

Analysis II

Prof. Dr. Volker Bach

Technische Universität Braunschweig
Sommersemester 2025

Inhaltsverzeichnis

I	Metrische und normierte Räume	4
I.1	Metrische Räume	4
I.2	Der Banachsche Fixpunktsatz	8
I.3	Vektorräume und lineare Abbildungen	9
I.4	Normierte Räume und Operatornorm	14
II	Konvergenz von Funktionenfolgen	19
II.1	Punktweise und gleichmäßige Konvergenz	19
II.2	Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit	22
II.3	Das mathematische Pendel - ein Anwendungsbeispiel	23
II.4	Gleichmäßige Konvergenz, Differentiation und Integration	26
II.5	Ergänzungen	27
II.5.1	Beweis von Satz II.5	27
II.5.2	Beweis von Satz II.6	28
III	Differentiation	
	vektorwertiger Funktionen	30
III.1	Totale Differenzierbarkeit	30
III.2	Partielle und stetige Differenzierbarkeit	32
III.3	Vertauschbarkeit stetiger partieller Ableitungen	36
IV	Richtungsableitung und Extrema	40
IV.1	Der Satz von Taylor in mehreren Veränderlichen	40
IV.2	Gradient, Richtungsableitung und Hessesche Matrix	43
IV.3	Kritische Punkte und Extremalwerte bei mehreren Veränderlichen	44
IV.4	Ergänzungen	51
IV.4.1	Beweis von Korollar IV.2	51
V	Umkehrfunktionen und implizite Funktionen	52
V.1	Umkehrfunktionen und lokale Invertibilität	52
V.2	Lokale Auflösbarkeit	56
V.3	Extrema mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren	60
V.4	Ergänzungen	69
V.4.1	Beweis von Lemma V.1	69
VI	Grundzüge der Maßtheorie	71
VI.1	Ringe und Figuren	71
VI.2	Prämaße	74
VI.3	Sigma-Algebren	78

VI.4	Das äußere Maß	80
VI.5	Maße	84
VII	Integration über Maße	87
VII.1	Riemann-Integrabilität monotoner Funktionen	87
VII.2	Messbare Funktionen	90
VII.3	Die Konvergenzsätze	93
VII.4	Eigenschaften des Integrals	96
VIII	Produktmaße und der Satz von Fubini	100
VIII.1	Produkt-Sigma-Algebren	100
VIII.2	Das Produkt zweier Maße	101
IX	Die Transformationsformel	107
X	Faltung und Regularisierung	114

I. Metrische und normierte Räume

In diesem ersten Kapitel führen wir den Begriff der *Metrik* auf einer Menge und den Begriff der *Norm* auf einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum ein, wobei in dieser Vorlesung $\mathbb{K}$ stets den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ der reellen oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ den der komplexen Zahlen bezeichnet.

I.1. Metrische Räume

Definition I.1. Sei $M \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge.

Eine Abbildung $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt **Metrik (auf M)** $:\Leftrightarrow$

(i)

$$\forall x, y \in M : \quad \{\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y\}, \quad (\text{I.1})$$

(ii)

$$\forall x, y \in M : \quad \rho(x, y) = \rho(y, x), \quad (\text{I.2})$$

(iii)

$$\forall x, y, z \in M : \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \quad (\text{I.3})$$

In diesem Fall bezeichnen wir (M, ρ) als **metrischen Raum**.

Definition I.2. Sei (M, ρ) ein metrischer Raum.

(i) Sind $r > 0$ und $x \in M$, so heißt

$$B_\rho(x, r) := \{y \in M \mid \rho(y, x) < r\} \quad (\text{I.4})$$

offene Kugel um x vom Radius r.

(ii) Sei $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in A$ heißt **innerer Punkt (I.P.)**

$$:\Leftrightarrow \quad \exists r > 0 : \quad B_\rho(x, r) \subseteq A. \quad (\text{I.5})$$

(iii) Sei $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in M$ heißt **Häufungspunkt (H.P.) von A**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall r > 0 : \quad B_\rho(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset. \quad (\text{I.6})$$

(iv) Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt **offen**

$$:\Leftrightarrow \quad \text{Jeder Punkt in } U \text{ ist ein innerer Punkt} \quad (\text{I.7})$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in U \exists r > 0 : \quad B_\rho(x, r) \subseteq U. \quad (\text{I.8})$$

(v) Eine Teilmenge $V \subseteq M$ heißt **abgeschlossen**

$$:\Leftrightarrow \quad V \text{ enthält alle seine Häufungspunkte} \quad (\text{I.9})$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ x \text{ ist H.P. von } V \Rightarrow x \in V \right\}. \quad (\text{I.10})$$

(vi) Eine Teilmenge $K \subseteq M$ heißt **kompakt**

$:\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung von K enthält eine endliche offene Überdeckung von K .

Bemerkungen und Beispiele.

- Viele topologische Eigenschaften von $\mathbb{R}$, die wir schon früher kennengelernt haben, gelten auch in allgemeinen metrischen Räumen, ihr Beweis ist eine bloße Transkription des Beweises aus Analysis 1.
- So sind $M, \emptyset \subseteq M$ beide sowohl offen als auch abgeschlossen.
- Weiterhin ist $A \subseteq M$ genau dann offen, wenn die Komplementmenge $M \setminus A \subseteq M$ abgeschlossen ist.
- Jede kompakte Menge $K \subseteq M$ ist beschränkt und abgeschlossen.
- Für $M = \mathbb{K}^d$ ist die Kompaktheit von $K \subseteq M$ nach dem Satz von Heine-Borel sogar äquivalent zur Beschränktheit und Abgeschlossenheit von K . Dies ist für metrische Räume jedoch im Allgemeinen falsch.

Eine unmittelbare Folgerung aus der Definition der Kompaktheit ist folgendes allgemeines Intervallschachtelungsprinzip.

Lemma I.3. Seien (M, ρ) ein metrischer Raum und $(K_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{P}(M)^\mathbb{N}$ eine absteigende Folge nichtleerer kompakter Mengen $K_n \supseteq K_{n+1} \neq \emptyset$. Dann ist auch ihr Schnitt K nichtleer,

$$K := \bigcap_{n=1}^\infty K_n \neq \emptyset. \quad (\text{I.11})$$

Beweis. Wir führen die Annahme $K = \emptyset$ zum Widerspruch. Wir definieren die aufsteigende Folge $(U_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{P}(M)^\mathbb{N}$ von Mengen $U_n := M \setminus K_n \subseteq U_{n+1}$. Als kompakte Mengen sind die K_n auch abgeschlossen, und die Mengen U_n sind alle offen. Wir beobachten, dass

$$K_1 \subseteq M = M \setminus K = \bigcup_{n=1}^\infty U_n. \quad (\text{I.12})$$

Also ist $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ eine offene Überdeckung von K_1 , die wegen deren Kompaktheit eine endliche offene Überdeckung enthält. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$K_1 \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_N = U_N = M \setminus K_N. \quad (\text{I.13})$$

Damit ist

$$\emptyset = K_1 \cap K_N = K_N, \quad (\text{I.14})$$

was der Annahme widerspricht, dass alle $K_n \neq \emptyset$ nichtleer sind. $\square$

Definition I.4. Sei (M, ρ) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \in M^\mathbb{N}$ heißt **konvergent** $:\Leftrightarrow$

$$\exists x \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad \rho(x, x_n) \leq \varepsilon. \quad (\text{I.15})$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{oder} \quad x_n \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{I.16})$$

(ii) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \in M^\mathbb{N}$ heißt **Cauchy-Folge** $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : \quad \rho(x_m, x_n) \leq \varepsilon. \quad (\text{I.17})$$

(iii) Ein metrischer Raum M heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow$

$$\text{Jede Cauchy-Folge in } M \text{ ist konvergent.} \quad (\text{I.18})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Eine Metrik ρ auf einer Menge M definiert einen Abstand $\rho(x, y)$ zwischen je zwei Elementen $x, y \in M$ dieser Menge.
- $(\mathbb{R}, \rho_{|\cdot|})$ ist ein vollständiger metrischer Raum mit $\rho_{|\cdot|}(x, y) := |x - y|$.
- Ebenso ist $(\mathbb{C}, \rho_{|\cdot|})$ ein vollständiger metrischer Raum mit $\rho_{|\cdot|}(w, z) := |w - z|$.
- Ist $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, so ist $(\mathbb{R}^d, \rho_{\text{eukl}})$ ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der *euklidischen Metrik*

$$\rho_{\text{eukl}}(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2}, \quad (\text{I.19})$$

wobei $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d), \vec{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$.

- Ebenso ist $(\mathbb{C}^d, \rho_{\text{unit}})$ ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der *unitären Metrik*

$$\rho_{\text{unit}}(\vec{w}, \vec{z}) := \sqrt{|w_1 - z_1|^2 + |w_2 - z_2|^2 + \dots + |w_d - z_d|^2}, \quad (\text{I.20})$$

wobei $\vec{w} = (w_1, \dots, w_d), \vec{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$.

- Sind (M, ρ) ein metrischer Raum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist auch $(N, \tilde{\rho})$ ein metrischer Raum, wobei die Metrik $\tilde{\rho} : N \times N \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch die Restriktion $\tilde{\rho} := \rho|_{N \times N}$ von ρ auf $N \times N$ definiert ist, d.h. für $x, y \in N$ ist $\tilde{\rho}(x, y) := \rho(x, y)$. Dies ist eine Eigenschaft, die normierte Räume nicht besitzen, s.u.

- Somit ist auch $(\mathbb{Q}, \rho_{|\cdot|})$ ein metrischer Raum mit $\rho_{|\cdot|}(x, y) := |x - y|$. Allerdings ist $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.
- Sei (M, ρ) ein metrischer Raum. Wie bei $\mathbb{K}$ sind $M, \emptyset \subseteq M$ offen und abgeschlossen, und für eine Teilmenge $A \subseteq M$ gilt

$$\{A \text{ ist offen}\} \Leftrightarrow \{A^c = M \setminus A \text{ ist abgeschlossen}\}. \quad (\text{I.21})$$

- Es gibt viele metrische Räume, die keine Vektorräume sind. Beispielsweise ist $M = \{a, b, c\}$ bzgl. $\rho(a, a) = \rho(b, b) = \rho(c, c) = 0$ und $\rho(a, b) = \rho(b, c) = \rho(a, c) = 1$ ein metrischer Raum (M, ρ) , den man als Graph (M, Λ) , $\Lambda \subseteq M \times M$, veranschaulichen kann.
- Etwas anschaulicher ist das folgende Beispiel der Entfernungstabelle (Autobahnkilometer) zwischen den Städten. Wir setzen $M := \{\text{BS, HB, HH, H}\}$ und definieren ρ auf $M \times M$ durch folgende Tabelle:

ρ	BS	HB	HH	H
BS	0 km	176,2 km	199,0 km	66,8 km
HB	176,2 km	0 km	130,2 km	123,0 km
HH	199,0 km	130,2 km	0 km	157,5 km
H	66,8 km	123,0 km	157,5 km	0 km

Dann ist (M, ρ) ein metrischer Raum.

Definition I.5. Seien (M, ρ) und (N, μ) zwei metrische Räume und $f : M \rightarrow N$.

(i) Die Abbildung f heißt **stetig in** $x \in M$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f[B_\rho(x, \delta)] \subseteq B_\mu(f[x], \varepsilon) \quad (\text{I.22})$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in M : \rho(x, y) < \delta \Rightarrow \mu[f(x), f(y)] < \varepsilon. \quad (\text{I.23})$$

(ii) Die Abbildung f heißt **folgenstetig in** $x \in M$

$$:\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^\infty \in M^\mathbb{N} : x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n). \quad (\text{I.24})$$

Lemma I.6. Seien (M, ρ) und (N, μ) zwei metrische Räume und $f : M \rightarrow N$. Dann gilt folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f \text{ ist folgenstetig} \quad (\text{I.25})$$

Beweis. Der Beweis ist die Transkription des Beweises der entsprechenden Aussage aus der Vorlesung *Analysis 1* unter Ersetzung von $|x - y|$ durch $\rho(x, y)$. $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- In metrischen Räumen fallen Stetigkeit und Folgenstetigkeit zusammen. In allgemeinen topologischen Räumen ist dies nicht der Fall; es gilt nur

$$\text{Stetigkeit} \Rightarrow \text{Folgenstetigkeit}. \quad (\text{I.26})$$

- Die umgekehrte Implikation erhält man für allgemeine topologische Räume nur durch Ersetzung von Folgen durch *Netze* und deren Konvergenz.

I.2. Der Banachsche Fixpunktsatz

Wir beweisen den Banachschen Fixpunktsatz¹, ein “klassischer” Satz der Funktionalanalysis.

Definition I.7. Sei (M, ρ) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Abbildung $T : M \rightarrow M$ heißt **Kontraktion**

$$:\Leftrightarrow \quad \exists 0 \leq q < 1 \quad \forall x, y \in M : \quad \rho[T(x), T(y)] \leq q \cdot \rho[x, y]. \quad (\text{I.27})$$

In diesem Fall bezeichnet man q als **Kontraktionsrate** von T .

Lemma I.8. Seien (M, ρ) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion. Dann ist T stetig auf M .

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta := \varepsilon$. Sind nun $x, y \in M$ mit $\rho[x, y] < \varepsilon$, so gilt auch $\rho[T(x), T(y)] < q\varepsilon \leq \varepsilon$, und T ist (sogar gleichmäßig) stetig auf M . $\square$

Satz I.9 (Banachscher Fixpunktsatz). Seien (M, ρ) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion. Dann besitzt T in M genau einen **Fixpunkt** $x_* \in M$, d.h. es gibt genau eine Lösung $x_* \in M$ der **Fixpunktgleichung**

$$x_* = T(x_*). \quad (\text{I.28})$$

Beweis. Da $M \neq \emptyset$, gibt es einen Punkt $x_0 \in M$. Wegen $T : M \rightarrow M$ ist mit x auch $T(x)$ in M , und wir können

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n := T(x_{n-1}) = [T \circ T](x_{n-2}) = \dots = \underbrace{[T \circ T \circ \dots \circ T]}_{n \text{ Faktoren}}(x_0) \in M \quad (\text{I.29})$$

setzen. Wir zeigen nun, dass die Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ in M konvergiert. Seien $m, n, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $m > n \geq n_0$. Dann ist mit der Dreiecksungleichung

$$\rho[x_m, x_n] \leq \rho[x_m, x_{m-1}] + \rho[x_{m-1}, x_{m-2}] + \dots + \rho[x_{n+1}, x_n]. \quad (\text{I.30})$$

Für $k \in \mathbb{N}$ ist außerdem

$$\begin{aligned} \rho[x_{k+1}, x_k] &= \rho[T(x_k), T(x_{k-1})] \leq q \cdot \rho[x_k, x_{k-1}] \\ &= q \cdot \rho[T(x_{k-1}), T(x_{k-2})] \leq q^2 \cdot \rho[x_k, x_{k-1}] \\ &\leq \dots \leq q^k \cdot \rho[x_1, x_0], \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

wobei wir k -mal die Kontraktionseigenschaft (I.27) verwendet haben. Damit ist, für $m > n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \rho[x_m, x_n] &\leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \dots + q^n) \rho[x_1, x_0] \\ &\leq q^n \rho[x_1, x_0] \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) \leq \frac{q^{n_0}}{1-q} \rho[x_1, x_0] \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

¹engl.: Contraction Mapping Principle

für $n_0 \rightarrow \infty$. Somit ist $(x_n)_{n=0}^\infty$ eine Cauchy-Folge in M . Da M vollständig ist, konvergiert $(x_n)_{n=0}^\infty$ auch,

$$x_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M. \quad (\text{I.33})$$

Außerdem ist x_* ein Fixpunkt, denn T ist nach Lemma I.8 stetig in M , und es gilt somit

$$x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = T(x_*). \quad (\text{I.34})$$

Ist nun $x_{**} \in M$ irgendein Fixpunkt von T , so folgt aus der Kontraktionseigenschaft (I.27), dass

$$\rho[x_*, x_{**}] = \rho[T(x_*), T(x_{**})] \leq q \cdot \rho[x_*, x_{**}], \quad (\text{I.35})$$

also $\rho[x_*, x_{**}] = 0$ und somit $x_{**} = x_*$. □

Der Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes ergibt auch eine quantitative Aussage über die Rate, mit der sich die Iteration $x_n := T(x_{n-1})$ dem Fixpunkt annähert.

Korollar I.10. Seien (M, ρ) ein vollständiger metrischer Raum, $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion mit Kontraktionsrate $q \in (0, 1)$ und $x_* \in M$ der Fixpunkt von T . Sind $x_0 \in M$ und $x_n := T(x_{n-1})$, für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\rho[x_n, x_*] \leq \frac{q^n}{1 - q} \rho[T(x_0), x_0], \quad (\text{I.36})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Folgt sofort mit $n := n_0$ und $m \rightarrow \infty$ in (I.32). □

I.3. Vektorräume und lineare Abbildungen

Die *Lineare Algebra* ist die Theorie der Vektorräume und der linearen Abbildungen, die strukturerhaltenden Abbildungen zwischen Vektorräumen. In diesem Abschnitt führen wir einige Begriffe der linearen Algebra ein, ohne die wir die Inhalte aus *Analysis 2* nicht formulieren können und die deshalb unabdingbar sind. Wir beschränken uns hier auf Vektorräume über die Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, die wir wie schon in *Analysis 1* einheitlich mit $\mathbb{K}$ bezeichnen, sofern die sich darauf beziehende Betrachtung für beide Fälle durchgeführt werden kann.

Definition I.11. Eine Menge X heißt **Vektorraum über $\mathbb{K}$** oder **$\mathbb{K}$ -Vektorraum** $\Leftrightarrow$ Auf X sind Addition $(+) : X \times X \rightarrow X$ und Multiplikation mit einem Skalar $(\cdot) : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$

definiert, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$(i) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X : \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad (\text{I.37})$$

$$(ii) \quad \exists \vec{0} \in X \quad \forall \vec{a} \in X : \quad \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}, \quad (\text{I.38})$$

$$(iii) \quad \forall \vec{a} \in X \quad \exists (-\vec{a}) \in X : \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}, \quad (\text{I.39})$$

$$(iv) \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in X, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \quad \begin{cases} \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}, \\ (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}, \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

$$(v) \quad \forall \vec{a} \in X, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}. \quad (\text{I.41})$$

Die Elemente von X heißen **Vektoren**, $\vec{0} \in X$ ist der **Nullvektor**. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$, die selbst ein Vektorraum ist, bezeichnet man als **Teilraum** oder **Unterraum** von X . Vektorräume über $\mathbb{R}$ bezeichnet man auch als **reelle Vektorräume**, Vektorräume über $\mathbb{C}$ als **komplexe Vektorräume**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Gleichungen (I.37), (I.38) und (I.39) besagen zusammen, dass X bezüglich der Addition (+) eine abelsche Gruppe bildet.
- $\{\vec{0}\} \subseteq X$ ist der kleinste und $X \subseteq X$ der größte Unterraum von X .
- Sind $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ und $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in X$ Vektoren, so bezeichnet man Summen der Form $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n \in X$ als **Linearkombination** der $\vec{x}_j$ und die Zahlen α_j in diesem Zusammenhang als ihre **Koeffizienten**.
- *Multiplikation mit einem Skalar* und *Skalarprodukt* ist nicht dasselbe.
- $\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. (Dieses Beispiel ist allerdings etwas künstlich.)
- Für $d \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{K}^d = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{K} \right\} \quad (\text{I.42})$$

bezüglich komponentenweiser Addition und Multiplikation mit einem Skalar,

$$\gamma \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \gamma x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \gamma x_d + y_d \end{pmatrix}, \quad (\text{I.43})$$

ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dabei sind

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_d \end{pmatrix}. \quad (\text{I.44})$$

- Für $d \in \mathbb{N}$ definieren wir die **kanonischen Basisvektoren** durch

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.45})$$

Die Menge $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_d\} \subseteq \mathbb{K}^d$ bezeichnet man auch als **Standardbasis**.

