III. Differentiation vektorwertiger Funktionen

III.1. Totale Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ausschließlich.

Definition III.1. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banach-Räume über $\mathbb{R}$, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ zwei nichtleere offene Teilmengen und $x \in U$.

(i) Eine Abbildung $F : U \to V$ heißt **total differenzierbar** oder **Fréchet-differenzierbar bei x**.

$$:\Leftrightarrow \quad \exists\, A \in \mathcal{B}(X;Y) : \quad \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{\|F(x+z) - F(x) - Az\|_Y}{\|z\|_X} \right\} \; = \; 0. \tag{III.1}$$

In diesem Fall heißt

$$F'(x) \; := \; dF(x) \; := \; A \tag{III.2}$$

totale Ableitung oder **Fréchet-Ableitung von F bei x**.

(ii) Die Abbildung $F : U \to V$ heißt **total differenzierbar auf** U

$$:\Leftrightarrow \quad \forall x \in U : \quad F \text{ ist differenzierbar bei } x. \tag{III.3}$$

In diesem Fall ist $F' : U \to \mathcal{B}(X;Y)$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ sind die linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ reelle 1×1-Matrizen, also reelle Zahlen, $\mathcal{B}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Nach Definition III.1 ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ somit genau dann total differenzierbar bei $x \in \mathbb{R}$, wenn es eine Zahl $f'(x) \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\lim_{z \to 0} \left\{ \frac{|f(x+z) - f(x) - f'(x) \cdot z|}{|z|} \right\} \; = \; \left| \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \right\} - f'(x) \right| \; = \; 0. \tag{III.4}$$

Dies ist aber offensichtlich gleichwertig mit der Existenz von

$$f'(x) \ := \ \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \right\} \ \in \mathbb{R}\,. \tag{III.5}$$

Für $\dim(X) = \dim(Y) = 1$ fällt also totale Differenzierbarkeit mit dem üblichen Begriff der Differenzierbarkeit einer reellen Funktion einer reellen Variablen zusammen.

- Weiterhin bemerken wir, dass die Ableitung einer total differenzierbaren Funktion eindeutig ist. Gilt nämlich (III.1) sowohl für $A \in \mathcal{B}(X;Y)$ als auch für $\widetilde{A} \in \mathcal{B}(X;Y)$, so setzen wir $B := A - \widetilde{A}$. Ist nun $z \in X \setminus \{0\}$ und $t > 0$, so beobachten wir, dass

$$\frac{\|Bz\|_Y}{\|z\|_X} \ = \ \frac{\|B(tz)\|_Y}{\|tz\|_X} \ = \ \lim_{t \to 0} \frac{\|B(tz)\|_Y}{\|tz\|_X}, \tag{III.6}$$

da der zweite Ausdruck gar nicht von t abhängt. Somit ist aber

$$\begin{aligned} \frac{\|B(z)\|_Y}{\|z\|_X} \ &= \ \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\|(A - \widetilde{A})(tz)\|_Y}{\|tz\|_X} \right\} \qquad \text{(III.7)} \\ &\leq \ \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\|F(x+tz) - F(x) - A(tz)\|_Y}{\|tz\|_X} \right\} + \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\|F(x+tz) - F(x) - \widetilde{A}(tz)\|_Y}{\|tz\|_X} \right\} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

also ist $\|Bz\|_Y = 0$, für alle $z \in X$, was $Bz = 0$ und daher $B = A - \widetilde{A} = 0$ impliziert.

- Wir stellen fest, dass die totale Differenzierbarkeit (III.1) von $F : U \to V$ bei $x \in U$ auch äquivalent durch

$$\begin{aligned} &\exists\, F'(x) \in \mathcal{B}(X;Y),\ \delta > 0,\ r_x : B(0,\delta) \to Y \quad \forall z \in B(0,\delta) : \qquad \text{(III.8)} \\ &\qquad F(x+z) - F(x) \ = F'(x)z \ + \ r_x(z)\,\|z\|_X, \quad \text{mit} \quad \lim_{z \to 0} \|r_x(z)\|_Y \ = \ 0 \end{aligned}$$

dargestellt werden kann. In der Tat ist das Restglied $r_x(z)$ in (III.8) gegeben durch $r_x(z) := \|z\|_X^{-1}\big(F(x+z) - F(x) - F'(x)z\big)$.

