}}^p \frac{1}{p_1! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^p F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_M^{p_M}}, \quad (\text{IV.69})$$

die wir nun für alle $x \in U$ und $p \in \{0, 1, \dots, k+1\}$ durch Induktion in p zeigen wollen. Offenbar sind beide Seiten in (IV.69) gleich $F(x)$, für $p = 0$. Gilt nun (IV.69) für $p \in \{0, 1, \dots, k\}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_{p+1}=1}^M \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}}} &= \sum_{j_{p+1}=1}^M \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \left[\frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^m \frac{\partial^p F(x)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}} \right] \\ &= \sum_{j=1}^M \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p}}^p \frac{1}{p_1! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^p F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_j^{p_j} \dots \partial x_M^{p_M}} \right] \\ &= \sum_{j=1}^M \left[\sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p}}^p \frac{1}{p_1! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_j^{p_j+1} \dots \partial x_M^{p_M}} \right] \\ &\stackrel{\tilde{p}_j := p_j+1}{=} \sum_{j=1}^M \left[\sum_{\substack{p_1, \dots, \tilde{p}_j, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + \tilde{p}_j + \dots + p_M = p+1}}^p \frac{\mathbb{1}[\tilde{p}_j \geq 1]}{p_1! \dots (\tilde{p}_j - 1)! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_j^{\tilde{p}_j} \dots \partial x_M^{p_M}} \right] \\ &\stackrel{p_j := \tilde{p}_j}{=} \sum_{j=1}^M \left[\sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p+1}}^p \frac{p_j}{p_1! \dots p_j! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_j^{p_j} \dots \partial x_M^{p_M}} \right], \quad (\text{IV.70}) \end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{\mathbb{1}[\tilde{p}_j \geq 1]}{(\tilde{p}_j - 1)!} = \frac{\mathbb{1}[p_j \geq 1]}{(p_j - 1)!} = \frac{p_j}{p_j!} \quad (\text{IV.71})$$

verwendet haben. Nun vertauschen wir die Summationen und erhalten (IV.69) für $p+1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^M \left[\sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p+1}}^{K+1} \frac{p_j}{p_1! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_M^{p_M}} \right] & \quad (\text{IV.72}) \\ &= \sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p+1}}^{K+1} \underbrace{\left\{ \frac{1}{p+1} \left[\sum_{j=1}^M p_j \right] \right\}}_{=1} \frac{1}{p_1! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_M^{p_M}}. \end{aligned}$$

Nach Induktion gilt damit (IV.69) für alle $p \in \{0, 1, \dots, k+1\}$. $\square$