I. Metrische und normierte Räume

In diesem ersten Kapitel führen wir den Begriff der *Metrik* auf einer Menge und den Begriff der *Norm* auf einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum ein, wobei in dieser Vorlesung $\mathbb{K}$ stets den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ der reellen oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ den der komplexen Zahlen bezeichnet.

I.1. Metrische Räume

Definition I.1. Sei $M \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge.

Eine Abbildung $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt **Metrik (auf M)** $:\Leftrightarrow$

(i)

$$\forall x, y \in M : \quad \{\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y\}, \quad (\text{I.1})$$

(ii)

$$\forall x, y \in M : \quad \rho(x, y) = \rho(y, x), \quad (\text{I.2})$$

(iii)

$$\forall x, y, z \in M : \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \quad (\text{I.3})$$

In diesem Fall bezeichnen wir (M, ρ) als **metrischen Raum**.

Definition I.2. Sei (M, ρ) ein metrischer Raum.

(i) Sind $r > 0$ und $x \in M$, so heißt

$$B_\rho(x, r) := \{y \in M \mid \rho(y, x) < r\} \quad (\text{I.4})$$

offene Kugel um x vom Radius r.

(ii) Sei $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in A$ heißt **innerer Punkt (I.P.)**

$$:\Leftrightarrow \exists r > 0 : B_\rho(x, r) \subseteq A. \quad (\text{I.5})$$

(iii) Sei $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in M$ heißt **Häufungspunkt (H.P.) von A**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall r > 0 : \quad B_\rho(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset. \quad (\text{I.6})$$

(iv) Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt **offen**

$$:\Leftrightarrow \quad \text{Jeder Punkt in } U \text{ ist ein innerer Punkt} \quad (\text{I.7})$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in U \exists r > 0 : \quad B_\rho(x, r) \subseteq U. \quad (\text{I.8})$$

(v) Eine Teilmenge $V \subseteq M$ heißt **abgeschlossen**

$$:\Leftrightarrow \quad V \text{ enthält alle seine Häufungspunkte} \quad (\text{I.9})$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ x \text{ ist H.P. von } V \Rightarrow x \in V \right\}. \quad (\text{I.10})$$

(vi) Eine Teilmenge $K \subseteq M$ heißt **kompakt**

$:\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung von K enthält eine endliche offene Überdeckung von K .

Definition I.3. Sei (M, ρ) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \in M^\mathbb{N}$ heißt **konvergent** $:\Leftrightarrow$

$$\exists x \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad \rho(x, x_n) \leq \varepsilon. \quad (\text{I.11})$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{oder} \quad x_n \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{I.12})$$

(ii) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \in M^\mathbb{N}$ heißt **Cauchy-Folge** $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : \quad \rho(x_m, x_n) \leq \varepsilon. \quad (\text{I.13})$$

(iii) Ein metrischer Raum M heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow$

$$\text{Jede Cauchy-Folge in } M \text{ ist konvergent.} \quad (\text{I.14})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Eine Metrik ρ auf einer Menge M definiert einen Abstand $\rho(x, y)$ zwischen je zwei Elementen $x, y \in M$ dieser Menge.
- $(\mathbb{R}, \rho_{|\cdot|})$ ist ein vollständiger metrischer Raum mit $\rho_{|\cdot|}(x, y) := |x - y|$.
- Ebenso ist $(\mathbb{C}, \rho_{|\cdot|})$ ein vollständiger metrischer Raum mit $\rho_{|\cdot|}(w, z) := |w - z|$.
- Ist $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, so ist $(\mathbb{R}^d, \rho_{\text{eukl}})$ ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der *euklidischen Metrik*

$$\rho_{\text{eukl}}(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2}, \quad (\text{I.15})$$

wobei $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d), \vec{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$.

- Ebenso ist $(\mathbb{C}^d, \rho_{unit})$ ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der *unitären Metrik*

$$\rho_{unit}(\vec{w}, \vec{z}) := \sqrt{|w_1 - z_1|^2 + |w_2 - z_2|^2 + \dots + |w_d - z_d|^2}, \quad (\text{I.16})$$

wobei $\vec{w} = (w_1, \dots, w_d), \vec{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$.