Lemma III.2. Sind $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ offene Teilmengen zweier Banach-Räume $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $F : U \to V$ total differenzierbar bei $x \in U$, so ist F auch stetig in $x \in U$.

Beweis. Trivial. □

Satz III.3 (Kettenregel)**.** Seien $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ und $W \subseteq Z$ offene Teilmengen dreier $\mathbb{R}$-Banach-Räume $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$, und seien $G : U \to V$ total differenzierbar bei $x \in U$ und $F : V \to W$ total differenzierbar bei $y := G(x) \in V$. Dann ist auch $F \circ G : U \to W$ total differenzierbar bei x, und es gilt

$$(F \circ G)'(x) \ = \ F'[G(x)] \circ G'(x). \tag{III.9}$$

Beweis. Zur Verdeutlichung schreiben wir im Beweis $R_H(x,z) = \|z\|_X^{-1}\big(H(x+z) - H(x) - H'(x)z\big)$ statt $r_x(z)$ für das Restglied eine Funktion H. Außerdem schreiben wir $y_z := G(x+z)$ und $y_0 := G(x)$. Wir setzen (III.8) sukzessiv ein und erhalten so das Restglied von $F \circ G$,

verwenden jeweils die Restgliedabschätzung aus (III.8). Dann ist das Restglied von $F \circ G$ gegeben durch

$$\begin{aligned} R_{F\circ G}(x,z)\,\|z\|_X &= (F\circ G)(x+z) - (F\circ G)(x) - F'[G(x)]\,G'(x)\,z \qquad \text{(III.10)} \\ &= F(y_z) - F(y_0) - F'(y_0)\,G'(x)\,z \\ &= F(y_z) - F(y_0) - F'(y_0)(y_z - y_0) + F'(y_0)\big[y_z - y_0 - G'(x)z\big] \\ &= R_F(y_0\,,\ y_z - y_0)\,\|y_z - y_0\|_Y \ +\ F'(y_0)\,R_G(x,z)\,\|z\|_X \\ &= R_F(y_0\,,\ y_z - y_0)\,\big\|G'(x)z + \|z\|_X\,R_G(x,z)\big\|_Y \ +\ F'(y_0)\,R_G(x,z)\,\|z\|_X. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \|R_{F\circ G}(x,z)\|_Z \ \le\ & \|R_F(y_0\,,\ y_z - y_0)\|_Z\,\Big(\|G'(x)\|_{\mathcal{B}(X;Y)} + \|R_G(x,z)\|_Y\Big) \\ & +\ \|F'[G(x)]\|_{\mathcal{B}(Y;Z)}\,\|R_G(x,z)\|_Y \qquad \text{(III.11)} \end{aligned}$$

und deshalb $\lim_{z\to 0}\|R_{F\circ G}(x,z)\|_Z = 0$, wobei wir $\lim_{z\to 0} y_z = y_0$ verwenden. □

III.2. Partielle und stetige Differenzierbarkeit

Wir wollen nun für das Folgende stets annehmen, dass $X = \mathbb{R}^M$ und $Y = \mathbb{R}^N$, wobei $M, N \in \mathbb{N}$ und die euklidsche Normen $\|x\|_X = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_M^2}$, $\|y\|_Y = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_N^2}$ zu Grunde gelegt werden.

Definition III.4. Seien $M \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ offen, $x \in U$, $F : U \to \mathbb{R}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, M\}$.