- Mit der Standardbasis wird

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_d \vec{e}_d. \quad (\text{I.46})$$

d.h. jeder Vektor kann als Linearkombination der d kanonischen Basisvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d \in \mathbb{K}^d$ mit seinen Komponenten $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{K}$ als Koeffizienten geschrieben werden.

- Die Darstellung (I.46) ist eindeutig in dem Sinne, dass für $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_d, \beta_d \in \mathbb{K}$ aus $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_d \vec{e}_d = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_d \vec{e}_d$ auch $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_d = \beta_d$ folgen.
- Für $d = 1, 2, 3$ gewinnt man durch Zeichnungen eine gewisse Vorstellung von den Vektoren in $\mathbb{R}^d$.
- Schränkt man bei den komplexen Zahlen die Multiplikation auf die reellen Elemente ein, so ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (der Dimension 2).
- Ein weiteres Beispiel eines Vektorraums ist die Menge der reellen Funktionen auf $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$,

$$\mathcal{F} := \{f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}\}. \quad (\text{I.47})$$

Mit $f, g \in \mathcal{F}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ wird $\mathcal{F}$ durch

$$\forall x \in [\alpha, \beta] : \quad (f + \gamma \cdot g)(x) := f(x) + \gamma \cdot g(x) \quad (\text{I.48})$$

zum Vektorraum (“punktweise Addition und Multiplikation mit einem Skalar”). Dabei sind

$$\forall x \in [\alpha, \beta] : \quad 0(x) := 0, \quad (-f)(x) := -f(x). \quad (\text{I.49})$$

Für diesen Vektorraum $\mathcal{F}$ liefert eine Zeichnung eine gewisse Anschauung.

- Das obige Beispiel lässt sich noch wie folgt verallgemeinern. Sind $A \neq \emptyset$ eine Menge und X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, so wird durch punktweise Addition und punktweise Multiplikation mit einem Skalar wie in (I.48) auch der Funktionenraum

$$\mathcal{F}' := \{f : A \rightarrow X\} \quad (\text{I.50})$$

zum Vektorraum über $\mathbb{K}$.

- Insbesondere ist $\mathcal{F}'$ für $A := \mathbb{Z}_1^d$ und $X := \mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ gleich (genauer: *isomorph zu*) $\mathbb{K}^d$,

$$\mathbb{K}^d = \{ \vec{x} : \mathbb{Z}_1^d \rightarrow \mathbb{K}, \nu \mapsto x_\nu \}. \quad (\text{I.51})$$

- Die Notation für Vektoren mit Vektorpfeilen ist etwas schwerfällig, und wir schreiben im Folgenden einfach $x, y, e_m^{(X)}$ und $e_n^{(Y)}$ statt $\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_m^{(X)}$ und $\vec{e}_n^{(Y)}$.

Definition I.12. Seien X und Y zwei $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Eine Abbildung $A : X \rightarrow Y$ heißt **linear** oder **(linearer) Operator**

$$:\Leftrightarrow \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K} : A(\alpha x + y) = \alpha A(x) + A(y). \quad (\text{I.52})$$

Die Menge der linearen Abbildungen $X \rightarrow Y$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X; Y)$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Menge $\mathcal{L}(X; Y)$ der linearen Abbildungen ist selbst ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum bezüglich punktweiser Operationen, d.h. für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \mathcal{L}(X; Y)$ ist $(\alpha A + B) \in \mathcal{L}(X; Y)$ definiert durch

$$\forall x \in X : (\alpha A + B)(x) := \alpha A(x) + B(x). \quad (\text{I.53})$$

- Durch vollständige Induktion erhält man aus (I.52) leicht, dass

$$A\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A(x_i), \quad (\text{I.54})$$

für alle $x_1, \dots, x_k \in X$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.

- $A(0_X) = A(0_{\mathbb{K}} \cdot 0_X) = 0_{\mathbb{K}} \cdot A(0_X) = 0_Y$.
- Seien $M, N \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{K}^M$ und $Y = \mathbb{K}^N$. Wir bezeichnen mit

$$e_1^{(X)}, e_2^{(X)}, \dots, e_M^{(X)} \subseteq X \quad \text{und} \quad e_1^{(Y)}, e_2^{(Y)}, \dots, e_N^{(Y)} \subseteq Y \quad (\text{I.55})$$

die jeweiligen Standardbasen in $\mathbb{K}^M$ und $\mathbb{K}^N$.

- Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ eine lineare Abbildung. Für jeden Vektor $x \in \mathbb{K}^M$ lässt sich der zugehörige Bildvektor $A(x) \in \mathbb{K}^N$ in eindeutiger Weise als Linearkombination $A(x) = \gamma_1 e_1^{(Y)} + \gamma_2 e_2^{(Y)} + \dots + \gamma_N e_N^{(Y)}$ der kanonischen Basisvektoren in $\mathbb{K}^N$ darstellen.

Insbesondere gibt es $N \cdot M$ eindeutige Zahlen $\{a_{n,m} | n \in \mathbb{Z}_1^N, m \in \mathbb{Z}_1^M\}$ so, dass

$$\begin{aligned} A(e_1^{(X)}) &= a_{1,1} e_1^{(Y)} + a_{2,1} e_2^{(Y)} + \dots + a_{N,1} e_N^{(Y)}, \\ A(e_2^{(X)}) &= a_{1,2} e_1^{(Y)} + a_{2,2} e_2^{(Y)} + \dots + a_{N,2} e_N^{(Y)}, \\ &\vdots \\ A(e_M^{(X)}) &= a_{1,M} e_1^{(Y)} + a_{2,M} e_2^{(Y)} + \dots + a_{N,M} e_N^{(Y)} \end{aligned} \quad (\text{I.56})$$

gelten.

- Für

$$x = x_1 e_1^{(X)} + x_2 e_2^{(X)} + \dots + x_M e_M^{(X)} \in X \quad (\text{I.57})$$

ist dann

$$A(x) = y_1 e_1^{(Y)} + y_2 e_2^{(Y)} + \dots + y_N e_N^{(Y)} \in Y, \quad (\text{I.58})$$

wobei

$$\forall n \in \mathbb{Z}_1^N : \quad y_n = \sum_{m=1}^M a_{n,m} x_m. \quad (\text{I.59})$$

- Die zu A gehörige Zahlentabelle

$$\mathcal{M}[A] := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{M \cdot N} \quad (\text{I.60})$$

bezeichnet man als Matrix und genauer als Matrixdarstellung von A bezüglich der Standardbasen in $\mathbb{K}^M$ und $\mathbb{K}^N$.

- Für $M, N \in \mathbb{N}$ ist die Matrixdarstellung $\mathcal{M} : \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N) \rightarrow \mathbb{K}^{M \cdot N}$ eine lineare Bijektion zwischen den Vektorräumen $\mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ und $\mathbb{K}^{M \cdot N}$. D.h. $\mathcal{M}$ ist bijektiv und es gilt $\mathcal{M}[\alpha A + B] = \alpha \mathcal{M}[A] + \mathcal{M}[B]$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$.
- Konkret bedeutet dies, dass man die Matrixdarstellung als riesigen Spaltenvektor interpretiert, den man aus Platzmangel in eine Tabelle mit N Zeilen und M Spalten schreibt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[A] &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}[B] = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N,1} & \dots & b_{N,M} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathcal{M}[\alpha A + B] &= \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & \alpha a_{1,M} + b_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{N,1} + b_{N,1} & \dots & \alpha a_{N,M} + b_{N,M} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I.61})$$

- Obwohl dies aus Sicht der linearen Algebra etwas ungenau ist, werden wir im Weiteren nicht mehr zwischen $\mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ und $\mathbb{K}^{M \cdot N}$ unterscheiden und die lineare Abbildung A mit ihrer Matrixdarstellung gleichsetzen,

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.62})$$

- Sind X, Y, Z drei $\mathbb{K}$ -Vektorräume und $A \in \mathcal{L}(Y; Z)$ sowie $B \in \mathcal{L}(X; Y)$, so ist auch deren Komposition linear, $(A \circ B) \in \mathcal{L}(X; Z)$.
- Sind $M, N, P \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{K}^M$, $Y = \mathbb{K}^N$, $Z = \mathbb{K}^P$, so ist für $A \in \mathcal{L}(Y; Z)$ und $B \in \mathcal{L}(X; Y)$ die Matrixdarstellung von $(A \circ B) \in \mathcal{L}(X; Z)$ durch das *Matrixprodukt* der Matrixdarstellungen von A und B gegeben.

I.4. Normierte Räume und Operatornorm

Als Nächstes definieren wir spezielle metrische Räume, die *normierten Räume*.

Definition I.13. Sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt **Norm (auf X)** $:\Leftrightarrow$

(i)

$$\forall x \in X : \quad \{\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\} \quad (\text{I.63})$$

(ii)

$$\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K} : \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad (\text{I.64})$$

(iii)

$$\forall x, y \in X : \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (\text{I.65})$$

In diesem Fall bezeichnet man $(X, \|\cdot\|)$ als **normierten Raum**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Jeder normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein metrischer Raum (X, ρ) bzgl. der Metrik

$$\forall x, y \in X : \quad \rho(x, y) := \|x - y\|. \quad (\text{I.66})$$

In diesem Fall nennt man ρ die *durch die Norm $\|\cdot\|$ induzierte Metrik*.

- Damit übertragen sich alle topologischen Begriffe und auch die Begriffe der Konvergenz, der Cauchy-Folge und der Vollständigkeit auf normierte Räume: Seien $x \in X$ und $(x_n)_{n=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ eine Folge in X . Diese Folge konvergiert gegen $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad \|x_n - x\| \leq \varepsilon, \quad (\text{I.67})$$

und sie ist eine Cauchy-Folge genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > n \geq n_0 : \quad \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon. \quad (\text{I.68})$$

- Ist ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ bzgl. der induzierten Metrik $\rho(x, y) = \|x - y\|$ vollständig, so nennen wir $(X, \|\cdot\|)$ **Banach-Raum**.

- Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}_0^+, \|\cdot\|)$ stets stetig.
- Für $d \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{\text{eukl}})$ ein reeller Banach-Raum bezüglich der **euklidischen Norm**

$$\|x\|_{\text{eukl}} := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2} = \sqrt{\langle x|x \rangle_{\text{eukl}}} , \quad (\text{I.69})$$

wobei $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{eukl}}$ das *euklidische Skalarprodukt* $\langle x|y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d$ auf $\mathbb{R}^d$ notiert.

- Für $d \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_{\text{unit}})$ ein komplexer Banach-Raum bezüglich der **unitären Norm**

$$\|z\|_{\text{unit}} := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_d|^2} = \sqrt{\langle z|z \rangle_{\text{unit}}} , \quad (\text{I.70})$$

wobei $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{unit}}$ das *unitäre Skalarprodukt* $\langle z|w \rangle := \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 + \dots + \bar{z}_d w_d$ auf $\mathbb{C}^d$ notiert.

- Für $d \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ definiert $\|x\|_p := (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$ eine Norm auf $\mathbb{K}^d$; ebenso $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_d|\}$. Sie sind alle äquivalent zueinander, d.h. zu $p, q \in [1, \infty]$ gibt Konstanten $0 < c_{p,q} \leq C_{p,q} < \infty$, sodass

$$\forall x \in \mathbb{K}^d : \quad c_{p,q} \cdot \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq C_{p,q} \cdot \|x\|_p . \quad (\text{I.71})$$

- Analog ist für $\mathbb{K}^\mathbb{N} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}\} = \{\underline{x} = (x_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}\}$ und $1 \leq p < \infty$ durch

$$\|\underline{x}\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{I.72})$$

eine Norm definiert, ebenso durch

$$\|\underline{x}\|_\infty := \sup_n \{|x_n|\} \quad (\text{I.73})$$

Dabei verstehen wir $(\mathbb{K}^\mathbb{N}, \|\cdot\|_p)$ als den Teilraum von $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, für dessen Elemente $\underline{x}$ auch $\|\underline{x}\|_p < \infty$ gilt, und wir bezeichnen

$$(\mathbb{K}^\mathbb{N}, \|\cdot\|_p) =: \ell^p(\mathbb{N}) =: \left\{ \underline{x} = (x_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K} \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty \right\}. \quad (\text{I.74})$$

$\ell^p(\mathbb{N})$ ist vollständig für alle $1 \leq p \leq \infty$. Die Normäquivalenz (I.71) gilt in diesem Fall nicht.

Definition I.14. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{B}(X; Y) := \{ A : X \rightarrow Y \mid A \text{ ist linear, } \|A\|_{\mathcal{B}(X; Y)} < \infty \} \quad (\text{I.75})$$

den Raum der **beschränkten linearen Operatoren (von X nach Y)**, wobei

$$\|A\|_{\mathcal{B}(X; Y)} := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \right\} = \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \{ \|Ax\|_Y \} \quad (\text{I.76})$$

die **Operatornorm von A** ist.

Satz I.15. Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banach-Raum, so ist auch $(\mathcal{B}(X; Y), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(X; Y)})$ ein Banach-Raum.

Beweis. Übungsaufgabe □

Satz I.16. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banach-Räume über $\mathbb{K}$ und $A : X \rightarrow Y$ linear. Dann gilt folgende Äquivalenz:

$$\{ \|A\|_{\mathcal{B}(X; Y)} < \infty \} \quad \Leftrightarrow \quad \{ A : X \rightarrow Y \text{ ist stetig} \}. \quad (\text{I.77})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $A \in \mathcal{B}(X; Y)$ folgt sofort aus (I.76), dass

$$\forall x \in X : \quad \|Ax\|_Y \leq \|A\|_{\mathcal{B}(X; Y)} \cdot \|x\|_X. \quad (\text{I.78})$$

Für $x = 0$ ist diese Abschätzung trivial richtig, und für $x \neq 0$ können wir wie folgt abschätzen,

$$\|Ax\|_Y = \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \cdot \|x\|_X \leq \sup_{x' \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax'\|_Y}{\|x'\|_X} \right\} \cdot \|x\|_X = \|A\|_{\mathcal{B}(X; Y)} \cdot \|x\|_X. \quad (\text{I.79})$$

- Sind $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ drei Banach-Räume und $B \in \mathcal{B}(X; Y)$ sowie $A \in \mathcal{B}(Y; Z)$, so ist $AB \in \mathcal{B}(X; Z)$, und es gilt die *Submultiplikativität*

$$\|AB\|_{\mathcal{B}(X; Z)} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(Y; Z)} \cdot \|B\|_{\mathcal{B}(X; Y)} \quad (\text{I.80})$$

der Operatornorm. Für $x \in X \setminus \{0\}$ mit $Bx \neq 0$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\|ABx\|_Z}{\|x\|_X} &= \frac{\|A(Bx)\|_Z}{\|Bx\|_Y} \cdot \frac{\|Bx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Ay\|_Z}{\|y\|_Y} \right\} \cdot \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Bx\|_Y}{\|x\|_X} \right\} \\ &= \|A\|_{\mathcal{B}(Y; Z)} \cdot \|B\|_{\mathcal{B}(X; Y)}, \end{aligned} \quad (\text{I.81})$$

was natürlich auch für $Bx = 0$ richtig ist.

Als Nächstes diskutieren wir speziell die euklidische ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Norm $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{\text{eukl}}$ bzw. unitäre ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Norm $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{\text{unit}}$ auf $\mathbb{K}^d$,

$$\|\vec{x}\|_2 = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle^{1/2}, \quad (\text{I.82})$$

wobei für $d \in \mathbb{N}$ und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d), \vec{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{K}^d$

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{\nu=1}^d \bar{x}_\nu y_\nu \quad (\text{I.83})$$

das euklidische bzw. unitäre Skalarprodukt darstellen. (Dabei betrachten wir reelle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ als komplexe Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil.) Zunächst beweisen wir die

Satz I.17 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).

Sind $d \in \mathbb{N}$ und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)^T, \vec{y} = (y_1, \dots, y_d)^T \in \mathbb{K}^d$, so gilt

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|_2 \|\vec{y}\|_2, \quad (\text{I.84})$$

d.h.

$$\left| \sum_{\nu=1}^d \bar{x}_\nu y_\nu \right| \leq \left(\sum_{\nu=1}^d |x_\nu|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\nu=1}^d |y_\nu|^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{I.85})$$

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ an – s.o. Weiterhin ist (I.84) für $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$ trivialerweise richtig, und wir nehmen im Folgenden an, dass $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \neq 0$ gilt, was $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $\vec{y} \neq \vec{0}$ und somit auch $\|\vec{x}\| > 0$ und $\|\vec{y}\| > 0$ nach sich zieht. Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ ist dann $\|\lambda \vec{x} + \vec{y}\|_2 \geq 0$, also

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda \vec{x} + \vec{y} | \lambda \vec{x} + \vec{y} \rangle = \bar{\lambda} \lambda \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle + \bar{\lambda} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \lambda \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle \\ &= |\lambda|^2 \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle + 2\operatorname{Re}\{\bar{\lambda} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle\}. \end{aligned} \quad (\text{I.86})$$

Wir setzen

$$\lambda := -r \frac{\overline{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}}{|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|}, \quad (\text{I.87})$$

wobei $r > 0$ später gewählt wird. Dann sind $|\lambda| = r$ und

$$2\operatorname{Re}\{\bar{\lambda} \cdot \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle\} = 2\operatorname{Re}\left\{ -\frac{r \overline{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|} \right\} = -2r |\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|. \quad (\text{I.88})$$

Damit folgt aus (I.86), dass

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \frac{r}{2} \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \frac{1}{2r} \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle. \quad (\text{I.89})$$

Die Behauptung (I.84) resultiert nun mit $r := \sqrt{\frac{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}}$. $\square$

Seien nun $M, N \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{K}^M$ und $Y = \mathbb{K}^N$ sowie $\|\vec{x}\|_X := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_M|^2}$ und $\|\vec{y}\|_Y := \sqrt{|y_1|^2 + \dots + |y_N|^2}$, für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{K}^M$ und $\vec{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{K}^N$.

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die linearen Abbildungen $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ von $\mathbb{K}^M$ nach $\mathbb{K}^N$ mit den $N \times M$ -Matrizen identifiziert werden können, $\operatorname{Hom}(X; Y) \sim \mathfrak{M}_{N \times M}(\mathbb{K})$, und deshalb einen $M \cdot N$ -dimensionalen $\mathbb{K}$ -Vektorraum bilden. Insbesondere ist der Vektorraum der linearen Abbildungen von $\mathbb{K}^M$ nach $\mathbb{K}^N$ *endlich dimensional*.