- Sind (M, ρ) ein metrischer Raum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist auch $(N, \tilde{\rho})$ ein metrischer Raum, wobei die Metrik $\tilde{\rho} : N \times N \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch die Restriktion $\tilde{\rho} := \rho|_{N \times N}$ von ρ auf $N \times N$ definiert ist, d.h. für $x, y \in N$ ist $\tilde{\rho}(x, y) := \rho(x, y)$. Dies ist eine Eigenschaft, die normierte Räume nicht besitzen, s.u.
- Somit ist auch $(\mathbb{Q}, \rho_{|\cdot|})$ ein metrischer Raum mit $\rho_{|\cdot|}(x, y) := |x - y|$. Allerdings ist $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.
- Sei (M, ρ) ein metrischer Raum. Wie bei $\mathbb{K}$ sind $M, \emptyset \subseteq M$ offen und abgeschlossen, und für eine Teilmenge $A \subseteq M$ gilt

$$\{A \text{ ist offen}\} \Leftrightarrow \{A^c = M \setminus A \text{ ist abgeschlossen}\}. \quad (\text{I.17})$$

- Es gibt viele metrische Räume, die keine Vektorräume sind. Beispielsweise ist $M = \{a, b, c\}$ bzgl. $\rho(a, a) = \rho(b, b) = \rho(c, c) = 0$ und $\rho(a, b) = \rho(b, c) = \rho(a, c) = 1$ ein metrischer Raum (M, ρ) , den man als Graph $(M, \Lambda), \Lambda \subseteq M \times M$, veranschaulichen kann.
- Etwas anschaulicher ist das folgende Beispiel der Entfernungstabelle (Autobahnkilometer) zwischen den Städten. Wir setzen $M := \{\text{BS, HB, HH, H}\}$ und definieren ρ auf $M \times M$ durch folgende Tabelle:

ρ	BS	HB	HH	H
BS	0 km	176,2 km	199,0 km	66,8 km
HB	176,2 km	0 km	130,2 km	123,0 km
HH	199,0 km	130,2 km	0 km	157,5 km
H	66,8 km	123,0 km	157,5 km	0 km

Dann ist (M, ρ) ein metrischer Raum.

Definition I.4. Seien (M, ρ) und (N, μ) zwei metrische Räume und $f : M \rightarrow N$.

- (i) Die Abbildung f heißt **stetig in** $x \in M$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f[B_\rho(x, \delta)] \subseteq B_\mu(f[x], \varepsilon) \quad (\text{I.18})$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in M : \rho(x, y) < \delta \Rightarrow \mu[f(x), f(y)] < \varepsilon. \quad (\text{I.19})$$

- (ii) Die Abbildung f heißt **folgenstetig in** $x \in M$

$$:\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^\infty \in M^\mathbb{N} : x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n). \quad (\text{I.20})$$

Lemma I.5. Seien (M, ρ) und (N, μ) zwei metrische Räume und $f : M \rightarrow N$. Dann gilt folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f \text{ ist folgenstetig} \quad (\text{I.21})$$

Beweis. Der Beweis ist die Transkription des Beweises der entsprechenden Aussage aus der Vorlesung *Analysis 1* unter Ersetzung von $|x - y|$ durch $\rho(x, y)$. $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- In metrischen Räumen fallen Stetigkeit und Folgenstetigkeit zusammen. In allgemeinen topologischen Räumen ist dies nicht der Fall; es gilt nur

$$\text{Stetigkeit} \Rightarrow \text{Folgenstetigkeit.} \quad (\text{I.22})$$

- Die umgekehrte Implikation erhält man für allgemeine topologische Räume nur durch Ersetzung von Folgen durch *Netze* und deren Konvergenz.

I.2. Der Banachsche Fixpunktsatz

Wir beweisen den Banachschen Fixpunktsatz¹, ein “klassischer” Satz der Funktionalanalysis.

Definition I.6. Sei (M, ρ) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Abbildung $T : M \rightarrow M$ heißt **Kontraktion**

$$:\Leftrightarrow \quad \exists 0 \leq q < 1 \quad \forall x, y \in M : \quad \rho[T(x), T(y)] \leq q \cdot \rho[x, y]. \quad (\text{I.23})$$

In diesem Fall bezeichnet man q als **Kontraktionsrate** von T .

Lemma I.7. Seien (M, ρ) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion. Dann ist T stetig auf M .