(i) Die Funktion F heißt **bei $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ partiell nach $\mathbf{x_j}$ differenzierbar**

$$:\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \ :=\ \lim_{t\to 0}\left\{\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t}\right\} \qquad \text{(III.12)}$$

existiert, wobei $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ der j-te kanonische Basisvektor ist. In diesem Fall heißt $\frac{\partial F(x)}{\partial x_j} =: \partial_{x_j} F(x)$ **partielle Ableitung von F nach $\mathbf{x_j}$ bei x**.

(ii) Die Funktion F heißt **bei $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ partiell differenzierbar**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, M\} : \quad F \text{ ist bei } x \text{ partiell nach } x_j \text{ differenzierbar.} \qquad \text{(III.13)}$$

(iii) Die Funktion F heißt **auf U partiell differenzierbar**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall x \in U : \quad F \text{ ist bei } x \text{ partiell differenzierbar.} \qquad \text{(III.14)}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die partielle Ableitung einer Funktion F nach einer Variablen x_j bedeutet konkret, dass man $F(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_M)$ nach x_j differenziert und alle anderen Variablen, $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_M$, als Parameter betrachtet.
- Wir betrachten $U = \mathbb{R}^3$ und $F(x) := x_1 \, x_2^2 \, + \, 10 \, x_3^5 \, x_2$, wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$. Dann sind

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \; = \; x_2^2, \qquad \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \; = \; 2x_1 \, x_2 + 10 \, x_3^5, \qquad \frac{\partial F(x)}{\partial x_3} \; = \; 50 \, x_3^4 \, x_2. \tag{III.15}$$

- Wir betrachten $U = \mathbb{R}^2$ und $F(x) := \sin(x_1^2 - x_2^2)$, wobei $x = (x_1, x_2)$. Dann sind

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \; = \; 2x_1 \, \cos(x_1^2 - x_2^2), \qquad \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \; = \; -2x_2 \, \cos(x_1^2 - x_2^2). \tag{III.16}$$

Definition III.5. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$, $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $F = (F_1, F_2, \ldots, F_N) : U \to V$.

(i) F ist **bei $\mathbf{x \in U}$ partiell nach $\mathbf{x_j}$ differenzierbar**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N : \; F_i \text{ ist bei } x \text{ partiell nach } x_j \text{ differenzierbar.} \tag{III.17}$$

(ii) F ist **bei $\mathbf{x \in U}$ partiell differenzierbar**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, M : \; F_i \text{ ist bei } x \text{ partiell nach } x_j \text{ differenzierbar.} \tag{III.18}$$

(iii) F ist **auf U partiell differenzierbar**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall x \in U : \; F \text{ ist bei } x \text{ partiell differenzierbar.} \tag{III.19}$$

Satz III.6. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offene Teilmengen und $F = (F_1, \ldots, F_N) : U \to V$ total differenzierbar bei $x \in U$. Dann ist F bei x auch partiell differenzierbar, und es gilt

$$\forall \, i \in \mathbb{N}_1^N \, , \; j \in \mathbb{N}_1^M : \qquad \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \; = \; (F'(x))_{i,j} \, . \tag{III.20}$$

Beweis. Wir setzen $z := te_j$, dann ist

$$0 \; = \; \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{\|F(x+z) - F(x) - F'(x) \cdot z\|_{\mathbb{R}^N}}{\|z\|_{\mathbb{R}^M}} \right\} \; = \; \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{1}{t} \, \big\| F(x + te_j) - F(x) - tF'(x)e_j \big\| \right\}. \tag{III.21}$$

Daher muss auch, für jedes $i = 1, 2, \ldots, N$,

$$0 \; = \; \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{1}{t} \, \big[F_i(x + te_j) - F_i(x) - (F'(x))_{i,j} \cdot t \big] \right\} \; = \; \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{F_i(x + te_j) - F_i(x)}{t} \right\} \; - (F'(x))_{i,j} \tag{III.22}$$

gelten. ∎

Wir bemerken, dass die Umkehrung von Satz III.6 im Allgemeinen falsch ist, denn es gibt Funktionen, die zwar partiell, aber nicht total differenzierbar sind. Für die Umkehrung von Satz III.6 muss man zusätzlich auch die Stetigkeit der partiellen Ableitungen fordern.