Lemma I.18. Seien $M, N \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ eine lineare Abbildung mit Matrixdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.90})$$

Dann ist $A \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ beschränkt bezüglich der normierten Räume $(\mathbb{K}^M, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_2)$, und es gilt

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)} \leq \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |a_{n,m}|^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{I.91})$$

Beweis. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz I.17) ist

$$\begin{aligned} \|A\vec{x}\|_{\mathbb{K}^N} &= \left(\sum_{n=1}^N |(A\vec{x})_n|^2 \right)^{1/2} = ; \left(\sum_{n=1}^N \left| \sum_{m=1}^M a_{n,m} x_m \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left[\sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^M |a_{n,m}|^2 \right) \left(\sum_{m=1}^M |x_m|^2 \right) \right]^{1/2} \\ &= \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |a_{n,m}|^2 \right)^{1/2} \|\vec{x}\|_{\mathbb{K}^M}. \end{aligned} \quad (\text{I.92})$$

Also ist

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)} = \sup_{\vec{x} \neq \vec{0}} \left\{ \frac{\|A\vec{x}\|_{\mathbb{K}^N}}{\|\vec{x}\|_{\mathbb{K}^M}} \right\} \leq \left[\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |a_{n,m}|^2 \right]^{1/2} < \infty. \quad (\text{I.93})$$

□

II. Konvergenz von Funktionenfolgen

Wir erinnern zunächst an den (abstrakten) Begriff einer Folge: Eine Folge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$ in einer Menge $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung

$$a_{(\cdot)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}, \quad n \mapsto a_n. \quad (\text{II.1})$$

Wir haben meistens $\mathcal{A} = \mathbb{K}$ oder $\mathcal{A} = \mathbb{K}^N$ verwendet, es besteht aber kein Grund, für $\mathcal{A}$ nicht auch allgemeinere Mengen zu wählen. In diesem Kapitel werden wir für $\mathcal{A}$ die reell- oder komplexwertigen Funktionen auf einer Menge M wählen, d.h. $\mathcal{A} := \mathcal{F}$ mit

$$\mathcal{F} := \{f : M \rightarrow \mathbb{K}\}. \quad (\text{II.2})$$

Wir wollen also Folgen $(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}^\mathbb{N}$ in $\mathcal{F}$ studieren. Eine solche Folgen heißt **Funktionenfolge auf M**.

II.1. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition II.1. Seien $M \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{F} := \{f : M \rightarrow \mathbb{K}\}$.

- (i) Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}^\mathbb{N}$ auf M heißt **punktweise konvergent** (gegen $f \in \mathcal{F}$)

$$:\Leftrightarrow \quad \forall x \in M \exists f(x) \in \mathbb{K} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad (\text{II.3})$$

und wir schreiben in diesem Fall auch

$$f_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{II.4})$$

- (ii) Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}^\mathbb{N}$ auf M heißt **gleichmäßig konvergent** (gegen $f \in \mathcal{F}$)

$$:\Leftrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{F} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \right\} = 0, \quad (\text{II.5})$$

und wir schreiben in diesem Fall auch

$$f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{II.6})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wenn man die Definition der Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ der Zahlenfolge $a_n := \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$ in (II.5) einsetzt, erhält man bei gleichmäßiger Konvergenz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (\text{II.7})$$

Zu einem vorgegebenem $\varepsilon > 0$ liegen also alle Funktionen f_n innerhalb einer ε -Umgebung um die Grenzfunktion f herum, sofern n genügend groß gewählt wird.

- Sind $M = [-1, 1]$,

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ 1 & \text{falls } 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

und

$$f_n(x) := \tanh(nx) = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}, \quad (\text{II.9})$$

so gelten $f_n(0) = 0 = f(0)$ und $|f_n(-x) - f(-x)| = |f_n(x) - f(x)|$. Zur Klärung, ob $f_n \rightarrow f$ punktweise und/oder gleichmäßig konvergiert, genügt es also, $x > 0$ zu betrachten, sodass $f(x) = 1$. Für $x > 0$ ist

$$|f(x) - f_n(x)| = 1 - \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} = \frac{2e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} \leq e^{-nx} \rightarrow 0, \quad (\text{II.10})$$

für $n \rightarrow \infty$, also konvergiert $f_n \rightarrow f$ punktweise. Für $0 < x \leq n^{-1}$ sind aber $e^{-nx} \geq e^{-1}$ und $e^{nx} + e^{-nx} \leq 2e$. Also ist

$$\sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)| \geq |f(1/n) - f_n(1/n)| \geq e^{-2} \geq \frac{1}{8}, \quad (\text{II.11})$$

und f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen f .

- In der Tat ist der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz stärker als der der punktweisen Konvergenz,

$$(f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f) \Rightarrow (f_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f). \quad (\text{II.12})$$

Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz wird eingeführt, weil der (scheinbar natürliche) Begriff der punktweisen Konvergenz die Vertauschbarkeit des Limes $n \rightarrow \infty$ mit anderen Grenzprozessen nicht gewährleistet, wie wir an den folgenden Beispielen sehen.

- Seien $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n(x) := x^n$. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{falls } x = 1. \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Offensichtlich ist f unstetig bei $x = 1$, es ist also

$$\lim_{x \nearrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = f(1) = 1 \quad (\text{II.14})$$

$$\neq 1 = f(1) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \nearrow 1} f_n(x),$$

d.h.

$$\left(f_n \text{ stetig}, \quad f_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f \right) \not\Rightarrow \left(f \text{ stetig} \right). \quad (\text{II.15})$$

Dies wird auch durch das in Glgn. (II.8)-(II.9) definierte Beispiel belegt.

- Seien $M = \mathbb{R}$ und $f_n(x) = n^{-\frac{1}{2}} \sin(nx)$, $f'_n = n^{\frac{1}{2}} \cos(nx)$. Dann sind

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad (\text{II.16})$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. die Nullfunktion $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ist punktw. (und sogar gleichmäßiger) Limes der Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty$, aber f'_n konvergiert nicht gegen f' , denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} = \infty \neq 0 = f'(0). \quad (\text{II.17})$$

Wir folgern, dass

$$\left(f_n \text{ differenzierbar}, \quad f_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f \right) \not\Rightarrow \left(f'_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f' \right), \quad (\text{II.18})$$

und beobachten, dass auch bei gleichmäßiger Konvergenz diese Implikation i.A. falsch ist.

- Schließlich erinnern wir an das Beispiel der *Dirichlet-Funktion* $f_\infty : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & \text{falls } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Da f_∞ punktw. Limes einer R-integrierbaren Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty$ und f_∞ selbst nicht R-integrierbar ist, konnten wir folgern, dass

$$\left(f_n \in \mathcal{R}[0, 1], \quad f_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f \right) \not\Rightarrow \left(f \in \mathcal{R}[0, 1] \right). \quad (\text{II.20})$$

Wir zeigen nun, dass die Konvergenz von $(f_n)_{n=1}^\infty$ bzw. von $(f'_n)_{n=1}^\infty$ in keinem der letzten drei Beispiele gleichmäßig ist:

- (i) Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ist, mit $f_n(x) = x^n$ und f wie in (II.13),

$$\begin{aligned} |f_n(1 - \varepsilon) - f(1 - \varepsilon)| &= |f_n(1 - \varepsilon)| = (1 - \varepsilon)^n \\ &= \exp[n \cdot \ln(1 - \varepsilon)] \geq \frac{1}{e} > 0, \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

vorausgesetzt, wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$\left[n \cdot \ln(1 - \varepsilon) \geq -1 \right] \Leftrightarrow \left[\varepsilon \geq 1 - e^{-1/n} \right]. \quad (\text{II.22})$$

Daher ist die Konvergenz von $f_n(x) = x^n$ nicht gleichmäßig.

- (ii) Zwar gilt im zweiten Beispiel mit $f_n(x) := n^{-1/2} \sin(nx)$, dass $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$, aber f'_n konvergiert nicht einmal punktweise, geschweige denn gleichmäßig.
- (iii) Offensichtlich ist im Beispiel der Dirichlet-Funktion, für alle $M \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_\infty(x) - f_M(x)| \geq \left| \underbrace{f_\infty(a_{M+1})}_{=1} - \underbrace{f_M(a_{M+1})}_{=0} \right| = 1 > 0, \quad (\text{II.23})$$

wobei $(a_m)_{m=1}^\infty \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Abzählung ist. Also auch hier gilt nur $f_M \xrightarrow{\text{pktw}} f_\infty$, aber nicht gleichmäßig.

Wie wir nun sehen werden, sind die für punktweise konvergente Folgen falschen Schlussfolgerungen (II.15), (II.18), und (II.20) für gleichmäßig konvergente Folgen durchaus richtig.

II.2. Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit

Satz II.2. Seien (X, ρ) ein metrischer Raum, $M \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge, $x_0 \in \overline{M}$ und $(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}^\mathbb{N}$ eine gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{F} := \{M \rightarrow \mathbb{K}\}$ konvergente Funktionenfolge auf M . Weiterhin existiere

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n := \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x). \quad (\text{II.24})$$

Dann ist die Folge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} =: a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad (\text{II.25})$$

Mit anderen Worten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \quad (\text{II.26})$$

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n \geq n_0$

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (\text{II.27})$$

Damit ist für alle $m \geq n \geq n_0$ auch

$$|a_m - a_n| = \lim_{x \rightarrow x_0} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in M} |f_m(x) - f(x)| + \sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon. \quad (\text{II.28})$$

Also ist $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ konvergent, und im Limes $m \rightarrow \infty$ erhalten wir aus (II.28) außerdem

$$\forall n \geq n_0 : \quad |a - a_n| \leq 2\varepsilon, \quad (\text{II.29})$$

wobei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Wählen wir nun zu obigem $n_0 \in \mathbb{N}$ eine Zahl $\delta > 0$ so klein, dass

$$\forall x \in B_\rho(x_0, \delta) \cap M : \quad |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| \leq \varepsilon, \quad (\text{II.30})$$

so folgt für alle $x \in B_\rho(x_0, \delta) \cap M$, dass

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| \leq 5\varepsilon. \quad (\text{II.31})$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, gilt somit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. $\square$

Korollar II.3. Seien (M, ρ) ein metrischer Raum und $(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}_b^\mathbb{N}$ eine gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{F} := \{M \rightarrow \mathbb{K}\}$ konvergente Funktionenfolge auf M . Seien weiterhin $x_0 \in M$ und f_n stetig in x_0 , für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch f stetig in x_0 .

Beweis. Korollar II.3 folgt sofort aus Satz II.2 mit $a_n := f_n(x_0)$ und $a := f(x_0)$. (Man beachte, dass $x_0 \in M$ und nicht nur $x_0 \in \overline{M}$ vorausgesetzt wird.) $\square$

Vor der Formulierung eines weiteren Korollars aus Satz II.2 erinnern wir an den Begriff eines Funktions(vektor)raums. Für jede nichtleere Menge $M \neq \emptyset$ -ob mit Metrik ausgestattet oder nicht- bildet die Familie $\mathcal{F} := \{M \rightarrow \mathbb{K}\}$ der auf M definierten Abbildungen mit Werten in $\mathbb{K}$ bezüglich punktweiser Verknüpfungen einen $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

Wir beobachten, dass der Unterraum $\mathcal{F}_b \subseteq \mathcal{F}$,

$$\mathcal{F}_b = \{f : M \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist beschränkt}\} \subseteq \mathcal{F} \quad (\text{II.32})$$

der beschränkten Funktionen auf M bezüglich der **Supremumsnorm**

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)| \quad (\text{II.33})$$

ein Banach-Raum ist. Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}_b^\mathbb{N}$ gegen eine Grenzfunktion $f \in \mathcal{F}$ ist nämlich gleichwertig mit der Konvergenz von $(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}_b^\mathbb{N}$ im normierten Raum $(\mathcal{F}_b, \|\cdot\|_\infty)$. Die Vollständigkeit von $(\mathcal{F}_b, \|\cdot\|_\infty)$ bedeutet hier konkret, dass auch die Grenzfunktion f wieder beschränkt ist, $f \in \mathcal{F}_b$.

Die beschränkten Abbildungen in $\mathcal{F}_b$, die zusätzlich stetig in M sind, bilden wiederum einen Unterraum $C_b(M) \subseteq \mathcal{F}_b \subseteq \mathcal{F}$. Das nun folgende Korollar behauptet nun, dass auch dieser Unterraum ein Banach-Raum ist.

Korollar II.4. Ist (M, ρ) ein metrischer Raum, so ist der $\mathbb{K}$ -Vektorraum $C_b(M; \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{F}_b$ der stetigen und beschränkten Funktionen $M \rightarrow \mathbb{K}$ ein bezüglich der Supremumsnorm (II.33) abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{F}_b$ und somit ein Banach(unter-)raum.

II.3. Das mathematische Pendel - ein Anwendungsbeispiel

Wir betrachten ein Fadenpendel der Länge $\ell > 0$ und Masse $m > 0$ der Kugel, die am Fadenende angebunden ist. Der Faden selbst sei masselos, Luft- und andere Reibungseffekte seien vernachlässigbar. Der Aufhängungspunkt des Pendels liege am Ursprung und der Auslenkungswinkel $\varphi \in \mathbb{R}$ werde von der Ruheposition (Pendel hängt unbeweglich nach unten) aus in mathematisch positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) gemessen. Die Bogenlänge der Auslenkung des Mittelpunkts der Kugel zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist dann $L(t) = \ell \cdot \varphi(t)$ und die Kraft, die die Veränderung der Bogenlänge mit der Zeit bewirkt ist nach den Newtonschen Gesetzen durch

$$m \ddot{L}(t) = K[L(t)] = -m g \sin[\varphi(t)] \quad (\text{II.34})$$

gegeben, was auf die Differenzialgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{1}{\ell} \ddot{L}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin[\varphi(t)] = -\kappa^2 \sin[\varphi(t)] \quad (\text{II.35})$$

führt, wobei $\kappa := \sqrt{g/\ell} > 0$ ist. Wir führen nun die (geeignet skalierte) Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(t) := \kappa^{-1} \dot{\varphi}(t) \in \mathbb{R} \quad (\text{II.36})$$

und den (Zeilen-)Vektor

$$\Theta(t) := (\varphi(t), \omega(t)) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{II.37})$$

ein. Mit diesem Vektor lässt sich *Differenzialgleichung* (II.35) äquivalent umschreiben zu

$$\dot{\Theta}(t) = F[\Theta(t)], \quad F[\varphi, \omega] := (\kappa\omega, -\kappa \sin[\varphi]). \quad (\text{II.38})$$

Ziel dieses Abschnitts ist es zu beweisen, dass nach Vorgabe eines Anfangswinkels φ_0 und einer Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0 , d.h. nach Vorgabe eines Anfangsvektors $\Theta_0 = (\varphi_0, \omega_0) \in \mathbb{R}^2$ es genau eine auf $\mathbb{R}_0^+$ stetige und auf $\mathbb{R}^+$ stetig differenzierbare Lösungsfunktion $\Theta : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ so gibt, dass

$$\forall t > 0 : \quad \dot{\Theta}(t) = F[\Theta(t)] \quad \text{und} \quad \Theta(0) = \Theta_0 \quad (\text{II.39})$$

gelten. Aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung folgern wir, dass die Existenz einer solchen Lösung der Differenzialgleichung (II.39) äquivalent ist zur Existenz einer auf $\mathbb{R}_0^+$ stetigen Lösungsfunktion $\Theta : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, die der *Integralgleichung*:

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0 : \quad \Theta(t) &= \Theta_0 + \int_0^t F[\Theta(s)] ds \\ &:= \left(\varphi_0 + \int_0^t \kappa\omega(s) ds, \omega_0 + \int_0^t \kappa \sin[\varphi(s)] ds \right), \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

genügt.

Wir zeigen nun, dass es zu jeder Wahl von $\Theta_0 \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Funktion $\Theta \in C(\mathbb{R}_0^+; \mathbb{R}^2)$ gibt, die (II.40) erfüllt. Dazu seien $\alpha > 0$ und

$$X_\alpha := \left\{ \Theta \in C(\mathbb{R}_0^+; \mathbb{R}^2) \mid \|\Theta\|_\alpha < \infty \right\}, \quad (\text{II.41})$$

wobei die Norm $\|\cdot\|_\alpha$ durch

$$\|\Theta\|_\alpha := \sup_{t \geq 0} \left\{ e^{-\alpha t} \|\Theta(t)\|_{\text{eukl}} \right\} \quad (\text{II.42})$$

definiert ist. Der Parameter α wird später geeignet festgelegt. Ähnlich wie Korollar II.3 und Korollar II.4 kann man beweisen, dass auch $(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ein Banach-Raum ist; wir führen den Beweis hier nicht aus.

Für jedes $\Theta_0 \in \mathbb{R}^2$ und $\Theta \in X_\alpha$ definieren wir $\mathcal{G}[\Theta]$ durch

$$\forall t \geq 0 : \quad \mathcal{G}[\Theta](t) := \Theta_0 + \int_0^t F[\Theta(s)] ds. \quad (\text{II.43})$$

Wir beobachten, dass wegen $|\sin(\varphi)| \leq |\varphi|$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t F[\Theta(s)] ds \right\|_{\text{eukl}} &\leq \int_0^t \|F[\Theta(s)]\|_{\text{eukl}} ds = \kappa \int_0^t \left(\omega(s)^2 + \sin^2[\varphi(s)] \right)^{1/2} ds \\ &\leq \kappa \int_0^t \left(\omega(s)^2 + \varphi(s)^2 \right)^{1/2} ds = \kappa \int_0^t e^{\alpha s} \left\{ e^{-\alpha s} \|\Theta(s)\|_{\text{eukl}} \right\} ds \\ &\leq \kappa \|\Theta\|_\alpha \int_0^t e^{\alpha s} ds \leq \frac{e^{\alpha t} \kappa}{\alpha} \|\Theta\|_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

Also ist

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}[\Theta]\|_\alpha &= \sup_{t \geq 0} \left\{ e^{-\alpha t} \|\mathcal{G}[\Theta](t)\|_{\text{eukl}} \right\} \leq \sup_{t \geq 0} \left\{ e^{-\alpha t} \|\Theta_0\|_{\text{eukl}} + e^{-\alpha t} \left\| \int_0^t F[\Theta(s)] ds \right\|_{\text{eukl}} \right\} \\ &\leq \|\Theta_0\|_{\text{eukl}} + \frac{\kappa}{\alpha} \|\Theta\|_\alpha, \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

und insbesondere bildet $\mathcal{G}$ den Banach-Raum X_α in sich ab,

$$\mathcal{G} : X_\alpha \rightarrow X_\alpha. \quad (\text{II.46})$$

Als Nächstes beobachten wir, dass für $\Theta_1, \Theta_2 \in X_\alpha$ wegen $|\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)| \leq |\varphi_2 - \varphi_1|$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t F[\Theta_2(s)] ds - \int_0^t F[\Theta_1(s)] ds \right\|_{\text{eukl}} &\leq \int_0^t \|F[\Theta_2(s)] - F[\Theta_1(s)]\|_{\text{eukl}} ds \\ &= \kappa \int_0^t \left(\{\omega_2(s) - \omega_1(s)\}^2 + \{\sin[\varphi_2(s)] - \sin[\varphi_1(s)]\}^2 \right)^{1/2} ds \\ &\leq \kappa \int_0^t \left(\{\omega_2(s) - \omega_1(s)\}^2 + \{\varphi_2(s) - \varphi_1(s)\}^2 \right)^{1/2} ds \\ &= \kappa \int_0^t e^{\alpha s} \left\{ e^{-\alpha s} \|\Theta_2(s) - \Theta_1(s)\|_{\text{eukl}} \right\} ds \\ &\leq \kappa \|\Theta_2 - \Theta_1\|_\alpha \int_0^t e^{\alpha s} ds \leq \frac{e^{\alpha t} \kappa}{\alpha} \|\Theta_2 - \Theta_1\|_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}[\Theta_2] - \mathcal{G}[\Theta_1]\|_\alpha &= \sup_{t \geq 0} \left\{ e^{-\alpha t} \|\mathcal{G}[\Theta_2](t) - \mathcal{G}[\Theta_1](t)\|_{\text{eukl}} \right\} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \left\{ e^{-\alpha t} \left\| \int_0^t \{F[\Theta_2(s)] - F[\Theta_1(s)]\} ds \right\|_{\text{eukl}} \right\} \leq \frac{\kappa}{\alpha} \|\Theta_2 - \Theta_1\|_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Daher ist $\mathcal{G} : X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ für jedes $\alpha > \kappa$ eine Kontraktion mit Kontraktionsrate κ/α . Nach Satz I.9, dem Banachschen Fixpunktsatz, besitzt $\mathcal{G}$ einen eindeutigen Fixpunkt, $\Theta = \mathcal{G}[\Theta] \in X_\alpha$. Dies ist die gesuchte eindeutige Lösung von Integralgleichung II.40.