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta := \varepsilon$. Sind nun $x, y \in M$ mit $\rho[x, y] < \varepsilon$, so gilt auch $\rho[T(x), T(y)] < q\varepsilon \leq \varepsilon$, und T ist (sogar gleichmäßig) stetig auf M . $\square$

Satz I.8 (Banachscher Fixpunktsatz). Seien (M, ρ) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion. Dann besitzt T in M genau einen **Fixpunkt** $x_* \in M$, d.h. es gibt genau eine Lösung $x_* \in M$ der **Fixpunktgleichung**

$$x_* = T(x_*). \quad (\text{I.24})$$

Beweis. Da $M \neq \emptyset$, gibt es einen Punkt $x_0 \in M$. Wegen $T : M \rightarrow M$ ist mit x auch $T(x)$ in M , und wir können

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n := T(x_{n-1}) = [T \circ T](x_{n-2}) = \dots = \underbrace{[T \circ T \circ \dots \circ T]}_{n \text{ Faktoren}}(x_0) \in M \quad (\text{I.25})$$

setzen. Wir zeigen nun, dass die Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ in M konvergiert. Seien $m, n, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $m > n \geq n_0$. Dann ist mit der Dreiecksungleichung

$$\rho[x_m, x_n] \leq \rho[x_m, x_{m-1}] + \rho[x_{m-1}, x_{m-2}] + \dots + \rho[x_{n+1}, x_n]. \quad (\text{I.26})$$

¹engl.: Contraction Mapping Principle

Für $k \in \mathbb{N}$ ist außerdem

$$\begin{aligned}\rho[x_{k+1}, x_k] &= \rho[T(x_k), T(x_{k-1})] \leq q \cdot \rho[x_k, x_{k-1}] \\ &= q \cdot \rho[T(x_{k-1}), T(x_{k-2})] \leq q^2 \cdot \rho[x_k, x_{k-1}] \\ &\leq \dots \leq q^k \cdot \rho[x_1, x_0],\end{aligned}\tag{I.27}$$

wobei wir k -mal die Kontraktionseigenschaft (I.23) verwendet haben. Damit ist, für $m > n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\rho[x_m, x_n] &\leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \dots + q^n) \rho[x_1, x_0] \\ &\leq q^n \rho[x_1, x_0] \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) \leq \frac{q^{n_0}}{1-q} \rho[x_1, x_0] \rightarrow 0,\end{aligned}\tag{I.28}$$

für $n_0 \rightarrow \infty$. Somit ist $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in M . Da M vollständig ist, konvergiert $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ auch,

$$x_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M.\tag{I.29}$$

Außerdem ist x_* ein Fixpunkt, denn T ist nach Lemma I.7 stetig in M , und es gilt somit

$$x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = T(x_*).\tag{I.30}$$

Ist nun $x_{**} \in M$ irgendein Fixpunkt von T , so folgt aus der Kontraktionseigenschaft (I.23), dass

$$\rho[x_*, x_{**}] = \rho[T(x_*), T(x_{**})] \leq q \cdot \rho[x_*, x_{**}],\tag{I.31}$$

also $\rho[x_*, x_{**}] = 0$ und somit $x_{**} = x_*$. □

Der Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes ergibt auch eine quantitative Aussage über die Rate, mit der sich die Iteration $x_n := T(x_{n-1})$ dem Fixpunkt annähert.

Korollar I.9. Seien (M, ρ) ein vollständiger metrischer Raum, $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion mit Kontraktionsrate $q \in (0, 1)$ und $x_* \in M$ der Fixpunkt von T . Sind $x_0 \in M$ und $x_n := T(x_{n-1})$, für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\rho[x_n, x_*] \leq \frac{q^n}{1-q} \rho[T(x_0), x_0],\tag{I.32}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Folgt sofort mit $n := n_0$ und $m \rightarrow \infty$ in (I.28). □

1.3. Vektorräume und lineare Abbildungen

Die *Lineare Algebra* ist die Theorie der Vektorräume und der linearen Abbildungen, die strukturerhaltenden Abbildungen zwischen Vektorräumen. In diesem Abschnitt führen wir einige Begriffe der linearen Algebra ein, ohne die wir die Inhalte aus *Analysis 2* nicht formulieren können und die deshalb unabdingbar sind. Wir beschränken uns hier auf Vektorräume über die Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, die wir wie schon in *Analysis 1* einheitlich mit $\mathbb{K}$ bezeichnen, sofern die sich darauf beziehende Betrachtung für beide Fälle durchgeführt werden kann.