Definition III.7. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$, $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offene Teilmengen und $F : U \to V$.

(i) F heißt **stetig differenzierbar auf U**

$$:\Leftrightarrow \quad F \text{ ist partiell differenzierbar auf } U \text{ und} \qquad \text{(III.23)}$$
$$\forall i = 1, \ldots, N,\ j = 1, \ldots, M : \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \text{ ist stetig auf } U.$$

$$C^1(U; V) \ := \ \Big\{ F : U \to V \ \Big| \ F \text{ ist stetig differenzierbar auf } U \Big\}. \qquad \text{(III.24)}$$

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$. F heißt **k-mal stetig differenzierbar auf U.**

$$:\Leftrightarrow \quad F \text{ ist auf } U \text{ partiell differenzierbar und } \forall j = 1, \ldots, M :$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}^N \text{ ist } (k-1)\text{-mal stetig differenzierbar auf } U. \qquad \text{(III.25)}$$

$$C^k(U; V) \ := \ \Big\{ F : U \to V \ \Big| \ F \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar auf } U \Big\}. \qquad \text{(III.26)}$$

(iii) Die Klasse der **unendlich oft (stetig) differenzierbaren Funktionen auf U mit Werten in V** wird mit

$$C^\infty(U; V) \ := \ \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U; V) \qquad \text{(III.27)}$$

bezeichnet, und

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^M; V) \ := \big\{ F \in C^\infty(\mathbb{R}^M; V) \,\big|\, \mathrm{supp}(F) \text{ ist kompakt} \big\} \qquad \text{(III.28)}$$
$$:= \big\{ F \in C^\infty(\mathbb{R}^M; V) \,\big|\, \exists R < \infty \ \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^M,\ |\vec{x}| \geq R : \quad F(\vec{x}) = 0 \big\}.$$

sind die **unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger**.

Satz III.8. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offene Teilmengen und $F = (F_1, \ldots, F_N) : U \to V$ stetig differenzierbar auf U. Dann ist F auch total differenzierbar auf U, die Abbildung $F' : U \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^N)$ ist stetig in U, und für alle $x \in U$ gilt

$$F'(x) \ = \ \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_M} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_N(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_N(x)}{\partial x_M} \end{pmatrix}. \qquad \text{(III.29)}$$

Die Matrix $(\partial_{x_j} F_i)_{\substack{i=1,\ldots,N, \\ j=1,\ldots,M}}$ der partiellen Ableitungen heißt **Jacobimatrix von F bei x**.

Beweis. Wir beweisen den Satz zunächst für den Spezialfall $\underline{N=1}$.
Wir schreiben $x = \sum_{j=1}^M x_j e_j$, $z = \sum_{j=1}^M z_j e_j$ und $w_m = \sum_{j=1}^m z_j e_j$, für alle $0 \leq m \leq M$, sowie $\partial_m F(x) := \frac{\partial F(x)}{\partial x_m}$ und beachten, dass $w_M = z$ und $w_0 = 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} \Big| F(x+z) - F(x) - \sum_{m=1}^M \partial_m F(x)\, z_m \Big| \\ &= \Big| \big\{ F(x+w_M) - F(x+w_{M-1}) \big\} + \big\{ F(x+w_{M-1}) - F(x+w_{M-2}) \big\} \\ &\qquad + \ldots + \big\{ F(x+w_1) - F(x+w_0) \big\} - \sum_{m=1}^M \partial_m F(x)\, z_m \Big| \\ &= \Big| \sum_{m=1}^M \big\{ F(x+w_m) - F(x+w_{m-1}) - \partial_m F(x)\, z_m \big\} \Big| \\ &\leq \sum_{m=1}^M \big| F(x+w_{m-1}+z_m e_m) - F(x+w_{m-1}) - \partial_m F(x)\, z_m \big| \end{aligned} \tag{III.30}$$