II.4. Gleichmäßige Konvergenz, Differentiation und Integration

Das Beispiel der Dirichlet-Funktion in Abschnitt II.1 zeigt, dass die Grenzfunktion einer *punktweise konvergenten* Folge Riemann-integrabler Funktionen im Allgemeinen nicht selbst wieder Riemann-integrabel ist. Dieser negative Befund wird durch folgenden Satz kontrastiert, der aussagt, dass die Grenzfunktion einer *gleichmäßig konvergenten* Folge Riemann-integrabler Funktionen selbst auch Riemann-integrabel ist.

Satz II.5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine gleichmäßig gegen f konvergente Funktionenfolge auf $[a, b]$, so dass $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $f \in \mathcal{R}[a, b]$, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{II.49})$$

Beweis. Siehe Ergänzung II.5.1. □

Am Beispiel $f_n(x) = n^{-1/2} \sin(nx)$ auf $\mathbb{R}$, mit $n \in \mathbb{N}$, haben wir gesehen, dass Konvergenz der Funktionenfolge und Differenzierbarkeit der Folgeglieder nichts über die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion impliziert – nicht einmal, wenn die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert wie in obigem Beispiel. Es kommt auf die gleichmäßige Konvergenz der *Ableitungen* an, wie der folgende Satz zeigt.

Satz II.6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge differenzierbarer Funktionen auf (a, b) . Sei weiterhin $(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$ konvergent, für ein gewisses $x_0 \in (a, b)$, und sei die Funktionenfolge $(f'_n)_{n=1}^\infty$ der Ableitungen auf (a, b) gleichmäßig konvergent. Dann gibt es eine differenzierbare Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f \quad \text{und} \quad f'_n \xrightarrow{\text{glm.}} f' \quad (\text{II.50})$$

auf (a, b) .

Beweis. Siehe Ergänzung II.5.2. □

II.5. Ergänzungen

II.5.1. Beweis von Satz II.5

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\forall n \geq n_0 : \quad \sup_{x \in [a, b]} \{ |f_n(x) - f(x)| \} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (\text{II.51})$$

Da $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$, können wir eine Partition $P = \{x_1, x_2, \dots, x_L\} \subseteq (a, b)$ finden, sodass mit $x_0 := a$, $x_{L+1} := b$ und

$$\bar{I}(f_n; P) = \sum_{j=0}^L (x_{j+1} - x_j) \cdot \sup \{ f_n(x) \mid x_j \leq x \leq x_{j+1} \} \quad (\text{II.52})$$

$$\underline{I}(f_n; P) = \sum_{j=0}^L (x_{j+1} - x_j) \cdot \inf \{ f_n(x) \mid x_j \leq x \leq x_{j+1} \} \quad (\text{II.53})$$

auch

$$\left| \bar{I}(f_n; P) - \int_a^b f_n(x) dx \right|, \quad \left| \underline{I}(f_n; P) - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{II.54})$$

gilt. Wegen

$$\sup_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} \{ f(x) \} \leq \sup_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} \{ f_n(x) \} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (\text{II.55})$$

folgt

$$\begin{aligned} \bar{I}(f; P_0) &\leq \bar{I}(f_n; P_0) + \sum_{j=0}^L \frac{\varepsilon (x_{j+1} - x_j)}{2(b-a)} \\ &= \bar{I}(f_n; P_0) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq \int_a^b f_n(x) dx + \varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

für $n \geq n_0$. Analog erhält man

$$\underline{I}(f, P_0) \geq \int_a^b f_n(x) dx - \varepsilon, \quad (\text{II.57})$$

für $n \geq n_0$. Daher ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} = \inf_{P \in \mathcal{P}[a, b]} \left\{ \bar{I}(f; P) \right\} - \sup_{P \in \mathcal{P}[a, b]} \left\{ \underline{I}(f; P) \right\} \\ &\leq \bar{I}(f; P_0) - \underline{I}(f; P_0) \leq \left(\int_a^b f_n(x) dx + \varepsilon \right) - \left(\int_a^b f_n(x) dx - \varepsilon \right) = 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt aus (II.49) die Gleichheit von Ober- und Unterintegral von f , also dass

$$f \in \mathcal{R}[a, b]. \quad (\text{II.59})$$

Somit erhalten wir, für $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b \{f_n(x) - f(x)\} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

was (II.49) impliziert.

II.5.2. Beweis von Satz II.6

Sei $\varepsilon > 0$, und wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass, für alle $m \geq n \geq n_0$,

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{II.61})$$

$$\text{und} \quad \sup_{t \in (a,b)} |f'_m(t) - f'_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (\text{II.62})$$

Wir setzen nun $F_{m,n}(x) := f_m(x) - f_n(x)$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ eine Zwischenstelle $y \in (x, x_0]$ (falls $x \leq x_0$) bzw. $y \in [x_0, x)$ (falls $x \geq x_0$), so dass

$$F_{m,n}(x) = F_{m,n}(x_0) + (x - x_0) \cdot F'_{m,n}(y). \quad (\text{II.63})$$

Damit erhalten wir, für alle $x \in (a, b)$ und $m \geq n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + |x - x_0| \cdot |f'_m(y) - f'_n(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|x - x_0|}{b - a} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

also ist $(f_n)_{n=1}^\infty$ gleichmäßig konvergent auf (a, b) ,

$$f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n. \quad (\text{II.65})$$

Es bleibt zu zeigen, dass f differenzierbar auf (a, b) ist und dass $f' = g := \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$. Dazu fixieren wir $x \in (a, b)$ und betrachten die Funktionenfolge $(\phi_n)_{n=1}^\infty$ auf $(a, b) \setminus \{x\}$ und die Funktion $\phi : (a, b) \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\phi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad \phi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}. \quad (\text{II.66})$$

Nun stellen wir fest, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \lim_{t \rightarrow x} \phi_n(t) = f'_n(x). \quad (\text{II.67})$$

Weiterhin ist, für $m \geq n \geq n_0$ und $t \in (a, b) \setminus \{x\}$,

$$\begin{aligned} |\phi_m(t) - \phi_n(t)| &= \frac{|F_{m,n}(t) - F_{m,n}(x)|}{|t - x|} = |F'_{m,n}(y')| \\ &= |f'_m(y') - f'_n(y')| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

für eine geeignete Zwischenstelle y' zwischen t und x , abermals nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung. Daher konvergiert $(\phi_n)_{n=1}^\infty$ gleichmäßig auf $(a, b) \setminus \{x\}$. Da f_n gegen f konvergiert, folgt

$$\phi_n \xrightarrow{\text{glm.}} \phi \quad \text{auf} \quad (a, b) \setminus \{x\}. \quad (\text{II.69})$$

Wir wenden nun Satz II.2 mit

$$f_n := \phi_n, \quad f := \phi, \quad M := (a, b) \setminus \{x\}, \quad \vec{x}_0 := x, \quad A_n := f'_n(x) \quad (\text{II.70})$$

an und folgern, dass

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad (\text{II.71})$$

existiert und somit die gewünschte Gleichung $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ gilt.

III. Differentiation vektorwertiger Funktionen

III.1. Totale Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ausschließlich.

Definition III.1. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banach-Räume über $\mathbb{R}$, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ zwei nichtleere offene Teilmengen und $x \in U$.

- (i) Eine Abbildung $F : U \rightarrow V$ heißt **total differenzierbar** oder **Fréchet-differenzierbar bei x** .

$$:\Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathcal{B}(X; Y) : \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|F(x+z) - F(x) - Az\|_Y}{\|z\|_X} \right\} = 0. \quad (\text{III.1})$$

In diesem Fall heißt

$$F'(x) := dF(x) := A \quad (\text{III.2})$$

totale Ableitung oder **Fréchet-Ableitung von F bei x** .

- (ii) Die Abbildung $F : U \rightarrow V$ heißt **total differenzierbar auf U**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall x \in U : \quad F \text{ ist differenzierbar bei } x. \quad (\text{III.3})$$

In diesem Fall ist $F' : U \rightarrow \mathcal{B}(X; Y)$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ sind die linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ reelle 1×1 -Matrizen, also reelle Zahlen, $\mathcal{B}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Nach Definition III.1 ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ somit genau dann total differenzierbar bei $x \in \mathbb{R}$, wenn es eine Zahl $f'(x) \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{|f(x+z) - f(x) - f'(x) \cdot z|}{|z|} \right\} = \left| \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \right\} - f'(x) \right| = 0. \quad (\text{III.4})$$

Dies ist aber offensichtlich gleichwertig mit der Existenz von

$$f'(x) := \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \right\} \in \mathbb{R}. \quad (\text{III.5})$$

Für $\dim(X) = \dim(Y) = 1$ fällt also totale Differenzierbarkeit mit dem üblichen Begriff der Differenzierbarkeit einer reellen Funktion einer reellen Variablen zusammen.

- Weiterhin bemerken wir, dass die Ableitung einer total differenzierbaren Funktion eindeutig ist. Gilt nämlich (III.1) sowohl für $A \in \mathcal{B}(X; Y)$ als auch für $\tilde{A} \in \mathcal{B}(X; Y)$, so setzen wir $B := A - \tilde{A}$. Ist nun $z \in X \setminus \{0\}$ und $t > 0$, so beobachten wir, dass

$$\frac{\|Bz\|_Y}{\|z\|_X} = \frac{\|B(tz)\|_Y}{\|tz\|_X} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|B(tz)\|_Y}{\|tz\|_X}, \quad (\text{III.6})$$

da der zweite Ausdruck gar nicht von t abhängt. Somit ist aber

$$\begin{aligned} \frac{\|B(z)\|_Y}{\|z\|_X} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|(A - \tilde{A})(tz)\|_Y}{\|tz\|_X} \right\} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|F(x+tz) - F(x) - A(tz)\|_Y}{\|tz\|_X} \right\} + \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|F(x+tz) - F(x) - \tilde{A}(tz)\|_Y}{\|tz\|_X} \right\} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

also ist $\|Bz\|_Y = 0$, für alle $z \in X$, was $Bz = 0$ und daher $B = A - \tilde{A} = 0$ impliziert.

- Wir stellen fest, dass die totale Differenzierbarkeit (III.1) von $F : U \rightarrow V$ bei $x \in U$ auch äquivalent durch

$$\exists F'(x) \in \mathcal{B}(X; Y), \quad \delta > 0, \quad r_x : B(0, \delta) \rightarrow Y \quad \forall z \in B(0, \delta) : \quad (\text{III.8})$$

$$F(x+z) - F(x) = F'(x)z + r_x(z) \|z\|_X, \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \|r_x(z)\|_Y = 0$$

dargestellt werden kann. In der Tat ist das Restglied $r_x(z)$ in (III.8) gegeben durch $r_x(z) := \|z\|_X^{-1} (F(x+z) - F(x) - F'(x)z)$.

Lemma III.2. Sind $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ offene Teilmengen zweier Banach-Räume $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $F : U \rightarrow V$ total differenzierbar bei $x \in U$, so ist F auch stetig in $x \in U$.

Beweis. Trivial. □

Satz III.3 (Kettenregel). Seien $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ und $W \subseteq Z$ offene Teilmengen dreier $\mathbb{R}$ -Banach-Räume $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$, und seien $G : U \rightarrow V$ total differenzierbar bei $x \in U$ und $F : V \rightarrow W$ total differenzierbar bei $y := G(x) \in V$. Dann ist auch $F \circ G : U \rightarrow W$ total differenzierbar bei x , und es gilt

$$(F \circ G)'(x) = F'[G(x)] \circ G'(x). \quad (\text{III.9})$$

Beweis. Zur Verdeutlichung schreiben wir im Beweis $R_H(x, z) = \|z\|_X^{-1} (H(x+z) - H(x) - H'(x)z)$ statt $r_x(z)$ für das Restglied eine Funktion H . Außerdem schreiben wir $y_z := G(x+z)$ und $y_0 := G(x)$. Wir setzen (III.8) sukzessiv ein und erhalten so das Restglied von $F \circ G$, verwenden jeweils die Restgliedabschätzung aus (III.8). Dann ist das Restglied von $F \circ G$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
R_{F \circ G}(x, z) \|z\|_X &= (F \circ G)(x+z) - (F \circ G)(x) - F'[G(x)] G'(x) z \\
&= F(y_z) - F(y_0) - F'(y_0) G'(x) z \\
&= F(y_z) - F(y_0) - F'(y_0)(y_z - y_0) + F'(y_0) [y_z - y_0 - G'(x)z] \\
&= R_F(y_0, y_z - y_0) \|y_z - y_0\|_Y + F'(y_0) R_G(x, z) \|z\|_X \\
&= R_F(y_0, y_z - y_0) \|G'(x)z + \|z\|_X R_G(x, z)\|_Y + F'(y_0) R_G(x, z) \|z\|_X.
\end{aligned} \tag{III.10}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\|R_{F \circ G}(x, z)\|_Z &\leq \|R_F(y_0, y_z - y_0)\|_Z \left(\|G'(x)\|_{\mathcal{B}(X;Y)} + \|R_G(x, z)\|_Y \right) \\
&\quad + \|F'[G(x)]\|_{\mathcal{B}(Y;Z)} \|R_G(x, z)\|_Y
\end{aligned} \tag{III.11}$$

und deshalb $\lim_{z \rightarrow 0} \|R_{F \circ G}(x, z)\|_Z = 0$, wobei wir $\lim_{z \rightarrow 0} y_z = y_0$ verwenden. $\square$

III.2. Partielle und stetige Differenzierbarkeit

Wir wollen nun für das Folgende stets annehmen, dass $X = \mathbb{R}^M$ und $Y = \mathbb{R}^N$, wobei $M, N \in \mathbb{N}$ und die euklidische Normen $\|x\|_X = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_M^2}$, $\|y\|_Y = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_N^2}$ zu Grunde gelegt werden.

Definition III.4. Seien $M \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ offen, $x \in U$, $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $j \in \{1, 2, \dots, M\}$.

(i) Die Funktion F heißt **bei $x \in U$ partiell nach x_j differenzierbar**

$$:\Leftrightarrow \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} := \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(x + te_j) - F(x)}{t} \right\} \tag{III.12}$$

existiert, wobei $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der j -te kanonische Basisvektor ist. In diesem Fall heißt $\frac{\partial F(x)}{\partial x_j} =: \partial_{x_j} F(x)$ **partielle Ableitung von F nach x_j bei x** .

(ii) Die Funktion F heißt **bei $x \in U$ partiell differenzierbar**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, M\} : \quad F \text{ ist bei } x \text{ partiell nach } x_j \text{ differenzierbar.} \tag{III.13}$$

(iii) Die Funktion F heißt **auf U partiell differenzierbar**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall x \in U : \quad F \text{ ist bei } x \text{ partiell differenzierbar.} \tag{III.14}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die partielle Ableitung einer Funktion F nach einer Variablen x_j bedeutet konkret, dass man $F(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_M)$ nach x_j differenziert und alle anderen Variablen, $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_M$, als Parameter betrachtet.
- Wir betrachten $U = \mathbb{R}^3$ und $F(x) := x_1 x_2^2 + 10 x_3^5 x_2$, wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$. Dann sind

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} = x_2^2, \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} = 2x_1 x_2 + 10 x_3^5, \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_3} = 50 x_3^4 x_2. \quad (\text{III.15})$$

- Wir betrachten $U = \mathbb{R}^2$ und $F(x) := \sin(x_1^2 - x_2^2)$, wobei $x = (x_1, x_2)$. Dann sind

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} = 2x_1 \cos(x_1^2 - x_2^2), \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} = -2x_2 \cos(x_1^2 - x_2^2). \quad (\text{III.16})$$

Definition III.5. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$, $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $F = (F_1, F_2, \dots, F_N) : U \rightarrow V$.

- (i) F ist bei $\mathbf{x} \in U$ partiell nach $\mathbf{x}_j$ differenzierbar

$$:\Leftrightarrow \quad \forall i = 1, 2, \dots, N : F_i \text{ ist bei } x \text{ partiell nach } x_j \text{ differenzierbar.} \quad (\text{III.17})$$

- (ii) F ist bei $\mathbf{x} \in U$ partiell differenzierbar

$$:\Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M : F_i \text{ ist bei } x \text{ partiell nach } x_j \text{ differenzierbar.} \quad (\text{III.18})$$

- (iii) F ist auf U partiell differenzierbar

$$:\Leftrightarrow \quad \forall x \in U : F \text{ ist bei } x \text{ partiell differenzierbar.} \quad (\text{III.19})$$

Satz III.6. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offene Teilmengen und $F = (F_1, \dots, F_N) : U \rightarrow V$ total differenzierbar bei $x \in U$. Dann ist F bei x auch partiell differenzierbar, und es gilt

$$\forall i \in \mathbb{N}_1^N, j \in \mathbb{N}_1^M : \quad \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} = (F'(x))_{i,j}. \quad (\text{III.20})$$

Beweis. Wir setzen $z := te_j$, dann ist

$$0 = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|F(x+z) - F(x) - F'(x) \cdot z\|_{\mathbb{R}^N}}{\|z\|_{\mathbb{R}^M}} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} \|F(x+te_j) - F(x) - tF'(x)e_j\| \right\}. \quad (\text{III.21})$$

Daher muss auch, für jedes $i = 1, 2, \dots, N$,

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} [F_i(x+te_j) - F_i(x) - (F'(x))_{i,j} \cdot t] \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{F_i(x+te_j) - F_i(x)}{t} \right\} - (F'(x))_{i,j} \quad (\text{III.22})$$

gelten. □

Wir bemerken, dass die Umkehrung von Satz III.6 im Allgemeinen falsch ist, denn es gibt Funktionen, die zwar partiell, aber nicht total differenzierbar sind. Für die Umkehrung von Satz III.6 muss man zusätzlich auch die Stetigkeit der partiellen Ableitungen fordern.

Definition III.7. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$, $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offene Teilmengen und $F : U \rightarrow V$.