Definition I.10. Eine Menge X heißt **Vektorraum über $\mathbb{K}$** oder **$\mathbb{K}$ -Vektorraum** $:\Leftrightarrow$ Auf X sind Addition $(+): X \times X \rightarrow X$ und Multiplikation mit einem Skalar $(\cdot): \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ definiert, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$(i) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X : \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad (\text{I.33})$$

$$(ii) \quad \exists \vec{0} \in X \quad \forall \vec{a} \in X : \quad \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}, \quad (\text{I.34})$$

$$(iii) \quad \forall \vec{a} \in X \quad \exists (-\vec{a}) \in X : \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}, \quad (\text{I.35})$$

$$(iv) \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \quad \begin{cases} \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}, \\ (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}, \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

$$(v) \quad \forall \vec{a} \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}. \quad (\text{I.37})$$

Die Elemente von X heißen **Vektoren**, $\vec{0} \in X$ ist der **Nullvektor**. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$, die selbst ein Vektorraum ist, bezeichnet man als **Teilraum** oder **Unterraum** von X . Vektorräume über $\mathbb{R}$ bezeichnet man auch als **reelle Vektorräume**, Vektorräume über $\mathbb{C}$ als **komplexe Vektorräume**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Gleichungen (I.33), (I.34) und (I.35) besagen zusammen, dass X bezüglich der Addition $(+)$ eine abelsche Gruppe bildet.
- $\{\vec{0}\} \subseteq X$ ist der kleinste und $X \subseteq X$ der größte Unterraum von X .
- Sind $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ und $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in X$ Vektoren, so bezeichnet man Summen der Form $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n \in X$ als **Linearkombination** der $\vec{x}_j$ und die Zahlen α_j in diesem Zusammenhang als ihre **Koeffizienten**.
- *Multiplikation mit einem Skalar* und *Skalarprodukt* ist nicht dasselbe.
- $\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. (Dieses Beispiel ist allerdings etwas künstlich.)
- Für $d \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{K}^d = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{K} \right\} \quad (\text{I.38})$$

bezüglich komponentenweiser Addition und Multiplikation mit einem Skalar,

$$\gamma \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \gamma x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \gamma x_d + y_d \end{pmatrix}, \quad (\text{I.39})$$

ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dabei sind

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_d \end{pmatrix}. \quad (\text{I.40})$$

- Für $d \in \mathbb{N}$ definieren wir die **kanonischen Basisvektoren** durch

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.41})$$

Die Menge $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_d\} \subseteq \mathbb{K}^d$ bezeichnet man auch als **Standardbasis**.

- Mit der Standardbasis wird

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_d \vec{e}_d. \quad (\text{I.42})$$

d.h. jeder Vektor kann als Linearkombination der d kanonischen Basisvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d \in \mathbb{K}^d$ mit seinen Komponenten $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{K}$ als Koeffizienten geschrieben werden.

- Die Darstellung (I.42) ist eindeutig in dem Sinne, dass für $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_d, \beta_d \in \mathbb{K}$ aus $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_d \vec{e}_d = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_d \vec{e}_d$ auch $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_d = \beta_d$ folgen.
- Für $d = 1, 2, 3$ gewinnt man durch Zeichnungen eine gewisse Vorstellung von den Vektoren in $\mathbb{R}^d$.
- Schränkt man bei den komplexen Zahlen die Multiplikation auf die reellen Elemente ein, so ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (der Dimension 2).
- Ein weiteres Beispiel eines Vektorraums ist die Menge der reellen Funktionen auf $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$,

$$\mathcal{F} := \{f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}\}. \quad (\text{I.43})$$

Mit $f, g \in \mathcal{F}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ wird $\mathcal{F}$ durch

$$\forall x \in [\alpha, \beta] : (f + \gamma \cdot g)(x) := f(x) + \gamma \cdot g(x) \quad (\text{I.44})$$

zum Vektorraum (“punktweise Addition und Multiplikation mit einem Skalar”). Dabei sind

$$\forall x \in [\alpha, \beta]: \quad 0(x) := 0, \quad (-f)(x) := -f(x). \quad (\text{I.45})$$

Für diesen Vektorraum $\mathcal{F}$ liefert eine Zeichnung eine gewisse Anschauung.

- Das obige Beispiel lässt sich noch wie folgt verallgemeinern. Sind $A \neq \emptyset$ eine Menge und X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, so wird durch punktweise Addition und punktweise Multiplikation mit einem Skalar wie in (I.44) auch der Funktionenraum

$$\mathcal{F}' := \{f : A \rightarrow X\} \quad (\text{I.46})$$

zum Vektorraum über $\mathbb{K}$.