Weiterhin sind alle $\partial_m F$ auf einer offenen Umgebung $U \ni x$ stetig, und daher sichert eine genügend kleine Wahl von $\delta > 0$, dass $x + K_\delta \subset U$, wobei $K_\delta := [-\delta, \delta]^M$. Insbesondere folgt aus der Kompaktheit von $x + K_\delta$, dass $\partial_m F$ gleichmäßig stetig auf $x + K_\delta$ ist und somit

$$Q(\delta) \ := \ \max_{1 \leq m \leq M} \max_{y \in K_\delta} \big| \partial_m F(x+y) - \partial_m F(x) \big| \ \to \ 0, \tag{III.31}$$

für $\delta \to 0$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung erhalten wir nun für jedes $m \in \mathbb{Z}_1^M$ die Existenz einer Zahl $0 < \vartheta_m < 1$, sodass

$$F(x+w_{m-1}+z_m) - F(x+w_{m-1}) \ = \ \partial_m F(x+w_{m-1}+\vartheta_m z_m) \cdot z_m, \tag{III.32}$$

und wegen $w_{m-1} + \vartheta_m z_m \in K_\delta$ erhalten wir daraus

$$\big| F(x+w_{m-1}+z_m) - F(x+w_{m-1}) - \partial_m F(x)\, z_m \big| \ \leq \ Q(\delta)\ |z_m|. \tag{III.33}$$

Setzen wir (III.33) in (III.30) ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{\|z\|} \Big| F(x+z) - F(x) - \sum_{m=1}^M \partial_m F(x)\, z_m \Big| \ \leq \ \frac{Q(\delta)}{\|z\|} \Big(\sum_{m=1}^M |z_m| \Big) \ \leq \ Q(\delta)\ M^{1/2} \ \to \ 0, \tag{III.34}$$

für $\delta \to 0$, unter zusätzlicher Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und (III.31) im letzten Schritt. Dies beweist die totale Differenzierbarkeit von F bei x.

Für $\underline{N \geq 1}$ wenden wir (III.34) auf alle Komponenten $F_1, F_2, \ldots, F_N$ an und erhalten

$$\forall 1 \leq n \leq N: \qquad \lim_{z \to 0} \Big\{ \frac{1}{\|z\|} \Big| F_n(x+z) - F_n(x) - \sum_{m=1}^M \partial_m F_n(x)\, z_m \Big| \Big\} \ = \ 0. \tag{III.35}$$

Konvergenz in $\mathbb{R}^N$ ist jedoch gleichwertig mit komponentenweiser Konvergenz, und deshalb ist (III.35) äquivalent zu

$$\lim_{z\to 0} \left\{ \frac{1}{\|z\|} \left\| F_n(x+z) - F_n(x) - \sum_{m=1}^{M} \partial_m F_n(x)\, z_m \right\| \right\} \;=\; 0. \tag{III.36}$$

$\square$

Korollar III.9. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offene Teilmengen und $F : U \to V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) F ist stetig differenzierbar auf U. (III.37)

(ii) F ist total differenzierbar auf U, und
$F' : U \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^n)$ ist stetig in U. (III.38)

(iii) $F \in C^1(U; V)$, d.h. F ist partiell differenzierbar auf U,
und seine partiellen Ableitungen sind alle stetig in U. (III.39)

Korollar III.9 zeigt, dass totale und partielle Differenzierbarkeit zusammen fallen, sofern die Ableitungen stetig sind. Dies veranlasst uns zu einer allgemeineren Definition des Begriffs des stetigen Differenzierbarkeit.