(i) F heißt **stetig differenzierbar auf U**

$$\begin{aligned} & :\Leftrightarrow F \text{ ist partiell differenzierbar auf } U \text{ und} \\ & \forall i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M : \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \text{ ist stetig auf } U. \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

$$C^1(U; V) := \left\{ F : U \rightarrow V \mid F \text{ ist stetig differenzierbar auf } U \right\}. \quad (\text{III.24})$$

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$. F heißt **k-mal stetig differenzierbar auf U**.

$$\begin{aligned} & :\Leftrightarrow F \text{ ist auf } U \text{ partiell differenzierbar und } \forall j = 1, \dots, M : \\ & \frac{\partial F}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ ist } (k-1)\text{-mal stetig differenzierbar auf } U. \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

$$C^k(U; V) := \left\{ F : U \rightarrow V \mid F \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar auf } U \right\}. \quad (\text{III.26})$$

(iii) Die Klasse der **unendlich oft (stetig) differenzierbaren Funktionen auf U mit Werten in V** wird mit

$$C^\infty(U; V) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U; V) \quad (\text{III.27})$$

bezeichnet, und

$$\begin{aligned} C_0^\infty(\mathbb{R}^M; V) &:= \{ F \in C^\infty(\mathbb{R}^M; V) \mid \text{supp}(F) \text{ ist kompakt} \} \\ &:= \{ F \in C^\infty(\mathbb{R}^M; V) \mid \exists R < \infty \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^M, |\vec{x}| \geq R : F(\vec{x}) = 0 \}. \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

sind die **unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger**.

Satz III.8. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offene Teilmengen und $F = (F_1, \dots, F_N) : U \rightarrow V$ stetig differenzierbar auf U . Dann ist F auch total differenzierbar auf U , die Abbildung $F' : U \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^N)$ ist stetig in U , und für alle $x \in U$ gilt

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_M} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_N(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_N(x)}{\partial x_M} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.29})$$

Die Matrix $(\partial_{x_j} F_i)_{\substack{i=1, \dots, N, \\ j=1, \dots, M}}$ der partiellen Ableitungen heißt **Jacobimatrix von F bei x**.

Beweis. Wir beweisen den Satz zunächst für den Spezialfall $N = 1$.

Wir schreiben $x = \sum_{j=1}^M x_j e_j$, $z = \sum_{j=1}^M z_j e_j$ und $w_m = \sum_{j=1}^m z_j e_j$, für alle $0 \leq m \leq M$, sowie $\partial_m F(x) := \frac{\partial F(x)}{\partial x_m}$ und beachten, dass $w_M = z$ und $w_0 = 0$. Damit ist

$$\begin{aligned}
& \left| F(x+z) - F(x) - \sum_{m=1}^M \partial_m F(x) z_m \right| \\
&= \left| \{F(x+w_M) - F(x+w_{M-1})\} + \{F(x+w_{M-1}) - F(x+w_{M-2})\} \right. \\
&\quad \left. + \dots + \{F(x+w_1) - F(x+w_0)\} - \sum_{m=1}^M \partial_m F(x) z_m \right| \\
&= \left| \sum_{m=1}^M \{F(x+w_m) - F(x+w_{m-1}) - \partial_m F(x) z_m\} \right| \\
&\leq \sum_{m=1}^M \left| F(x+w_{m-1} + z_m e_m) - F(x+w_{m-1}) - \partial_m F(x) z_m \right| \quad (\text{III.30})
\end{aligned}$$

Weiterhin sind alle $\partial_m F$ auf einer offenen Umgebung $U \ni x$ stetig, und daher sichert eine genügend kleine Wahl von $\delta > 0$, dass $x + K_\delta \subset U$, wobei $K_\delta := [-\delta, \delta]^M$. Insbesondere folgt aus der Kompaktheit von $x + K_\delta$, dass $\partial_m F$ gleichmäßig stetig auf $x + K_\delta$ ist und somit

$$Q(\delta) := \max_{1 \leq m \leq M} \max_{y \in K_\delta} |\partial_m F(x+y) - \partial_m F(x)| \rightarrow 0, \quad (\text{III.31})$$

für $\delta \rightarrow 0$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung erhalten wir nun für jedes $m \in \mathbb{Z}_1^M$ die Existenz einer Zahl $0 < \vartheta_m < 1$, sodass

$$F(x+w_{m-1} + z_m) - F(x+w_{m-1}) = \partial_m F(x+w_{m-1} + \vartheta_m z_m) \cdot z_m, \quad (\text{III.32})$$

und wegen $w_{m-1} + \vartheta_m z_m \in K_\delta$ erhalten wir daraus

$$|F(x+w_{m-1} + z_m) - F(x+w_{m-1}) - \partial_m F(x) z_m| \leq Q(\delta) |z_m|. \quad (\text{III.33})$$

Setzen wir (III.33) in (III.30) ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{\|z\|} \left| F(x+z) - F(x) - \sum_{m=1}^M \partial_m F(x) z_m \right| \leq \frac{Q(\delta)}{\|z\|} \left(\sum_{m=1}^M |z_m| \right) \leq Q(\delta) M^{1/2} \rightarrow 0, \quad (\text{III.34})$$

für $\delta \rightarrow 0$, unter zusätzlicher Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und (III.31) im letzten Schritt. Dies beweist die totale Differenzierbarkeit von F bei x .

Für $N \geq 1$ wenden wir (III.34) auf alle Komponenten $F_1, F_2, \dots, F_N$ an und erhalten

$$\forall 1 \leq n \leq N : \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\|z\|} \left| F_n(x+z) - F_n(x) - \sum_{m=1}^M \partial_m F_n(x) z_m \right| \right\} = 0. \quad (\text{III.35})$$

Konvergenz in $\mathbb{R}^N$ ist jedoch gleichwertig mit komponentenweiser Konvergenz, und deshalb ist (III.35) äquivalent zu

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\|z\|} \left\| F_n(x+z) - F_n(x) - \sum_{m=1}^M \partial_m F_n(x) z_m \right\| \right\} = 0. \quad (\text{III.36})$$

□

Korollar III.9. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offene Teilmengen und $F : U \rightarrow V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$(i) \quad F \text{ ist stetig differenzierbar auf } U. \quad (\text{III.37})$$

$$(ii) \quad F \text{ ist total differenzierbar auf } U, \text{ und} \\ F' : U \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^N) \text{ ist stetig in } U. \quad (\text{III.38})$$

$$(iii) \quad F \in C^1(U; V), \text{ d.h. } F \text{ ist partiell differenzierbar auf } U, \\ \text{und seine partiellen Ableitungen sind alle stetig in } U. \quad (\text{III.39})$$

Korollar III.9 zeigt, dass totale und partielle Differenzierbarkeit zusammen fallen, sofern die Ableitungen stetig sind. Dies veranlasst uns zu einer allgemeineren Definition des Begriffs der stetigen Differenzierbarkeit.

Definition III.10. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banach-Räume über $\mathbb{K}$ und $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ zwei nichtleere, offene Teilmengen. Die Menge der **stetig auf U differenzierbaren Funktionen mit Werten in V** ist definiert als

$$C^1(U; V) := \left\{ F : U \rightarrow V \mid F \text{ ist total differenzierbar auf } U \text{ und } F' \in C[U; \mathcal{B}(X; Y)] \right\}. \quad (\text{III.40})$$

III.3. Vertauschbarkeit stetiger partieller Ableitungen

Der folgende Satz zeigt, dass stetige Differenzierbarkeit auch die richtige Bedingung für die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen darstellt.

Satz III.11. Seien $M, k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ und $V \subseteq \mathbb{R}$ offene Teilmengen und $F \in C^k(U; V)$. Seien weiterhin $j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1, \dots, M\}$ und sei $\pi \in \mathcal{S}_k$ eine Permutation von k Elementen. Dann gilt für jedes $x \in U$ dass

$$\frac{\partial^k F(x)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} = \frac{\partial^k F(x)}{\partial x_{j_{\pi(1)}} \partial x_{j_{\pi(2)}} \dots \partial x_{j_{\pi(k)}}}. \quad (\text{III.41})$$

Beweis. Wir zeigen (III.41) zunächst für $k = 2$. Seien dazu $F \in C^2(U; V)$ sowie $\alpha, \beta \in \{1, \dots, M\}$ mit $\alpha < \beta$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} \left(\frac{\partial F}{\partial x_\beta}(x + te_\alpha) - \frac{\partial F}{\partial x_\beta}(x) \right) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{st} \left[F(x + te_\alpha + se_\beta) - F(x + te_\alpha) - F(x + se_\beta) + F(x) \right] \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow 0} \{G(t, s)\} \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

wobei

$$G(t, s) := \frac{1}{st} \left[F(x + te_\alpha + se_\beta) - F(x + se_\beta) - F(x + te_\alpha) + F(x) \right], \quad (\text{III.43})$$

für festes $x \in U$. Wir definieren weiterhin, für festes $s \neq 0$,

$$\tilde{G}_s(t) := F(x + te_\alpha + se_\beta) - F(x + te_\alpha), \quad (\text{III.44})$$

so dass,

$$\begin{aligned} G(t, s) &= \frac{1}{st} \left[\tilde{G}_s(t) - \tilde{G}_s(0) \right] = \frac{1}{s} \frac{d\tilde{G}_s(\theta_t t)}{dt} \\ &= \frac{1}{s} \left[\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(x + \theta_t te_\alpha + se_\beta) - \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(x + \theta_t te_\alpha) \right] = \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}(x + \theta_t te_\alpha + \theta_s se_\beta), \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

nach zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, wobei $\theta_t, \theta_s \in (0, 1)$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}$ bei x stetig ist (als Funktion des Vektors x), gibt es ein $\delta > 0$ so, dass

$$Q(\delta) := \max_{\|z\| < 2\delta} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}(x + z) - \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}(x) \right| < \varepsilon \quad (\text{III.46})$$

gilt. Für $|s|, |t| < \delta$ ist auch $\|\theta_t te_\alpha + \theta_s se_\beta\| < \sqrt{2}\delta$, und wir erhalten aus (III.46), dass

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x) - \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}(x) \right| &= \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow 0} \left| G(t, s) - \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}(x) \right| \\ &\leq \sup_{|s|, |t| < \delta} \left| G(t, s) - \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}(x) \right| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, muss die linke Seite verschwinden und also

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}(x) \quad (\text{III.48})$$

gelten.

Seien nun $k \geq 3$, $F \in C^k(U; V)$ und $1 \leq \ell \leq k - 1$. Dann ist

$$\widehat{F} := \frac{\partial^{k-\ell-1} F}{\partial x_{j_{\ell+2}} \partial x_{j_{\ell+3}} \dots \partial x_{j_k}} \in C^{\ell+1}(U; V) \subseteq C^2(U; V), \quad (\text{III.49})$$

und damit gilt nach (III.48)

$$\frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial x_{j_\ell} \partial x_{j_{\ell+1}}} = \frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial x_{j_{\ell+1}} \partial x_{j_\ell}}. \quad (\text{III.50})$$

Setzen wir $\widehat{F}$ ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial^k F}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell} \partial x_{j_{\ell+1}} \dots \partial x_{j_k}} = \frac{\partial^k F}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{\ell+1}} \partial x_{j_\ell} \dots \partial x_{j_k}}, \quad (\text{III.51})$$

also die Gültigkeit von (III.41) im Fall, dass π eine Transposition ist. Da sich jede Permutation als Komposition von Transpositionen schreiben lässt, folgt somit (III.41) auch für den allgemeinen Fall $\pi \in \mathcal{S}_K$. $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass es in (III.48) sogar genügen würde, die Existenz von $\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}$, $\frac{\partial F}{\partial x_\beta}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ und deren Stetigkeit zu fordern, um auch die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}$ zu schließen.
- Für $k = 2$ und $\alpha, \beta \in \{1, \dots, M\}$ behauptet (III.41), dass

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}. \quad (\text{III.52})$$

- Seien $M = k = 2$ und $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + 5x_1 x_2^6$. Dann sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2 + 5x_2^6, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1^3 + 30x_1 x_2^5, \quad (\text{III.53})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 30x_2^5 = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (\text{III.54})$$

- Auf die Stetigkeit der k . partiellen Ableitungen kann man für die Gültigkeit von Satz III.11 nicht verzichten, wie das folgende Gegenbeispiel beweist. Gegeben sei die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (\text{III.55})$$

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (\text{III.56})$$

Für die partielle Ableitung in $(0, 0)$ erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x, 0) - F(0, 0)}{x} = 0. \quad (\text{III.57})$$

Die partielle Ableitung nach x lautet also

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (\text{III.58})$$

Beachtet man die Symmetrie $F(x, y) = -F(y, x)$, so folgt

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}(y, x) = \begin{cases} -\frac{y^4 x + 4y^2 x^3 - x^5}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (\text{III.59})$$

Es gilt nun

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1, \quad (\text{III.60})$$

aber

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1. \quad (\text{III.61})$$

Daher ist F zweimal partiell differenzierbar, aber nicht zweimal *stetig* differenzierbar.

IV. Richtungsableitung und Extrema

In der Vorlesung über Differentiation einer reellen Funktion f einer reellen Veränderlichen haben wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Extrema, Minima und Maxima gefunden: An einer solchen Stelle gilt notwendig $f' = 0$, und $f'' > 0$ bzw. $f'' < 0$ sind hinreichend dafür, dass diese Stelle ein Minimum bzw. Maximum ist. Ziel dieses Abschnitts ist die Formulierung eines entsprechenden Kriteriums für reelle Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher.

IV.1. Der Satz von Taylor in mehreren Veränderlichen

Dazu verallgemeinern wir als erstes den Satz von Taylor auf mehrere Variablen.

Satz IV.1 (Taylor). Seien $M \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $U \subset \mathbb{R}^M$ eine offene Teilmenge. Seien weiterhin $x_0 \in U$ und $z \in \mathbb{R}^M$, so dass

$$S := \{x_0 + tz \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U, \quad (\text{IV.1})$$

und sei $F \in C^{k+1}(U; \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x_0 + z) &= \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^M \frac{\partial^p F(x_0)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}} \cdot z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdots z_{j_p} \\ &\quad + \sum_{j_1, \dots, j_{k+1}=1}^M \left(\int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} F(x_0 + sz)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k+1}}} ds \right) \cdot z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdots z_{j_{k+1}}, \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

wobei $z = (z_1, \dots, z_M)^T = \sum_{j=1}^M z_j e_j$.

Beweis. Wir definieren

$$f(t) := F(x_0 + tz). \quad (\text{IV.3})$$

Da U offen ist und $\{x_0 + tz \mid 0 \leq t \leq 1\}$ enthält, ist für genügend kleine $\eta > 0$ auch $\tilde{S} := \{x_0 + tz \mid -\eta < t < 1 + \eta\} \subseteq U$. Durch Anwendung der Kettenregel (Satz III.3) auf $f := F \circ G : I \rightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$I := (-\eta, 1 + \eta) \quad \text{und} \quad G : I \rightarrow U, \quad t \mapsto x_0 + tz, \quad (\text{IV.4})$$

erhält man nun leicht, dass

$$f \in C^{k+1}(I; \mathbb{R}). \quad (\text{IV.5})$$

Die Kettenregel sichert nämlich, dass mit $F \in C^1(U; \mathbb{R})$ und $G \in C^1(I; U)$ auch $f \in C^1(I; \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} f'(s) &= F'(x_0 + sz) \cdot G'(s) \\ &= \left(\frac{\partial F(x_0 + sz)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(x_0 + sz)}{\partial x_M} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(s)}{\partial s} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_M(s)}{\partial s} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F(x_0 + sz)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(x_0 + sz)}{\partial x_M} \right) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_M \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j_1=1}^M \frac{\partial F(x_0 + sz)}{\partial x_{j_1}} \cdot z_{j_1}. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Setzen wir nun

$$F_1(x) := \sum_{j_1=1}^M \frac{\partial F(x)}{\partial x_{j_1}} z_{j_1}, \quad (\text{IV.7})$$

so ist $F_1 \in C^k(U; \mathbb{R})$ und

$$f'(s) = (F_1 \circ G)(s). \quad (\text{IV.8})$$

Abermals erhalten wir dann aus der Kettenregel, dass $f' \in C^1(I; \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} f''(s) &= (f'(s))' = F_1'(x_0 + sz) \cdot G'(s) \\ &= \sum_{j_2=1}^M \frac{\partial F_1(x_0 + sz)}{\partial x_{j_2}} \cdot z_{j_2} = \sum_{j_1, j_2=1}^M \frac{\partial^2 F(x_0 + sz)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} \cdot z_{j_1} z_{j_2}, \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

wobei wir die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen gemäß Satz III.11 verwenden.

Nach $(k+1)$ -maliger Anwendung dieses Arguments erhalten wir dann, dass $f \in C^{k+1}(I; \mathbb{R})$ – wie in (IV.5) behauptet – und dass

$$f^{(p)}(s) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^M \frac{\partial^p F(x_0 + sz)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_p}} z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdots z_{j_p}, \quad (\text{IV.10})$$

für alle $p = 0, 1, \dots, k+1$. Nun wenden wir den Satz von Taylor auf f an und erhalten, für alle $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{p=0}^K \frac{t^p}{p!} f^{(p)}(0) + \int_0^t \frac{(t-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds, \quad (\text{IV.11})$$

und insbesondere für $t = 1 \in I$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F(x_0 + z) &= f(1) = \sum_{p=0}^K \frac{f^{(p)}(0)}{p!} + \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \\ &= \sum_{p=0}^K \frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^K \frac{\partial^p F(x_0)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}} z_{j_1} \dots z_{j_p} \\ &\quad + \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_{k+1}=1}^M \left(\int_0^1 (1-s)^k \frac{\partial^{k+1} F(x_0 + sz)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k+1}}} ds \right) \cdot z_{j_1} \dots z_{j_{k+1}}. \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

□

Korollar IV.2. Seien $M \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine offene Teilmenge. Seien $x_0 \in U$ und $x \in \mathbb{R}^M$, so dass

$$S := \{x_0 + tz \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U, \quad (\text{IV.13})$$

und sei $F \in C^{k+1}(U; \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x_0 + z) &= \sum_{p=1}^k \sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = k+1}}^p \left(\frac{\partial^p F(x_0)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_M^{p_M}} \right) \cdot \left(\frac{z_1^{p_1} \dots z_M^{p_M}}{p_1! \dots p_M!} \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = k+1}}^{k+1} \left(\int_0^1 (k+1)(1-s)^k \left(\frac{\partial^{k+1} F(x_0 + sz)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_M^{p_M}} \right) ds \right) \cdot \left(\frac{z_1^{p_1} \dots z_M^{p_M}}{p_1! \dots p_M!} \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Bemerkungen und Beispiele. Für $M = 2$, $U := \mathbb{R}^2$ und $F(x_1, x_2) := \cos(x_1) + \cos(x_2)$ ist offensichtlich $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Der Graph von F ähnelt einem Eierkarton. Wir wenden nun Satz IV.1 für $k = 2$ an und erhalten mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -\sin x_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -\sin x_2, \quad (\text{IV.15})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = -\cos x_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -\cos x_2, \quad (\text{IV.16})$$

dass

$$\begin{aligned} F(x + z) &= \cos(x_1) + \cos(x_2) - z_1 \cdot \sin(x_1) - z_2 \cdot \sin(x_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} z_1^2 \cdot \cos(x_1) - \frac{1}{2} z_2^2 \cdot \cos(x_2) + R_3 \cdot \|z\|_{\text{eukl}}^3, \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

wobei

$$R_3 = \sum_{j_1, \dots, j_3=1}^2 \left(\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2!} \frac{\partial^3 F(x+sz)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}} ds \right) \cdot \left(\frac{z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdot z_{j_3}}{\|z\|_{\text{eukl}}^3} \right) \quad (\text{IV.18})$$

und deshalb

$$\begin{aligned} |R_3| &\leq \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \left(\frac{\partial^3 F(x+sz)}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 F(x+sz)}{\partial x_2^3} \right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \left\{ \sin(x_1 + sz_1) + \sin(x_2 + sz_2) \right\} ds, \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \{1+1\} (1-s)^2 ds = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

gilt.