- Insbesondere ist $\mathcal{F}'$ für $A := \mathbb{Z}_1^d$ und $X := \mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ gleich (genauer: *isomorph zu*) $\mathbb{K}^d$,

$$\mathbb{K}^d = \{\vec{x} : \mathbb{Z}_1^d \rightarrow \mathbb{K}, \nu \mapsto x_\nu\}. \quad (\text{I.47})$$

- Die Notation für Vektoren mit Vektorpfeilen ist etwas schwerfällig, und wir schreiben im Folgenden einfach $x, y, e_m^{(X)}$ und $e_n^{(Y)}$ statt $\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_m^{(X)}$ und $\vec{e}_n^{(Y)}$.

Definition I.11. Seien X und Y zwei $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Eine Abbildung $A : X \rightarrow Y$ heißt **linear** oder (**linearer**) **Operator**

$$:\Leftrightarrow \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K} : \quad A(\alpha x + y) = \alpha A(x) + A(y). \quad (\text{I.48})$$

Die Menge der linearen Abbildungen $X \rightarrow Y$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X; Y)$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Menge $\mathcal{L}(X; Y)$ der linearen Abbildungen ist selbst ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum bezüglich punktweiser Operationen, d.h. für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \mathcal{L}(X; Y)$ ist $(\alpha A + B) \in \mathcal{L}(X; Y)$ definiert durch

$$\forall x \in X : \quad (\alpha A + B)(x) := \alpha A(x) + B(x). \quad (\text{I.49})$$

- Durch vollständige Induktion erhält man aus (I.48) leicht, dass

$$A\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A(x_i), \quad (\text{I.50})$$

für alle $x_1, \dots, x_k \in X$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.

- $A(0_X) = A(0_{\mathbb{K}} \cdot 0_X) = 0_{\mathbb{K}} \cdot A(0_X) = 0_Y$.
- Seien $M, N \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{K}^M$ und $Y = \mathbb{K}^N$. Wir bezeichnen mit

$$e_1^{(X)}, e_2^{(X)}, \dots, e_M^{(X)} \subseteq X \quad \text{und} \quad e_1^{(Y)}, e_2^{(Y)}, \dots, e_N^{(Y)} \subseteq Y \quad (\text{I.51})$$

die jeweiligen Standardbasen in $\mathbb{K}^M$ und $\mathbb{K}^N$.

- Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ eine lineare Abbildung. Für jeden Vektor $x \in \mathbb{K}^M$ lässt sich der zugehörige Bildvektor $A(x) \in \mathbb{K}^N$ in eindeutiger Weise als Linearkombination $A(x) = \gamma_1 e_1^{(Y)} + \gamma_2 e_2^{(Y)} + \dots + \gamma_N e_N^{(Y)}$ der kanonischen Basisvektoren in $\mathbb{K}^N$ darstellen.

Insbesondere gibt es $N \cdot M$ eindeutige Zahlen $\{a_{n,m} | n \in \mathbb{Z}_1^N, m \in \mathbb{Z}_1^M\}$ so, dass

$$\begin{aligned} A(e_1^{(X)}) &= a_{1,1} e_1^{(Y)} + a_{2,1} e_2^{(Y)} + \dots + a_{N,1} e_N^{(Y)}, \\ A(e_2^{(X)}) &= a_{1,2} e_1^{(Y)} + a_{2,2} e_2^{(Y)} + \dots + a_{N,2} e_N^{(Y)}, \\ &\vdots \\ A(e_M^{(X)}) &= a_{1,M} e_1^{(Y)} + a_{2,M} e_2^{(Y)} + \dots + a_{N,M} e_N^{(Y)} \end{aligned} \tag{I.52}$$

gelten.

- Für

$$x = x_1 e_1^{(X)} + x_2 e_2^{(X)} + \dots + x_M e_M^{(X)} \in X \tag{I.53}$$

ist dann

$$A(x) = y_1 e_1^{(Y)} + y_2 e_2^{(Y)} + \dots + y_N e_N^{(Y)} \in Y, \tag{I.54}$$

wobei

$$\forall n \in \mathbb{Z}_1^N : y_n = \sum_{m=1}^M a_{n,m} x_m. \tag{I.55}$$

- Die zu A gehörige Zahlentabelle

$$\mathcal{M}[A] := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{M \cdot N} \tag{I.56}$$

bezeichnet man als Matrix und genauer als Matrixdarstellung von A bezüglich der Standardbasen in $\mathbb{K}^M$ und $\mathbb{K}^N$.