Definition III.10. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banach-Räume über $\mathbb{K}$ und $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ zwei nichtleere, offene Teilmengen. Die Menge der **stetig auf U differenzierbaren Funktionen mit Werten in V** ist definiert als

$$C^1(U; V) \;:=\; \Big\{ F : U \to V \;\Big|\; F \text{ ist total differenzierbar auf } U \text{ und } F' \in C[U; \mathcal{B}(X; Y)] \Big\}. \tag{III.40}$$

III.3. Vertauschbarkeit stetiger partieller Ableitungen

Der folgende Satz zeigt, dass stetige Differenzierbarkeit auch die richtige Bedingung für die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen darstellt.

Satz III.11. Seien $M, k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ und $V \subseteq \mathbb{R}$ offene Teilmengen und $F \in C^k(U; V)$. Seien weiterhin $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, M\}$ und sei $\pi \in \mathcal{S}_k$ eine Permutation von k Elementen. Dann gilt für jedes $x \in U$ dass

$$\frac{\partial^k F(x)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} \;=\; \frac{\partial^k F(x)}{\partial x_{j_{\pi(1)}} \partial x_{j_{\pi(2)}} \ldots \partial x_{j_{\pi(k)}}}. \tag{III.41}$$

Beweis. Wir zeigen (III.41) zunächst für $k = 2$. Seien dazu $F \in C^2(U;V)$ sowie $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, M\}$ mit $\alpha < \beta$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} &= \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{1}{t} \Big(\frac{\partial F}{\partial x_\beta}(x + te_\alpha) - \frac{\partial F}{\partial x_\beta}\,(x) \Big) \right\} \\
&= \lim_{t \to 0} \lim_{s \to 0} \left\{ \frac{1}{s\,t} \Big[F(x + te_\alpha + se_\beta) - F(x + te_\alpha) - F(x + se_\beta) + F(x) \Big] \right\} \\
&= \lim_{t \to 0} \lim_{s \to 0} \{ G(t,s) \} \qquad \text{(III.42)}
\end{aligned}
$$

wobei

$$
G(t,s) \ := \ \frac{1}{s\,t} \Big[F(x + te_\alpha + se_\beta) - F(x + se_\beta) - F(x + te_\alpha) + F(x) \Big], \qquad \text{(III.43)}
$$

für festes $x \in U$. Wir definieren weiterhin, für festes $s \neq 0$,

$$
\widetilde{G}_s(t) \ := \ F(x + te_\alpha + se_\beta) - F(x + te_\alpha), \qquad \text{(III.44)}
$$

so dass,

$$
\begin{aligned}
G(t,s) &= \frac{1}{s\,t} \Big[\widetilde{G}_s(t) - \widetilde{G}_s(0) \Big] \ = \ \frac{1}{s} \, \frac{d\widetilde{G}_s(\theta_t\, t)}{dt} \qquad \text{(III.45)} \\
&= \frac{1}{s} \left[\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\,(x + \theta_t te_\alpha + se_\beta) - \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\,(x + \theta_t te_\alpha) \right] \ = \ \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}\,(x + \theta_t te_\alpha + \theta_s\, se_\beta),
\end{aligned}
$$

nach zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, wobei $\theta_t, \theta_s \in (0,1)$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \, \partial x_\alpha}$ bei x stetig ist (als Funktion des Vektors x), gibt es ein $\delta > 0$ so, dass

$$
\forall\, z \in \mathbb{R}^M,\ \|z\| < \sqrt{2}\delta : \qquad \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \, \partial x_\alpha}(x + z) \ - \ \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \, \partial x_\alpha}(x) \right| \ < \ \varepsilon \qquad \text{(III.46)}
$$

gilt. Für $|s|, |t| < \delta$ ist auch $\|\theta_t te_\alpha + \theta_s\, se_\beta\| < \sqrt{2}\delta$, und wir erhalten aus (III.46), dass

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta}(x) \ - \ \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \, \partial x_\alpha}(x) \right| &= \lim_{t \to 0} \lim_{s \to 0} \left| G(t,s) \ - \ \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \, \partial x_\alpha}(x) \right| \qquad \text{(III.47)} \\
&\leq \sup_{|s|,|t|<\delta} \left| G(t,s) \ - \ \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \, \partial x_\alpha}(x) \right| \ \leq \ \varepsilon \, .
\end{aligned}
$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, muss die linke Seite verschwinden und also

$$
\frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta}(x) \ = \ \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \, \partial x_\alpha}(x) \qquad \text{(III.48)}
$$

gelten.