IV.2. Gradient, Richtungsableitung und Hessesche Matrix

Definition IV.3. Seien $M \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine nichtleere offene Teilmenge und $x \in U$.

(i) Für $F \in C^1(U; \mathbb{R})$ bezeichnen wir den Spaltenvektor

$$\nabla F(x) := (F'(x))^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_M} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

als **Gradient von F bei x** und

$$\langle \nabla F(x) | z \rangle = \sum_{j=1}^M \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \cdot z_j \quad (\text{IV.21})$$

heißt **Richtungsableitung von F bei x in Richtung z**, wobei $\langle x | y \rangle := \sum_{j=1}^M x_j y_j$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^M$ bezeichnet.

(ii) Für $F \in C^2(U; \mathbb{R})$ heißt $\text{Hess } F(x) \in \mathfrak{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$,

$$(\text{Hess } F(x))_{i,j} \equiv (F''(x))_{ij} := \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{IV.22})$$

Hessesche Matrix von F bei x.

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir betrachten nun einen Vektor $z = (z_1, \dots, z_M) \in \mathbb{R}^M$ der Länge 1, d.h. $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_M^2 = 1$, und bilden für $F \in C^1(U; \mathbb{R})$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ offen und $x \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(x+tz) - F(x)}{t} \right\} = \sum_{j=1}^M \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \cdot z_j = \langle \nabla F(x) | z \rangle. \quad (\text{IV.23})$$

Es gilt also

$$F(x + tz) = F(x) + t[\langle \nabla F(x) | z \rangle + r(t)], \quad (\text{IV.24})$$

mit $\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = 0$. Die Richtungsableitung gibt also an, wie stark F an der Stelle x in Richtung z wächst.

- Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir weiter, dass

$$|\langle \nabla F(x) | z \rangle| \leq \|\nabla F(x)\| \cdot \|z\| = \|\nabla F(x)\|. \quad (\text{IV.25})$$

Andererseits hat aber $\|\nabla F(x)\|^{-1} \cdot \nabla F(x)$, für $\nabla F(x) \neq 0$, die Länge 1, und es gilt

$$\left\langle \nabla F(x) \left| \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|} \right. \right\rangle = \frac{\|\nabla F(x)\|^2}{\|\nabla F(x)\|} = \|\nabla F(x)\|. \quad (\text{IV.26})$$

Also ist

$$\|\nabla F(x)\| = \max \left\{ \langle \nabla F(x) | z \rangle \mid z \in \mathbb{R}^M, \|z\| = 1 \right\}, \quad (\text{IV.27})$$

und somit ist die Richtungsableitung maximal, wenn z parallel zum Gradienten gewählt wird. Anders ausgedrückt, *liegt der Gradient einer Funktion bei x in Richtung des größtmöglichen Anstiegs von F .*

- Außerdem steht der Gradient von F bei x senkrecht zur zu x gehörigen Niveaumenge. Ist nämlich $\alpha \in C^\infty((a, b); \mathcal{N}_E)$ eine Kurve in

$$\mathcal{N}_E = \{x \in U \mid F(x) = E\} = F^{-1}(E), \quad (\text{IV.28})$$

so folgt sofort, dass

$$0 = \frac{d}{ds}(E) = \frac{d}{ds}[(F \circ \alpha)(s)] = \sum_{j=1}^M \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{d\alpha_j(s)}{ds} = \left\langle \nabla F(x) \left| \frac{d\alpha(s)}{ds} \right. \right\rangle. \quad (\text{IV.29})$$

IV.3. Kritische Punkte und Extremalwerte bei mehreren Veränderlichen

Definition IV.4. Seien (M, ρ) ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

$$x_0 \in U \text{ lokales } \left\{ \begin{array}{c} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \right\} \text{ von } F$$

$$:\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall x \in B_\rho(x_0, \delta) \cap U : \left\{ \begin{array}{c} F(x) \geq F(x_0) \\ F(x) \leq F(x_0) \end{array} \right\}. \quad (\text{IV.30})$$

Definition IV.5. Seien X ein Banach-Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $F \in C^1(U; \mathbb{R})$. Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt **kritisch** (oder **extremal**)

$$:\Leftrightarrow \quad F'(x_0) = 0. \quad (\text{IV.31})$$

Bemerkungen und Beispiele. Im Fall, dass $X = \mathbb{R}^M$, bedeutet (IV.31)

$$x_0 \in U \text{ ist kritisch} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla F(x_0) = 0. \quad (\text{IV.32})$$

Satz IV.6. Seien X ein Banach-Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $F \in C^1(U; \mathbb{R})$. Dann gelten

$$(i) \quad \left(x_0 \in U \text{ ist lokales Minimum von } F \right) \implies \left(F'(x_0) = 0 \right). \quad (\text{IV.33})$$

$$(ii) \quad \left(x_0 \in U \text{ ist lokales Maximum von } F \right) \implies \left(F'(x_0) = 0 \right). \quad (\text{IV.34})$$

Beweis. Wir zeigen nur (i), (ii) ist analog. Seien also $x_0 \in U$ ein lokales Minimum von F und $\delta > 0$ wie in (IV.30). Da $U \subseteq X$ offen ist, gibt es ein $\delta' > 0$, sodass $B_\rho(x_0, \delta') \subseteq U$. Nach (IV.30) gilt also, mit $\delta'' := \min\{\delta, \delta'\} > 0$, dass

$$\forall z \in B_\rho(x_0, \delta'') : \quad F(x_0 + z) - F(x_0) \geq 0. \quad (\text{IV.35})$$

Für $z \in X$ mit $\|z\| = 1$ und $t \in (0, \delta'')$ ist $\pm tz \in B_\rho(x_0, \delta'')$ und deshalb

$$\pm F'(x_0)z = \frac{1}{t} F'(x_0)(\pm tz) = \lim_{t \searrow 0} \left\{ \frac{F(x_0 \pm tz) - F(x_0)}{t} \right\} \geq 0. \quad (\text{IV.36})$$

Für alle $z \in X$ mit $\|z\| = 1$ muss daher $F'(x_0)z = 0$ gelten. Ist nun $w \in X \setminus \{0\}$, so setzen wir $z_w := \|w\|^{-1}w$ und beobachten, dass $\|z_w\| = 1$. Deshalb gilt

$$\forall w \in X \setminus \{0\} : \quad F'(x_0)w = \|w\|(F'(x_0)z_w) = 0, \quad (\text{IV.37})$$

was für $w = 0$ trivial richtig ist. □

Korollar IV.7. Seien $M \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine nichtleere offene Teilmenge und $F \in C^1(U; \mathbb{R})$. Dann gelten

$$(i) \quad \left(x_0 \in U \text{ ist lokales Minimum von } F \right) \implies \left(\nabla F(x_0) = 0 \right). \quad (\text{IV.38})$$

$$(ii) \quad \left(x_0 \in U \text{ ist lokales Maximum von } F \right) \implies \left(\nabla F(x_0) = 0 \right). \quad (\text{IV.39})$$

Bemerkungen und Beispiele. Wir kommen nun auf das Beispiel (IV.15)–(IV.19)

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto F(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2) \quad (\text{IV.40})$$

zurück. Die Menge $\mathcal{E}$ der Extrempunkte von F ist gegeben durch

$$\mathcal{E} := \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla F(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1) \\ -\sin(x_2) \end{pmatrix} = 0 \right\} = \pi\mathbb{Z} \times \pi\mathbb{Z}. \quad (\text{IV.41})$$

Dabei sind etwa $(0, 0) \in \mathcal{E}$ ein lokales Maximum und $(\pi, \pi) \in \mathcal{E}$ ein lokales Minimum, jedoch sind z.B. $(0, \pi), (\pi, 0) \in \mathcal{E}$ weder lokale Minima noch lokale Maxima, sondern Sattelpunkte.

Wie in der Kurvendiskussion für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen, lassen sich hinreichende Bedingungen für die Existenz eines lokalen Maximums oder Minimums durch die zweiten (oder höheren) Ableitungen formulieren.

Sei $F \in C^2(U; \mathbb{R})$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine offene Teilmenge ist. Dann ist nach Satz III.8

$$\forall x \in U, i, j \in \mathbb{N}_1^M : \quad (F''(x))_{i,j} = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j \partial x_i} = (F''(x))_{j,i} \in \mathbb{R}, \quad (\text{IV.42})$$

d.h. die Hessesche Matrix von F ist reell und symmetrisch und somit *selbstadjungiert*. Wir verwenden im Folgenden eine Variante des Spektralsatzes für selbstadjungierte Matrizen, der in der linearen Algebra bewiesen wird. Wir beschränken uns hier auf den Fall reeller, symmetrischer Matrizen.

Satz IV.8 (Spektralsatz). Seien $M \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathfrak{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$ eine reelle, selbstadjungierte Matrix, $A_{i,j} = A_{j,i} \in \mathbb{R}, \forall i, j \in \{1, \dots, M\}$. Dann sind alle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}$ reell, und es gibt eine ONB $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, M} \subseteq \mathbb{R}^M$ aus zugehörigen Eigenvektoren von A , so dass

$$\forall \alpha = 1, \dots, M : \quad A\varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha. \quad (\text{IV.43})$$

Explizit gilt mit $\varphi_\alpha = \sum_{i=1}^M \varphi_\alpha(i) e_i$ sogar

$$\forall i, j = 1, \dots, M : \quad A_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha \varphi_\alpha(i) \varphi_\alpha(j). \quad (\text{IV.44})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ von A durchaus nicht alle paarweise verschieden sein müssen.
- Weiterhin bemerken wir, dass die Transformationsmatrix U , die die kanonische Basis $\{e_1, \dots, e_M\}$ mit $Ue_i = \varphi_i$ auf die ONB $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ aus Eigenvektoren von A abbildet, **orthogonal** ist, $U \in O(M)$, d.h. $UU^T = U^T U = \mathbb{1}$. Wegen

$$U_{ij} = \varphi_j(i), \quad (U^T)_{k\ell} = \varphi_k(\ell), \quad (\text{IV.45})$$

folgt daraus, dass

$$\sum_{\alpha=1}^M \varphi_\alpha(i) \varphi_\alpha(\ell) = (UU^T)_{i\ell} = (\mathbb{1})_{i,\ell} = \delta_{i,\ell}, \quad (\text{IV.46})$$

$$\sum_{j=1}^M \varphi_\alpha(j) \varphi_\beta(j) = (U^T U)_{\alpha\beta} = (\mathbb{1})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha,\beta}. \quad (\text{IV.47})$$

Definition IV.9. Seien $M \in \mathbb{N}$, $A = A^T \in \mathfrak{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$ eine selbstadjungierte Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}$.

$$(i) \quad A \text{ hei\ss t } \mathbf{positiv definit} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \alpha = 1, \dots, M : \quad \lambda_\alpha > 0; \quad (\text{IV.48})$$

$$(ii) \quad A \text{ hei\ss t } \mathbf{positiv semidefinit} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \alpha = 1, \dots, M : \quad \lambda_\alpha \geq 0; \quad (\text{IV.49})$$

$$(iii) \quad A \text{ hei\ss t } \mathbf{negativ definit} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \alpha = 1, \dots, M : \quad \lambda_\alpha < 0; \quad (\text{IV.50})$$

$$(iv) \quad A \text{ hei\ss t } \mathbf{negativ semidefinit} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \alpha = 1, \dots, M : \quad \lambda_\alpha \leq 0; \quad (\text{IV.51})$$

$$(v) \quad A \text{ hei\ss t } \mathbf{indefinit} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \alpha, \beta \in \{1, \dots, M\} : \quad \lambda_\alpha > 0, \lambda_\beta < 0. \quad (\text{IV.52})$$

Lemma IV.10 (Minimax-Prinzip). Seien $M \in \mathbb{N}$ und $A = A^T \in \mathfrak{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$ eine reelle, selbstadjungierte Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M$. Dann gilt

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\langle x | Ax \rangle}{\langle x | x \rangle} \mid x \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\} \right\} \leq \max \left\{ \frac{\langle x | Ax \rangle}{\langle x | x \rangle} \mid x \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\} \right\} = \lambda_M. \quad (\text{IV.53})$$

Beweis. Aus (IV.44) erhalten wir, mit $x = \sum_{i=1}^M x_i e_i$,

$$\begin{aligned} \langle x | Ax \rangle &= \sum_{i,j=1}^M x_i A_{i,j} x_j = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{i,j=1}^M \lambda_\alpha x_i \varphi_\alpha(i) \varphi_\alpha(j) x_j \\ &= \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha \underbrace{\left(\sum_{i=1}^M x_i \varphi_\alpha(i) \right)^2}_{\geq 0} \leq \lambda_M \sum_{\alpha=1}^M \left(\sum_{i=1}^M x_i \varphi_\alpha(i) \right)^2 \\ &= \lambda_M \sum_{i,j=1}^M x_i \underbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^M \varphi_\alpha(i) \varphi_\alpha(j) \right)}_{=\delta_{i,j}} x_j = \lambda_M \sum_{i=1}^M x_i^2 = \lambda_M \|x\|^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

Genauso beweist man $\langle x | Ax \rangle \geq \lambda_1 \|x\|^2$. Somit gilt

$$\lambda_1 \leq \min \left\{ \frac{\langle x | Ax \rangle}{\langle x | x \rangle} \mid x \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\} \right\} \leq \max \left\{ \frac{\langle x | Ax \rangle}{\langle x | x \rangle} \mid x \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\} \right\} \leq \lambda_M. \quad (\text{IV.55})$$

Die in (IV.53) behaupteten Gleichungen folgen nun durch Einsetzen speziell von $x := \varphi_1$ bzw. $x := \varphi_M$. $\square$

Satz IV.11. Seien $M \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine offene und nichtleere Teilmenge, $F \in C^2(U; \mathbb{R})$ und $x_0 \in U$ ein Extrempunkt, $\nabla F(x_0) = 0$. Dann gelten:

- (i) Ist die Hessesche Matrix $F''(x_0)$ von F bei x_0 positiv definit, so ist x_0 ein lokales Minimum.
- (ii) Ist die Hessesche Matrix $F''(x_0)$ von F bei x_0 negativ definit, so ist x_0 ein lokales Maximum.

Beweis. Wir beweisen nur (i), der Beweis für (ii) ist analog. Zunächst bemerken wir, dass die positive Definitheit von $F''(x_0)$ und die Stetigkeit von F'' in U impliziert, dass auch $F''(x)$ positiv definit ist, falls $\|x - x_0\|$ genügend klein ist. Sind $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M$ die Eigenwerte von $F''(x_0)$ und $z \in \mathbb{R}^M$, so gilt nämlich nach Lemma IV.10

$$\begin{aligned} \langle z | F''(x) z \rangle &= \langle z | F''(x_0) z \rangle + \langle z | [F''(x) - F''(x_0)] z \rangle \\ &\geq \lambda_1 \|z\|^2 - \|z\| \cdot \|[F''(x) - F''(x_0)] z\| \\ &\geq \{\lambda_1 - \|F''(x) - F''(x_0)\|_{B(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^M)}\} \cdot \|z\|^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

Wählen wir nun $\delta > 0$ so klein, dass $\|F''(x) - F''(x_0)\| \leq \lambda_1/2$, für $x \in B_\delta(x_0)$, so folgt dann

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \quad \forall z \in \mathbb{R}^M : \quad \langle z | F''(x) z \rangle \geq \frac{\lambda_1}{2} \|z\|^2. \quad (\text{IV.57})$$

Nun wenden wir den Satz IV.1 von Taylor mit $k = 1$ auf F für x_0 und $z \in B(0, \delta)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} F(x_0 + z) - F(x_0) &= \underbrace{\langle \nabla F(x_0) | z \rangle}_{=0} + \sum_{i,j=1}^M \int_0^1 (1-s) z_i z_j \left(\frac{\partial^2 F(x_0 + sz)}{\partial x_i \partial x_j} \right) ds \\ &= \int_0^1 (1-s) \underbrace{\langle z | F''(x_0 + sz) z \rangle}_{\geq \lambda_1 \|z\|^2/2} ds \geq \frac{\lambda_1}{4} \|z\|^2 > 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.58})$$

da $\{x_0 + sz \mid 0 \leq s \leq 1\} \subseteq B_\delta(x_0)$. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass aus (IV.58) ersichtlich ist, dass das Minimum bei x_0 auch nicht entartet ist, d.h. dass $F(x_0 + z) > F(x_0)$ für alle $z \in B(x_0, \delta) \setminus \{0\}$ gilt.
- Betrachten wir abermals $F(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ mit kritischen Punkten

$$\mathcal{E} = \{(n_1\pi, n_2\pi) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}. \quad (\text{IV.59})$$

Mit

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = -\cos(x_1), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -\cos(x_2) \quad (\text{IV.60})$$

ist dann

$$F''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\cos(x_1) & 0 \\ 0 & -\cos(x_2) \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.61})$$

Nun ist

$$-\cos(n\pi) = \begin{cases} -1, & \text{falls } n \in 2\mathbb{Z}, \\ +1, & \text{falls } n \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases} \quad (\text{IV.62})$$

Also zerfällt $\mathcal{E} = \pi\mathbb{Z} \times \pi\mathbb{Z}$ in disjunkte Teilmengen,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}) \dot{\cup} (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi) \dot{\cup} \\ & (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z}) \dot{\cup} (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi), \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

und

$$F'' \text{ ist } \begin{cases} \text{positiv definit auf} & (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi), \\ \text{negativ definit auf} & (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}), \\ \text{indefinit auf} & (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi) \cup (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z}). \end{cases} \quad (\text{IV.64})$$

Entsprechend sind

- $(0, 0) \in (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z})$ ein lokales Maximum, da $F''(0, 0)$ negativ definit ist,
 - $(\pi, \pi) \in (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi)$ ein lokales Minimum, da $F''(\pi, \pi)$ positiv definit ist und
 - $(0, \pi), (\pi, 0) \in (2\pi\mathbb{Z} + \pi \times 2\pi\mathbb{Z}) \cup (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z} + \pi)$ sind Sattelpunkte, da $F''(0, \pi)$ und $F''(\pi, 0)$ indefinit sind.
- Tatsächlich kann man im Fall, dass x_0 ein kritischer Punkt mit *indefiniten* Hesseschen Matrix $F''(x_0)$ zeigen, dass die Eigenvektoren $\{\varphi_\alpha\}$ zu negativen Eigenwerten die Richtungen angeben, in denen F lokal maximal ist. Genauso geben die Eigenvektoren $\{\varphi_\alpha\}$ zu positiven Eigenwerten die Richtungen an, in denen F lokal minimal ist.

Wegen dieser geometrischen Interpretation bezeichnet man die durch die Eigenvektoren $\{\varphi_\alpha\}$ definierten Raumrichtungen als *Hauptachsen* und die orthogonale Matrix U , die die Hessesche Matrix diagonalisiert als *Hauptachsentransformation*.

- Sind $U = \mathbb{R}^2$ und $F(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2^4$, so ist

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -4x_2^3 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \{(0, 0)\}, \quad (\text{IV.65})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -12x_2^2, \quad (\text{IV.66})$$

Somit ist

$$F''(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.67})$$

positiv semidefinit. Der Punkt $x = (0, 0)$ ist aber kein lokales Minimum. Wir sehen an diesem Beispiel, dass sich Satz IV.11 nicht auf kritische Punkte mit positiv semidefiniter Hesseschen Matrix verallgemeinern lässt.