- Für $M, N \in \mathbb{N}$ ist die Matrixdarstellung $\mathcal{M} : \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N) \rightarrow \mathbb{K}^{M \cdot N}$ eine lineare Bijektion zwischen den Vektorräumen $\mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ und $\mathbb{K}^{M \cdot N}$. D.h. $\mathcal{M}$ ist bijektiv und es gilt $\mathcal{M}[\alpha A + B] = \alpha \mathcal{M}[A] + \mathcal{M}[B]$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$.
- Konkret bedeutet dies, dass man die Matrixdarstellung als riesigen Spaltenvektor interpretiert, den man aus Platzmangel in eine Tabelle mit N Zeilen und M Spalten schreibt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[A] &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}[B] = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N,1} & \dots & b_{N,M} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathcal{M}[\alpha A + B] &= \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & \alpha a_{1,M} + b_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{N,1} + b_{N,1} & \dots & \alpha a_{N,M} + b_{N,M} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{I.57}$$

- Obwohl dies aus Sicht der linearen Algebra etwas ungenau ist, werden wir im Weiteren nicht mehr zwischen $\mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ und $\mathbb{K}^{M \cdot N}$ unterscheiden und die lineare Abbildung A mit ihrer Matrixdarstellung gleichsetzen,

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.58})$$

- Sind X, Y, Z drei $\mathbb{K}$ -Vektorräume und $A \in \mathcal{L}(Y; Z)$ sowie $B \in \mathcal{L}(X; Y)$, so ist auch deren Komposition linear, $(A \circ B) \in \mathcal{L}(X; Z)$.
- Sind $M, N, P \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{K}^M$, $Y = \mathbb{K}^N$, $Z = \mathbb{K}^P$, so ist für $A \in \mathcal{L}(Y; Z)$ und $B \in \mathcal{L}(X; Y)$ die Matrixdarstellung von $(A \circ B) \in \mathcal{L}(X; Z)$ durch das *Matrixprodukt* der Matrixdarstellungen von A und B gegeben.

I.4. Normierte Räume und Operatornorm

Als Nächstes definieren wir spezielle metrische Räume, die *normierten* Räume.

Definition I.12. Sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt **Norm (auf X)** $:\Leftrightarrow$

(i)

$$\forall x \in X : \quad \{\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\} \quad (\text{I.59})$$

(ii)

$$\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K} : \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad (\text{I.60})$$

(iii)

$$\forall x, y \in X : \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (\text{I.61})$$

In diesem Fall bezeichnet man $(X, \|\cdot\|)$ als **normierten Raum**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Jeder normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein metrischer Raum (X, ρ) bzgl. der Metrik

$$\forall x, y \in X : \quad \rho(x, y) := \|x - y\|. \quad (\text{I.62})$$

In diesem Fall nennt man ρ die *durch die Norm $\|\cdot\|$ induzierte Metrik*.

- Damit übertragen sich alle topologischen Begriffe und auch die Begriffe der Konvergenz, der Cauchy-Folge und der Vollständigkeit auf normierte Räume: Seien $x \in X$ und $(x_n)_{n=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ eine Folge in X . Diese Folge konvergiert gegen $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad \|x_n - x\| \leq \varepsilon, \quad (\text{I.63})$$

und sie ist eine Cauchy-Folge genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > n \geq n_0 : \quad \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon. \quad (\text{I.64})$$

- Ist ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ bzgl. der induzierten Metrik $\rho(x, y) = \|x - y\|$ vollständig, so nennen wir $(X, \|\cdot\|)$ **Banach-Raum**.
- Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}_0^+, \|\cdot\|)$ stets stetig.
- Für $d \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{\text{eukl}})$ ein reeller Banach-Raum bezüglich der **euklidischen Norm**

$$\|x\|_{\text{eukl}} := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2} = \sqrt{\langle x|x \rangle_{\text{eukl}}}, \quad (\text{I.65})$$

wobei $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{eukl}}$ das *euklidische Skalarprodukt* $\langle x|y \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_dy_d$ auf $\mathbb{R}^d$ notiert.

- Für $d \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_{\text{unit}})$ ein komplexer Banach-Raum bezüglich der **unitären Norm**

$$\|z\|_{\text{unit}} := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_d|^2} = \sqrt{\langle z|z \rangle_{\text{unit}}}, \quad (\text{I.66})$$

wobei $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{unit}}$ das *unitäre Skalarprodukt* $\langle z|w \rangle := \bar{z}_1w_1 + \bar{z}_2w_2 + \dots + \bar{z}_dw_d$ auf $\mathbb{C}^d$ notiert.