Seien nun $k \geq 3$, $F \in C^k(U;V)$ und $1 \leq \ell \leq k-1$. Dann ist

$$\widehat{F} \;:=\; \frac{\partial^{k-\ell-1} F}{\partial x_{j_{\ell+2}} x_{j_{\ell+3}} \ldots x_{j_k}} \;\in C^{\ell+1}(U;V) \subseteq C^2(U;V), \tag{III.49}$$

und damit gilt nach (III.48)

$$\frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial x_{j_\ell} x_{j_{\ell+1}}} \;=\; \frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial x_{j_{\ell+1}} x_{j_\ell}}. \tag{III.50}$$

Setzen wir $\widehat{F}$ ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial^k F}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_\ell} \partial x_{j_{\ell+1}} \ldots \partial x_{j_k}} \;=\; \frac{\partial^k F}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{\ell+1}} \partial x_{j_\ell} \ldots \partial x_{j_k}}, \tag{III.51}$$

also die Gültigkeit von (III.41) im Fall, dass π eine Transposition ist. Da sich jede Permutation als Komposition von Transpositionen schreiben lässt, folgt somit (III.41) auch für den allgemeinen Fall $\pi \in \mathcal{S}_K$. $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass es in (III.48) sogar genügen würde, die Existenz von $\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}$, $\frac{\partial F}{\partial x_\beta}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ und deren Stetigkeit zu fordern, um auch die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}$ zu schließen.
- Für $k = 2$ und $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, M\}$ behauptet (III.41), dass

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \;=\; \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}. \tag{III.52}$$

- Seien $M = k = 2$ und $f(x_1, x_2) \;=\; x_1^3\, x_2 + 5 x_1\, x_2^6$. Dann sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\,(x_1, x_2) \;=\; 3\, x_1^2\, x_2 + 5\, x_2^6, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}\,(x_1, x_2) \;=\; x_1^3 + 30\, x_1\, x_2^5, \tag{III.53}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\,(x_1, x_2) \;=\; 3\, x_1^2 + 30\, x_2^5 \;=\; \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{III.54}$$

- Auf die Stetigkeit der k. partiellen Ableitungen kann man für die Gültigkeit von Satz III.11 nicht verzichten, wie das folgende Gegenbeispiel beweist. Gegeben sei die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) := \begin{cases} xy\, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{III.55}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \;=\; y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \;=\; \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}. \tag{III.56}$$

Für die partielle Ableitung in $(0,0)$ erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \;=\; \lim_{x \to 0} \frac{F(x,0) - F(0,0)}{x} \;=\; 0. \tag{III.57}$$

Die partielle Ableitung nach x lautet also

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \;=\; \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{III.58}$$

Beachtet man die Symmetrie $F(x,y) = -F(y,x)$, so folgt

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \;=\; -\frac{\partial F}{\partial x}(y,x) \;=\; \begin{cases} -\frac{y^4 x + 4y^2 x^3 - x^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{III.59}$$

Es gilt nun

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) \;=\; \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{y} \;=\; \lim_{y \to 0} \frac{-y}{y} \;=\; -1, \tag{III.60}$$

aber

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) \;=\; \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)}{x} \;=\; \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} \;=\; 1. \tag{III.61}$$

Daher ist F zweimal partiell differenzierbar, aber nicht zweimal *stetig* differenzierbar.