Definition IV.12. Seien $M \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine offene und nichtleere Teilmenge und $F \in C^2(U; \mathbb{R})$. Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt **Sattelpunkt** $:\Leftrightarrow x_0$ ist extremal, $\nabla F(x_0) = 0$, und

$$\exists \delta > 0, z_\pm \in \mathbb{R}^M \forall 0 < t < \delta : \quad F(x_0 + tz_-) < F(x_0) < F(x_0 + tz_+). \quad (\text{IV.68})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist x_0 ein Extrempunkt von F mit indefiniter Hesseschen Matrix $F''(x_0)$, so ist x_0 auch ein Sattelpunkt von F .

IV.4. Ergänzungen

IV.4.1. Beweis von Korollar IV.2

Beweis. Korollar IV.2 folgt unmittelbar aus Satz IV.1 und der Identität

$$\frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^M \frac{\partial^p F(x)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}} = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p}}^p \frac{1}{p_1! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^p F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_M^{p_M}}, \quad (\text{IV.69})$$

die wir nun für alle $x \in U$ und $p \in \{0, 1, \dots, k+1\}$ durch Induktion in p zeigen wollen. Offenbar sind beide Seiten in (IV.69) gleich $F(x)$, für $p = 0$. Gilt nun (IV.69) für $p \in \{0, 1, \dots, k\}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_{p+1}=1}^M \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}}} &= \sum_{j_{p+1}=1}^M \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \left[\frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^m \frac{\partial^p F(x)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}} \right] \\ &= \sum_{j=1}^M \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p}}^p \frac{1}{p_1! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^p F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_j^{p_j} \dots \partial x_M^{p_M}} \right] \\ &= \sum_{j=1}^M \left[\sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p}}^p \frac{1}{p_1! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_j^{p_j+1} \dots \partial x_M^{p_M}} \right] \\ &\stackrel{\tilde{p}_j := p_j+1}{=} \sum_{j=1}^M \left[\sum_{\substack{p_1, \dots, \tilde{p}_j, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + \tilde{p}_j + \dots + p_M = p+1}}^p \frac{\mathbb{1}[\tilde{p}_j \geq 1]}{p_1! \dots (\tilde{p}_j - 1)! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_j^{\tilde{p}_j} \dots \partial x_M^{p_M}} \right] \\ &\stackrel{p_j := \tilde{p}_j}{=} \sum_{j=1}^M \left[\sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p+1}}^p \frac{p_j}{p_1! \dots p_j! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_j^{p_j} \dots \partial x_M^{p_M}} \right], \quad (\text{IV.70}) \end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{\mathbb{1}[\tilde{p}_j \geq 1]}{(\tilde{p}_j - 1)!} = \frac{\mathbb{1}[p_j \geq 1]}{(p_j - 1)!} = \frac{p_j}{p_j!} \quad (\text{IV.71})$$

verwendet haben. Nun vertauschen wir die Summationen und erhalten (IV.69) für $p+1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^M \left[\sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p+1}}^{K+1} \frac{p_j}{p_1! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_M^{p_M}} \right] & \quad (\text{IV.72}) \\ &= \sum_{\substack{p_1, \dots, p_M=0 \\ p_1 + \dots + p_M = p+1}}^{K+1} \underbrace{\left\{ \frac{1}{p+1} \left[\sum_{j=1}^M p_j \right] \right\}}_{=1} \frac{1}{p_1! \dots p_M!} \cdot \frac{\partial^{p+1} F(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_M^{p_M}}. \end{aligned}$$

Nach Induktion gilt damit (IV.69) für alle $p \in \{0, 1, \dots, k+1\}$. $\square$

V. Umkehrfunktionen und implizite Funktionen

V.1. Umkehrfunktionen und lokale Invertibilität

In Kapitel III haben wir gezeigt, dass totale und partielle Differenzierbarkeit zusammenfallen, sofern die Ableitungen stetig sind, was uns in Definition III.10 auf folgende Verallgemeinerung des Begriffs der stetigen Differenzierbarkeit geführt hat:

$$C^1(U; V) := \left\{ F : U \rightarrow V \mid F \text{ ist total differenzierbar auf } U \text{ und } F' \in C[U; \mathcal{B}(X; Y)] \right\}. \quad (\text{V.1})$$

Zur Vorbereitung des Satzes über die Umkehrfunktion benötigen wir ein Lemma zur Lipschitz-Stetigkeit total differenzierbarer Abbildungen.

Lemma V.1. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei $\mathbb{K}$ -Banach-Räume, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $x, x' \in U$ so, dass

$$S := \{(1 - \alpha)x + \alpha x' \mid 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq U. \quad (\text{V.2})$$

Seien weiterhin $F : U \rightarrow Y$ total differenzierbar auf U und

$$M := \sup_{z \in S} \|F'(z)\|_{\mathcal{B}(X; Y)} < \infty. \quad (\text{V.3})$$

Dann gilt

$$\|F(x) - F(x')\|_Y \leq M \|x - x'\|_X. \quad (\text{V.4})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass sich (V.4) im Fall $Y = \mathbb{R}$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung dahingehend verschärfen lässt, dass $F(x) - F(x') = F'((1 - \alpha)x + \alpha x') \cdot (x - x')$, für ein geeignetes $\alpha \in (0, 1)$ gilt.

- Für vektorwertige Abbildungen gilt dies aber im Allgemeinen nicht. Sind beispielsweise $U = (-\pi, \pi)$, $Y = \mathbb{R}^2$ und $F(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$, so ist einerseits $F(\pi/2) - F(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Andererseits ist $F'(\vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$, und mit $\vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$\|F(\vartheta_2) - F(\vartheta_1)\|_Y = \sqrt{2} \neq \frac{\pi}{2} = \|F'(\vartheta)\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}; Y)} \cdot |\vartheta_2 - \vartheta_1|, \quad (\text{V.5})$$

für jede Wahl von ϑ . Insofern hat der Mittelwertsatz der Differentialrechnung *kein* mehrdimensionales Analogon.

Satz V.2 (Lokale Invertibilität). Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$, $U \subseteq X$ eine nichtleere, offene Teilmenge, $x_0 \in U$ und $F \in C^1(U; X)$. Sei weiterhin $A := F'(x_0) \in \mathcal{B}(X)$ invertierbar mit (beschränkter) Inverse $A^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ mit $\tilde{U} \ni x_0$ so, dass folgende Aussagen gelten:

- (i) $\tilde{V} := F(\tilde{U}) \subseteq X$ ist offen und $y_0 := F(x_0) \in \tilde{V}$.
- (ii) Die Restriktion $F \in C^1(\tilde{U}; \tilde{V})$ von F auf $\tilde{U}$ ist eine Bijektion mit stetig differenzierbarer inverser Funktion $F^{-1} \in C^1(\tilde{V}; \tilde{U})$.
- (iii) Für alle $y \in \tilde{V}$ gilt

$$(F^{-1})'(y) = (F'[F^{-1}(y)])^{-1}. \quad (\text{V.6})$$

Beweis. Wir schreiben im Folgenden $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X; X)$ und $\|\cdot\|_{\text{op}} := \|\cdot\|_{\mathcal{B}(X)}$. Wegen $F \in C^1(U; X)$ ist $F' \in C[U; \mathcal{B}(X)]$ stetig. Daher können wir ein $\delta > 0$ so finden, dass

$$\forall x \in B_X(x_0, 2\delta) : \quad \|F'(x) - A\|_{\text{op}} = \|F'(x) - F'(x_0)\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|_{\text{op}}}. \quad (\text{V.7})$$

Wir setzen nun $\eta := \delta/(2\|A^{-1}\|_{\text{op}})$ und betrachten für $y \in B_Y(y_0, \eta)$ die Abbildung $\phi_y : U \rightarrow X$,

$$\phi_y(x) := x + A^{-1}[y - F(x)]. \quad (\text{V.8})$$

Für $x \in \overline{B_X(x_0, \delta)} = \{x \in X : \|x - x_0\|_X \leq \delta\}$ ist dann nach Lemma V.1

$$\begin{aligned} \|\phi_y(x) - x_0\|_X &\leq \|\phi_y(x) - \phi_y(x_0)\|_X + \|\phi_y(x_0) - x_0\|_X \\ &\leq \sup_{z \in \overline{B_X(x_0, 2\delta)}} \{\|\phi'_y(z)\|_{\text{op}}\} \|x - x_0\|_X + \|A^{-1}(y - F(x_0))\|_X \\ &\leq \sup_{z \in \overline{B_X(x_0, 2\delta)}} \{\|\phi'_y(z)\|_{\text{op}}\} \|x - x_0\|_X + \|A^{-1}\|_{\text{op}} \|y - y_0\|_X. \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

Nun ist $\|y - y_0\| < \eta = \frac{\delta}{2\|A^{-1}\|_{\text{op}}}$ und, für alle $z \in \overline{B_X(x_0, 2\delta)}$,

$$\begin{aligned} \|\phi'_y(z)\|_{\text{op}} &= \|\mathbf{1} - A^{-1} \cdot F'(z)\|_{\text{op}} = \|A^{-1}(A - F'(z))\|_{\text{op}} \\ &\leq \|A^{-1}\|_{\text{op}} \cdot \|F'(z) - A\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

Setzen wir dies in (V.9) ein, so erhalten wir

$$\forall x \in \overline{B_X(x_0, \delta)} : \quad \|\phi_y(x) - x_0\|_X \leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta, \quad (\text{V.11})$$

also bildet ϕ_y die abgeschlossene Kugel $\overline{B_X(x_0, \delta)}$ in sich ab,

$$\forall y \in B_Y(y_0, \eta) : \quad \phi_y : \overline{B_X(x_0, \delta)} \rightarrow \overline{B_X(x_0, \delta)}. \quad (\text{V.12})$$

Außerdem ist ϕ_y auf $\overline{B_X(x_0, \delta)}$ eine Kontraktion, denn für alle $x, x' \in \overline{B_X(x_0, \delta)}$ gilt

$$\|\phi_y(x) - \phi_y(x')\|_X \leq \sup_{z \in B_X(x_0, 2\delta)} \{\|\phi'_y(z)\|_{\mathcal{B}(X)}\} \|x - x'\|_X \leq \frac{1}{2} \|x - x'\|_X, \quad (\text{V.13})$$

gemäß (V.10). Nach dem Banachschen Fixpunktsatz, Satz I.9, hat deshalb ϕ_y , für jedes $y \in B_Y(y_0, \eta)$, einen eindeutigen Fixpunkt $x_y \in \overline{B_X(x_0, \delta)}$, so dass

$$x_y = \phi_y(x_y) = x_y + A^{-1} \cdot [y - F(x_y)], \quad (\text{V.14})$$

was gleichwertig ist zu

$$y = F(x_y). \quad (\text{V.15})$$

Zu (i): Setzen wir nun

$$\tilde{V} := B_Y(y_0, \eta), \quad \tilde{U} := F^{-1}(\tilde{V}), \quad (\text{V.16})$$

so folgt, dass $\tilde{V} \ni y_0$ offen ist und $\tilde{U} \ni x_0$. Außerdem impliziert die Stetigkeit von F , dass mit $\tilde{V}$ auch $\tilde{U} = F^{-1}(\tilde{V})$ offen ist.

Zu (ii): Die Eindeutigkeit der Lösung der Glg. (V.15) zeigt, dass $F : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine Bijektion mit Umkehrfunktion $G := F^{-1} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ ist.

Als Nächstes zeigen wir, dass $F'(x) \in \mathcal{B}(X)$ invertibel ist mit beschränkter Inverse $(F'(x))^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, für alle $x \in B_X(x_0, 2\delta)$. Dazu fixieren wir $x \in B_X(x_0, 2\delta)$ und definieren $Q := F'(x) \in \mathcal{B}(X)$ und, für $N \in \mathbb{N}$,

$$R_N := \sum_{n=0}^N A^{-1} [(A - Q)A^{-1}]^n. \quad (\text{V.17})$$

Wegen $x \in B_X(x_0, 2\delta)$ ist $\|A - Q\|_{\text{op}} \cdot \|A^{-1}\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2}$, nach (V.7). Für $M, N, N_0 \in \mathbb{N}$ mit $M > N \geq N_0$ folgt dann

$$\begin{aligned} \|R_M - R_N\|_{\text{op}} &= \left\| \sum_{n=N+1}^M A^{-1} [(A - Q)A^{-1}]^n \right\|_{\text{op}} \\ &\leq \|A^{-1}\|_{\text{op}} \sum_{n=N+1}^M \|A - Q\|_{\mathcal{B}(X)}^n \cdot \|A^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)}^n \leq \|A^{-1}\|_{\text{op}} \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{2^n} \\ &\leq \|A^{-1}\|_{\text{op}} \sum_{n=N_0+1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{\|A^{-1}\|_{\text{op}}}{2^{N_0}} \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{V.18})$$

für $N_0 \rightarrow \infty$. Also ist $(R_N)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(X)$ und deshalb konvergent,

$$R := \lim_{N \rightarrow \infty} R_N = \sum_{n=0}^{\infty} A^{-1} [(A - Q)A^{-1}]^n. \quad (\text{V.19})$$

Außerdem erhalten wir wie in (V.18), dass

$$\|R\|_{\text{op}} \leq \|A^{-1}\|_{\text{op}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \|A^{-1}\|_{\text{op}}. \quad (\text{V.20})$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} QR &= \sum_{n=0}^{\infty} QA^{-1} [(A - Q)A^{-1}]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -(A - Q)A^{-1} [(A - Q)A^{-1}]^n + AA^{-1} [(A - Q)A^{-1}]^n \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [(A - Q)A^{-1}]^n - [(A - Q)A^{-1}]^{n+1} \right\} = [(A - Q)A^{-1}]^0 = \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

und genauso folgt $RQ = \mathbf{1}$, also

$$R = Q^{-1} = (F'(x))^{-1}. \quad (\text{V.22})$$

Seien jetzt $y, y + z \in \tilde{V}$ und $x := G(y)$, $x + w := G(y + z) \in \tilde{U} \subseteq B_X(x_0, 2\delta)$. Wir setzen wieder $Q := F'(x) = F'[G(y)]$ und $R := Q^{-1}$ und beobachten, dass

$$w = (x + w) - x = G(y + z) - G(y), \quad (\text{V.23})$$

$$z = (y + z) - y = F(x + w) - F(x). \quad (\text{V.24})$$

Damit ist

$$\begin{aligned} G(y + z) - G(y) - Rz &= w - R[F(x + w) - F(x)] \\ &= -R[F(x + w) - F(x) - Qw]. \end{aligned} \quad (\text{V.25})$$

Aus der Kontraktionseigenschaft (V.13) erhalten wir außerdem, dass

$$\begin{aligned} &\left\| w - A^{-1}(F(x + w) - F(x)) \right\|_X \\ &= \left\| \{(x + w) + A^{-1}(y - F(x + w))\} - \{x + A^{-1}(y - F(x))\} \right\|_X \\ &= \|\phi_y(x + w) - \phi_y(x)\|_X \leq \frac{1}{2} \|(x + w) - x\|_X = \frac{1}{2} \|w\|_X, \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

was, mit $F(x+w) - F(x) = y + z - y = z$,

$$\frac{1}{2} \|w\|_X \geq \|w\|_X - \|A^{-1}[F(y+w) - F(x)]\|_X = \|w\|_X - \|A^{-1}z\|_X \quad (\text{V.27})$$

und somit

$$\|w\|_X \leq 2 \|A^{-1}z\|_X \leq 2 \|A^{-1}\|_{\text{op}} \cdot \|z\|_X \quad (\text{V.28})$$

impliziert. Insbesondere konvergiert $w \rightarrow 0$, falls $z \rightarrow 0$, und G ist stetig in y . Außerdem folgt durch Einsetzen in (V.25), dass

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|G(y+z) - G(y) - Rz\|_X}{\|z\|_X} \right\} \leq \frac{\|R\|_{\text{op}}}{2\|A^{-1}\|_{\text{op}}} \lim_{w \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|F(x+w) - F(x) - Qw\|_X}{\|w\|_X} \right\} = 0, \quad (\text{V.29})$$

also ist G differenzierbar bei $y \in \tilde{V}$ und $G'(y) = R$.

Zu (iii): Für $y \in \tilde{V}$ definieren wir $R(y) := (F'[G(y)])^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ und beobachten, dass

$$\begin{aligned} \|R(y+z) - R(y)\|_{\text{op}} &= \left\| R(y+z) \underbrace{F'[G(y)] R(y)}_{=1} - \underbrace{R(y+z) F'[G(y+z)]}_{=1} R(y) \right\|_{\text{op}} \\ &= \left\| R(y+z) \{F'[G(y+z)] - F'[G(y)]\} R(y) \right\|_{\text{op}} \\ &\leq 4\|A^{-1}\|_{\text{op}}^2 \|F'[G(y+z)] - F'[G(y)]\|, \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

unter Ausnutzung von (V.20). Da $F' : U \rightarrow \mathcal{B}(X)$ stetig in $G(y) \in U$ und G stetig in y sind, ist auch $F' \circ G$ stetig in y , und wir erhalten

$$\lim_{z \rightarrow 0} \|R(y+z) - R(y)\|_{\text{op}} \leq 4\|A^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)}^2 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \|F'[G(y+z)] - F'[G(y)]\| = 0. \quad (\text{V.31})$$

Also ist $R = (F^{-1})'$ stetig in $y \in \tilde{V}$. □

Bemerkungen und Beispiele.

Gleichung (V.6) lässt sich zu $F^{-1} \in C^k(\tilde{V}; \tilde{U})$ verallgemeinern, falls $F \in C^k(U; X)$.

V.2. Lokale Auflösbarkeit

Als Nächstes werden wir Satz V.2 über die lokale Umkehrbarkeit von Funktionen benutzen, um zu zeigen, dass unter gewissen Bedingungen eine Gleichung

$$F(x, y) = 0 \quad (\text{V.32})$$

lokal nach y aufgelöst werden kann, d.h. es gibt eine Funktion h so dass

$$(F(x, y) = 0) \implies (y = h(x)). \quad (\text{V.33})$$

Zur Motivation betrachten wir erst einmal das Beispiel einer linearen Abbildung. Seien $M, N \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{M+N}; \mathbb{R}^N)$ eine $N \times (M+N)$ -Matrix. Schreiben wir $\mathbb{R}^{M+N} = \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ und bezeichnen seine Elemente mit $(x, y) \in \mathbb{R}^{M+N}$, wobei $x \in \mathbb{R}^M$ und $y \in \mathbb{R}^N$ sind, und schreiben wir weiterhin $A = (A_x, A_y)$, wobei $A_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^N)$ und $A_y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, mit

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,M} \end{array} & \begin{array}{ccc} a_{1,M+1} & \dots & a_{1,M+N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,M+1} & \dots & a_{N,M+N} \end{array} \end{array} \right), \quad (V.34)$$

$A_x \qquad \qquad \qquad A_y$

so lässt sich $A(x, y)$ schreiben als

$$A(x, y) = A_x x + A_y y. \quad (V.35)$$

Ist nun A_y invertibel, also $\det A_y \neq 0$, beobachten wir folgende Äquivalenz:

$$A(y, x) = 0 \Leftrightarrow A_x x + A_y y = 0 \Leftrightarrow y = [-A_y^{-1} \circ A_x] x. \quad (V.36)$$

Wir sehen also, dass die Gleichung $A(x, y) = 0$ *implizit* eine Funktion $h : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ definiert, nämlich $h = -A_y^{-1} \circ A_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^N)$, so dass

$$(A(x, y) = 0) \Leftrightarrow (y = h(x)). \quad (V.37)$$

Dieses lässt sich für differenzierbare Funktionen verallgemeinern, wie der folgende Satz verdeutlicht.