- Für $d \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ definiert $\|x\|_p := (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$ eine Norm auf $\mathbb{K}^d$; ebenso $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_d|\}$. Sie sind alle äquivalent zueinander, d.h. zu $p, q \in [1, \infty]$ gibt Konstanten $0 < c_{p,q} \leq C_{p,q} < \infty$, sodass

$$\forall x \in \mathbb{K}^d : \quad c_{p,q} \cdot \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq C_{p,q} \cdot \|x\|_p. \quad (\text{I.67})$$

- Analog ist für $\mathbb{K}^\mathbb{N} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}\} = \{\underline{x} = (x_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}\}$ und $1 \leq p < \infty$ durch

$$\|\underline{x}\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{I.68})$$

eine Norm definiert, ebenso durch

$$\|\underline{x}\|_\infty := \sup_n \{|x_n|\} \quad (\text{I.69})$$

Dabei verstehen wir $(\mathbb{K}^\mathbb{N}, \|\cdot\|_p)$ als den Teilraum von $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, für dessen Elemente $\underline{x}$ auch $\|\underline{x}\|_p < \infty$ gilt, und wir bezeichnen

$$(\mathbb{K}^\mathbb{N}, \|\cdot\|_p) =: \ell^p(\mathbb{N}) =: \left\{ \underline{x} = (x_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K} \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty \right\}. \quad (\text{I.70})$$

$\ell^p(\mathbb{N})$ ist vollständig für alle $1 \leq p \leq \infty$. Die Normäquivalenz (I.67) gilt in diesem Fall nicht.

Definition I.13. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{B}(X; Y) := \{ A : X \rightarrow Y \mid A \text{ ist linear, } \|A\|_{\mathcal{B}(X; Y)} < \infty \} \quad (\text{I.71})$$

den Raum der **beschränkten linearen Operatoren (von X nach Y)**, wobei

$$\|A\|_{\mathcal{B}(X; Y)} := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \right\} = \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \{ \|Ax\|_Y \} \quad (\text{I.72})$$

die **Operatornorm von A** ist.

Satz I.14. Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banach-Raum, so ist auch $(\mathcal{B}(X; Y), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(X; Y)})$ ein Banach-Raum.

Beweis. Übungsaufgabe □

Satz I.15. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banach-Räume über $\mathbb{K}$ und $A : X \rightarrow Y$ linear. Dann gilt folgende Äquivalenz:

$$\{ \|A\|_{\mathcal{B}(X; Y)} < \infty \} \Leftrightarrow \{ A : X \rightarrow Y \text{ ist stetig} \}. \quad (\text{I.73})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $A \in \mathcal{B}(X; Y)$ folgt sofort aus (I.72), dass

$$\forall x \in X : \quad \|Ax\|_Y \leq \|A\|_{\mathcal{B}(X; Y)} \cdot \|x\|_X. \quad (\text{I.74})$$

Für $x = 0$ ist diese Abschätzung trivial richtig, und für $x \neq 0$ können wir wie folgt abschätzen,

$$\|Ax\|_Y = \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \cdot \|x\|_X \leq \sup_{x' \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax'\|_Y}{\|x'\|_X} \right\} \cdot \|x\|_X = \|A\|_{\mathcal{B}(X; Y)} \cdot \|x\|_X. \quad (\text{I.75})$$

- Sind $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ drei Banach-Räume und $B \in \mathcal{B}(X; Y)$ sowie $A \in \mathcal{B}(Y; Z)$, so ist $AB \in \mathcal{B}(X; Z)$, und es gilt die *Submultiplikativität*

$$\|AB\|_{\mathcal{B}(X; Z)} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(Y; Z)} \cdot \|B\|_{\mathcal{B}(X; Y)} \quad (\text{I.76})$$

der Operatornorm. Für $x \in X \setminus \{0\}$ mit $Bx \neq 0$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\|ABx\|_Z}{\|x\|_X} &= \frac{\|A(Bx)\|_Z}{\|Bx\|_Y} \cdot \frac{\|Bx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Ay\|_Z}{\|y\|_Y} \right\} \cdot \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Bx\|_Y}{\|x\|_X} \right\} \\ &= \|A\|_{\mathcal{B}(Y; Z)} \cdot \|B\|_{\mathcal{B}(X; Y)}, \end{aligned} \quad (\text{I.77})$$

was natürlich auch für $Bx = 0$ richtig ist.

Als Nächstes diskutieren wir speziell die euklidische ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Norm $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{\text{eukl}}$ bzw. unitäre ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Norm $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{\text{unit}}$ auf $\mathbb{K}^d$,

$$\|\vec{x}\|_2 = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle^{1/2}, \quad (\text{I.78})$$

wobei für $d \in \mathbb{N}$ und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d), \vec{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{K}^d$

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{\nu=1}^d \bar{x}_\nu y_\nu \quad (\text{I.79})$$

das euklidische bzw. unitäre Skalarprodukt darstellen. (Dabei betrachten wir reelle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ als komplexe Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil.) Zunächst beweisen wir die

Satz I.16 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).

Sind $d \in \mathbb{N}$ und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)^T, \vec{y} = (y_1, \dots, y_d)^T \in \mathbb{K}^d$, so gilt

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|_2 \|\vec{y}\|_2, \quad (\text{I.80})$$

d.h.

$$\left| \sum_{\nu=1}^d \bar{x}_\nu y_\nu \right| \leq \left(\sum_{\nu=1}^d |x_\nu|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\nu=1}^d |y_\nu|^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{I.81})$$

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ an – s.o. Weiterhin ist (I.80) für $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$ trivialerweise richtig, und wir nehmen im Folgenden an, dass $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \neq 0$ gilt, was $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $\vec{y} \neq \vec{0}$ und somit auch $\|\vec{x}\| > 0$ und $\|\vec{y}\| > 0$ nach sich zieht. Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ ist dann $\|\lambda\vec{x} + \vec{y}\|_2 \geq 0$, also

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda\vec{x} + \vec{y} | \lambda\vec{x} + \vec{y} \rangle = \bar{\lambda}\lambda \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle + \bar{\lambda} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \lambda \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle \\ &= |\lambda|^2 \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle + 2\text{Re}\{\bar{\lambda} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle\}. \end{aligned} \quad (\text{I.82})$$

Wir setzen

$$\lambda := -r \frac{\overline{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}}{|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|}, \quad (\text{I.83})$$

wobei $r > 0$ später gewählt wird. Dann sind $|\lambda| = r$ und

$$2\text{Re}\{\bar{\lambda} \cdot \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle\} = 2\text{Re}\left\{ -r \frac{\overline{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|} \right\} = -2r |\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|. \quad (\text{I.84})$$

Damit folgt aus (I.82), dass

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \frac{r}{2} \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \frac{1}{2r} \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle. \quad (\text{I.85})$$

Die Behauptung (I.80) resultiert nun mit $r := \sqrt{\frac{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}}$. $\square$

Seien nun $M, N \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{K}^M$ und $Y = \mathbb{K}^N$ sowie $\|\vec{x}\|_X := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_M|^2}$ und $\|\vec{y}\|_Y := \sqrt{|y_1|^2 + \dots + |y_N|^2}$, für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{K}^M$ und $\vec{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{K}^N$.

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die linearen Abbildungen $\text{Hom}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ von $\mathbb{K}^M$ nach $\mathbb{K}^N$ mit den $N \times M$ -Matrizen identifiziert werden können, $\text{Hom}(X; Y) \sim \mathfrak{M}_{N \times M}(\mathbb{K})$, und deshalb einen $M \cdot N$ -dimensionalen $\mathbb{K}$ -Vektorraum bilden. Insbesondere ist der Vektorraum der linearen Abbildungen von $\mathbb{K}^M$ nach $\mathbb{K}^N$ *endlich dimensional*.

Lemma I.17. Seien $M, N \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ eine lineare Abbildung mit Matrixdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.86})$$

Dann ist $A \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ beschränkt bezüglich der normierten Räume $(\mathbb{K}^M, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_2)$, und es gilt

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)} \leq \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |a_{n,m}|^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{I.87})$$

Beweis. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz I.16) ist

$$\begin{aligned} \|A\vec{x}\|_{\mathbb{K}^N} &= \left(\sum_{n=1}^N |(A\vec{x})_n|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^N \left| \sum_{m=1}^M a_{n,m} x_m \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left[\sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^M |a_{n,m}|^2 \right) \left(\sum_{m=1}^M |x_m|^2 \right) \right]^{1/2} \\ &= \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |a_{n,m}|^2 \right)^{1/2} \|\vec{x}\|_{\mathbb{K}^M}. \end{aligned} \quad (\text{I.88})$$

Also ist

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)} = \sup_{\vec{x} \neq \vec{0}} \left\{ \frac{\|A\vec{x}\|_{\mathbb{K}^N}}{\|\vec{x}\|_{\mathbb{K}^M}} \right\} \leq \left[\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |a_{n,m}|^2 \right]^{1/2} < \infty. \quad (\text{I.89})$$

□