Satz V.3 (Satz über implizite Funktionen). Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^{M+N}$ eine offene Teilmenge, $F \in C^1(U; \mathbb{R}^N)$ und $(x_0, y_0) \in U$ so, dass $F(x_0, y_0) = 0$ und dass $A_y \in \mathfrak{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ invertibel ist, wobei

$$\forall i, j = 1, \dots, N : \quad (A_y)_{i,j} := \frac{\partial F_i(x_0, y_0)}{\partial y_j}. \quad (V.38)$$

Dann gibt es zwei offene Teilmengen $\tilde{U} \subseteq U$ und $W \subseteq \mathbb{R}^M$, mit $\tilde{U} \ni (x_0, y_0)$ und $W \ni x_0$, sowie eine Abbildung $h \in C^1(W; \mathbb{R}^N)$ so, dass

$$(i) \forall x \in W : (x, h(x)) \in \tilde{U}, \quad (V.39)$$

$$(ii) \forall (x, y) \in (W \times \mathbb{R}^N) \cap \tilde{U} : (F(x, y) = 0) \Leftrightarrow (y = h(x)). \quad (V.40)$$

$$(iii) h(x_0) = y_0, \quad (V.41)$$

$$(iv) h'(x_0) = -A_y^{-1} \circ A_x, \quad (V.42)$$

wobei $(A_x)_{i,j} = \partial F_i(x_0) / \partial x_j \in \mathfrak{M}_{N \times M}(\mathbb{R})$.

Beweis. Wir definieren $\widehat{F} \in C^1(U; \mathbb{R}^{M+N})$ durch

$$\widehat{F}(x, y) := (x, F(x, y)) \quad (\text{V.43})$$

und beobachten, dass

$$\begin{aligned} \widehat{F}' &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{F}_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_1}{\partial x_M} & \frac{\partial \widehat{F}_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_1}{\partial y_N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \widehat{F}_M}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_M}{\partial x_M} & \frac{\partial \widehat{F}_M}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_M}{\partial y_N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \widehat{F}_{M+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_{M+1}}{\partial x_M} & \frac{\partial \widehat{F}_{M+1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_{M+1}}{\partial y_N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \widehat{F}_{M+N}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_{M+N}}{\partial x_M} & \frac{\partial \widehat{F}_{M+N}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \widehat{F}_{M+N}}{\partial y_N} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & 1 & & \\ & & & & \mathbf{0} & \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_M} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial x_M} & \frac{\partial F_N}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial y_N} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{V.44})$$

Nach dem Kästchensatz für Determinanten gilt dann

$$\det[\widehat{F}'(x_0, y_0)] = \det \left[\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline A_x & A_y \end{array} \right) \right] = \det A_y \neq 0, \quad (\text{V.45})$$

da A_y invertibel ist. Somit ist auch $\widehat{F}'(x_0, y_0)$ invertibel, und nach dem Satz V.2 über die Umkehrfunktion gibt es Umgebungen

$$(x_0, y_0) \in \widetilde{U} \subseteq U, \quad (x_0, \underbrace{F(x_0, y_0)}_{=0}) \in \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{M+N}, \quad (\text{V.46})$$

so dass $\widehat{F} : \widetilde{U} \rightarrow \widetilde{V}$ invertibel ist, mit inverser Funktion $\widehat{G} := \widehat{F}^{-1} : \widetilde{V} \rightarrow \widetilde{U}$, $\widehat{G} \in C^1(\widetilde{V}; \widetilde{U})$ und $\widehat{G}'(x_0, 0) = (\widehat{F}'(x_0, y_0))^{-1}$. Nun ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_x & A_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -A_y^{-1}A_x & A_y^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -A_y^{-1}A_x & A_y^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_x & A_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.47})$$

d.h.

$$\widehat{G}'(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A_y^{-1}A_x & A_y^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{V.48})$$

Da $\widetilde{V}$ offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$B_{\mathbb{R}^{M+N}}[(x_0, 0), \delta] = \left\{ (x, f) \in \mathbb{R}^{M+N} \mid \|(x, f) - (x_0, 0)\|_{\mathbb{R}^{M+N}} < \delta \right\} \subseteq \widetilde{V}. \quad (\text{V.49})$$

Wegen

$$\|(x, 0) - (x_0, 0)\|_{\mathbb{R}^{M+N}} = \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^M} \quad (\text{V.50})$$

ist mit

$$W := B_{\mathbb{R}^M}(x_0, \delta) \quad (\text{V.51})$$

auch

$$W \times \{0\} \subseteq B_{\mathbb{R}^M}(x_0, \delta) \times \{0\} \subseteq B_{\mathbb{R}^{M+N}}[(x_0, 0), \delta] \subseteq \widetilde{V}. \quad (\text{V.52})$$

Daher definiert die Restriktion von $\widehat{G} : \widetilde{V} \rightarrow \widetilde{U}$ auf $W \times \{0\}$ eine Funktion $h : W \rightarrow \mathbb{R}^N$ durch

$$\forall x \in W : \quad (x, h(x)) := \widehat{G}(x, 0). \quad (\text{V.53})$$

Offensichtlich ist dann, für alle $x \in W$,

$$(x, h(x)) = \widehat{G}(x, 0) \in \widehat{G}(W \times \{0\}) \subseteq \widehat{G}(\widetilde{V}) = \widetilde{U}, \quad (\text{V.54})$$

und (V.39) ist bewiesen. Weiterhin ist, für $x \in W$,

$$(x, 0) = \widehat{F}[\widehat{G}(x, 0)] = \widehat{F}[x, h(x)] = (x, F[x, h(x)]), \quad (\text{V.55})$$

also $F(x, h(x)) = 0$ und

$$\forall x \in W, y \in \mathbb{R}^N : \quad (y = h(x)) \Rightarrow (F(x, y) = 0). \quad (\text{V.56})$$

Umgekehrt ist für $x \in W$ und $y \in \mathbb{R}^N$, mit $(x, y) \in \widetilde{U}$ und $F(x, y) = 0$,

$$(x, y) = \widehat{G}(\widehat{F}(x, y)) = \widehat{G}(x, F(x, y)) = \widehat{G}(x, 0) = (x, h(x)), \quad (\text{V.57})$$

also

$$\forall (x, y) \in (W \times \mathbb{R}^N) \cap \widetilde{U} : \quad \{F(x, y) = 0\} \Rightarrow \{y = h(x)\}. \quad (\text{V.58})$$

Glgen. (V.56) und (V.58) ergeben zusammen (V.40) und, falls $(x, y) = (x_0, y_0)$ gesetzt wird, auch (V.41).

Schließlich berechnen wir h' auf W ; zunächst ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{h_i(x + te_j) - h_i(x)}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\widehat{G}_{M+i}(x + te_j, 0) - \widehat{G}_{M+i}(x, 0)}{t} \right\}. \quad (\text{V.59})$$

Also ist $h \in C^1(W; \mathbb{R}^N)$ und

$$\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \widehat{G}_{M+i}(x, 0)}{\partial x_j}, \quad (\text{V.60})$$

für $i \in \mathbb{N}_1^N$ und $j \in \mathbb{N}_1^M$. Speziell für $x = x_0$ folgt dann aus (V.48), dass

$$\frac{\partial h_i(x_0)}{\partial x_j} = \frac{\partial \widehat{G}_{M+i}(x_0, 0)}{\partial x_j} = \left(\widehat{G}'(x_0, 0) \right)_{M+i, j} = (-A_y^{-1} \circ A_x)_{i, j} \quad (\text{V.61})$$

und damit auch (V.42). □

V.3. Extrema mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren

In diesem Abschnitt lernen wir eine schöne und in der Praxis sehr nützliche Anwendung des Satzes V.3 über implizite Funktionen kennen: Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren zur Berechnung von Minima (oder Maxima, wir behandeln der Einfachheit halber nur Minima) von Funktionen mehrerer Variablen mit Nebenbedingungen. Dazu betrachten wir zunächst ein motivierendes Beispiel:

Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad F(x, y) := (x - a)^2 + (y - b)^2, \quad (\text{V.62})$$

wobei $a, b > 0$. Offensichtlich ist der Graph von F ein Paraboloid um (a, b) , und (a, b) ist auch das globale und einzige lokale Minimum von F :

$$F(a, b) = 0, \quad F(x, y) \geq 0, \quad (\text{V.63})$$

denn $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - a) \\ 2(y - b) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (a, b), \quad (\text{V.64})$$

und

$$F''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit.} \quad (\text{V.65})$$

Wir stellen also fest, dass

$$F(a, b) = 0 = \min \{ F(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}. \quad (\text{V.66})$$

Wir wollen nun ein etwas modifiziertes Minimierungsproblem behandeln, bei dem F nicht über $\mathbb{R}^2$, sondern nur über einer Teilmenge $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$ minimiert werden soll. Beispielsweise könnte $\mathcal{G}$ die Gerade $y = \alpha x + \beta$ darstellen, also

$$\mathcal{G} = \{(x, \alpha x + \beta) \mid x \in \mathbb{R}\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x, y) = 0 \right\}, \quad (\text{V.67})$$

wobei die *Nebenbedingung* $G = 0$ gegeben ist durch

$$G(x, y) := \alpha x + \beta - y. \quad (\text{V.68})$$

Gesucht sind nun $F_G, x_G, y_G \in \mathbb{R}$, so dass

$$F_G := F(x_G, y_G) = \min \{ F(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{G} \}. \quad (\text{V.69})$$

(Wenn es mehrere Lösungen für x_G, y_G gibt, suchen wir natürlich alle solche Lösungen.) Das Problem (V.69) lässt sich leicht explizit lösen: Wir lösen die Nebenbedingung $G(x, y) = 0$ nach y auf und setzen das Ergebnis in F ein,

$$\begin{aligned} \min \{ F(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{G} \} &= \min \{ F(x, \alpha x + \beta) \mid x \in \mathbb{R} \} \\ &= \min \{ f_{\alpha, \beta}(x) \mid x \in \mathbb{R} \}, \end{aligned} \quad (\text{V.70})$$

wobei $f_{\alpha, \beta} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ definiert ist durch

$$\begin{aligned} f_{\alpha, \beta}(x) &= F(x, \alpha x + \beta) = (x - a)^2 + (\alpha x + \beta - b)^2 \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + \alpha^2 x^2 + 2\alpha x(\beta - b) + (\beta - b)^2 \\ &= (1 + \alpha^2)x^2 + 2[\alpha\beta - \alpha b - a]x + a^2 + (\beta - b)^2. \end{aligned} \quad (\text{V.71})$$

Dann sind

$$f'_{\alpha, \beta}(x) = 2(1 + \alpha^2)x + 2(\alpha\beta - \alpha b - a), \quad f''_{\alpha, \beta} = 2(1 + \alpha^2) > 0, \quad (\text{V.72})$$

und somit sind

$$x_G = \frac{a + \alpha b - \alpha\beta}{1 + \alpha^2}, \quad y_G = \alpha x_G + \beta = \frac{\alpha a + \alpha^2 b + \beta}{1 + \alpha^2}, \quad (\text{V.73})$$

$$\begin{aligned} F_G &= f_{\alpha, \beta}(x_G) \\ &= \frac{1}{1 + \alpha^2} \left\{ (a + \alpha b - \alpha\beta)^2 - 2(a + \alpha b - \alpha\beta)^2 + (1 + \alpha^2)(a^2 + (\beta - b)^2) \right\} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha^2} \left\{ - (a + \alpha b - \alpha\beta)^2 + (1 + \alpha^2)(a^2 + \beta^2 + b^2 - 2b\beta) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{V.74})$$

Wie wir sehen, sind die Rechnungen schon für dieses einfache Beispiel ziemlich umfangreich. Außerdem hängt alles an der expliziten, globalen Auflösbarkeit von $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \alpha x + \beta$. Im Allgemeinen sind mehrere, komplizierte Nebenbedingungen gleichzeitig zu berücksichtigen, die nicht explizit auflösbar sind. Für diesen Fall hat Lagrange eine elegante Methode entwickelt.

Definition V.4. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $M > N$, und $U \subseteq \mathbb{R}^M$ eine nichtleere offene Teilmenge. Eine Abbildung $G \in C^1(U; \mathbb{R}^N)$ heißt **Nebenbedingung** : $\Leftrightarrow$

$$V := G(U) \ni 0 \text{ und ist offen,} \quad (\text{V.75})$$

$$\forall x \in \mathcal{G} := G^{-1}(\{0\}) : \text{rk}[G'(x)] = N. \quad (\text{V.76})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Gleichung. (V.76) bedeutet, dass die Jacobimatrix G' von G bei jedem Punkt x in $\mathcal{G}$ vollen Rang N hat, $\text{rk}[G'(x)] = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ran}[G'(x)] = N$, was gleichwertig mit der Aussage ist, dass die (nicht quadratische!) $N \times M$ -Matrix $G'(x)$ für jedes $x \in \mathcal{G}$ maximal viele - nämlich N - linear unabhängige Spalten hat.
- Damit ist (V.76) gleichwertig mit

$$\forall x \in \mathcal{G} \exists 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_N \leq M : \det \left[(G'(x)_{i,j_\ell})_{i,\ell=1,\dots,N} \right] \neq 0. \quad (\text{V.77})$$

Dabei müssen die Indizes $j_1, j_2, \dots, j_N$ nicht für alle $x \in \mathcal{G}$ gleich sein.

Satz V.5. Seien $K, N \in \mathbb{N}$, $K > N$, $U \subseteq \mathbb{R}^K$ eine nichtleere offene Teilmenge und $F \in C^1(U; \mathbb{R})$. Sei $G \in C^1(U; \mathbb{R}^N)$ eine Nebenbedingung und

$$\mathcal{G} := \{x \in U \mid G(x) = 0\} \subseteq U. \quad (\text{V.78})$$

Ist nun $x_0 \in \mathcal{G}$ ein lokales Minimum der Restriktion von F auf $\mathcal{G}$, d.h.

$$\exists \delta > 0 \forall x \in B(x_0, \delta) \cap \mathcal{G} : F(x) \geq F(x_0), \quad (\text{V.79})$$

so existiert ein $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$, so dass

$$\vec{\nabla} F(x_0) + \langle \lambda \mid \vec{\nabla} G(x_0) \rangle = 0, \quad (\text{V.80})$$

d.h.

$$\forall j = 1, \dots, K : \frac{\partial F(x_0)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial G_i(x_0)}{\partial x_j} = 0. \quad (\text{V.81})$$

Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ bezeichnet man als **Lagrangesche Multiplikatoren**.

Beweis. Nach Voraussetzung (V.77) gibt es $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_N \leq K$, so dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial x_{j_1}} & \dots & \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial x_{j_N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial x_{j_1}} & \dots & \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial x_{j_N}} \end{pmatrix} \quad (\text{V.82})$$

invertibel ist. Nach geeigneter Umbenennung der Variablen $x_1, \dots, x_K$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass

$$j_1 = K - N + 1, j_2 = K - N + 2, \dots, j_N = K - N + N = K. \quad (\text{V.83})$$

Schreiben wir nun $x = (w, z)^T$, wobei

$$w = (x_1, \dots, x_{K-N})^T, \quad z = (x_{K-N+1}, \dots, x_K)^T, \quad (\text{V.84})$$

$x_0 = (w_0, z_0)$ und entsprechend auch

$$G'(x_0) = (A_w, A_z), \quad (\text{V.85})$$

mit

$$A_w := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial w_{K-N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial w_{K-N}} \end{pmatrix}, \quad A_z := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial G_1(x_0)}{\partial z_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial G_N(x_0)}{\partial z_N} \end{pmatrix}, \quad (\text{V.86})$$

so ist nach (V.82) die Matrix A_z invertibel. Nach dem Satz V.3 über die implizite Funktion ist deshalb die Gleichung $G(x) = 0$ lokal bei x_0 nach z auflösbar, d.h. es gibt eine offene Menge $W \ni w_0$ in $\mathbb{R}^{K-N}$ und eine Funktion $h \in C^1(W; \mathbb{R}^N)$ so, dass $h(w_0) = z_0$,

$$\forall (w, z) \in (W \times \mathbb{R}^N) \cap U : \quad (G(w, z) = 0) \Leftrightarrow (z = h(w)). \quad (\text{V.87})$$

Außerdem ist

$$h'(w_0) = -A_z^{-1} \circ A_w. \quad (\text{V.88})$$

Wir zeigen nun, dass w_0 ein lokales Minimum der Funktion $\tilde{F} \in C^1(W; \mathbb{R})$,

$$\tilde{F}(w) := F[w, h(w)] \quad (\text{V.89})$$

ist. Dazu wählen wir $\delta' > 0$ so klein, dass $B(w_0, 3\delta') \subseteq W$ ist und setzen

$$\mu := \max \left\{ \|h'(w)\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{K-N}; \mathbb{R}^N)} \mid w \in \overline{B(w_0, 2\delta')} \right\} < \infty, \quad (\text{V.90})$$

als Maximum einer stetigen Funktion auf einer kompakten Kugel. Für $w \in B(w_0, \delta')$ ist dann, nach dem Satz von Taylor mit $k = 0$,

$$\begin{aligned} \left\| (w, h(w)) - x_0 \right\|_{\mathbb{R}^K}^2 &= \|w - w_0\|_{\mathbb{R}^{K-N}}^2 + \|h(w) - z_0\|_{\mathbb{R}^N}^2 \\ &= \|w - w_0\|_{\mathbb{R}^{K-N}}^2 + \|h(w) - h(w_0)\|_{\mathbb{R}^N}^2 \\ &= \|w - w_0\|_{\mathbb{R}^{K-N}}^2 + \left\| \int_0^1 h'(w_0 + s(w - w_0)) [w - w_0] ds \right\|_{\mathbb{R}^N}^2 \\ &\leq (1 + \mu^2) \|w - w_0\|_{\mathbb{R}^{K-N}}^2. \end{aligned} \quad (\text{V.91})$$

Setzen wir nun $\delta'' := \frac{1}{2}(1 + \mu^2)^{-1/2} \cdot \min\{\delta, \delta'\} > 0$, so gilt

$$\forall w \in B(w_0, \delta'') : \quad \left\| (w, h(w)) - x_0 \right\|_{\mathbb{R}^K} \leq (1 + \mu^2)^{1/2} \|w - w_0\| < \delta, \quad (\text{V.92})$$

also $(w, h(w)) \in B(x_0, \delta)$. Mit (V.79) und (V.87) erhalten wir damit also, für jedes $w \in B(w_0, \delta'')$,

$$\tilde{F}(w) = F[w, h(w)] \geq F(x_0) = F[w_0, h(w_0)] = \tilde{F}(w_0), \quad (\text{V.93})$$

und $w_0 \in W$ ist ein lokales Minimum von $\tilde{F}$, wie behauptet.

Nach Satz V.3 ist damit $w_0 \in W$ ein kritischer Punkt, $\tilde{F}'(w_0) = 0$, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}_1^{K-N}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \tilde{F}(w_0)}{\partial w_k} = \frac{\partial}{\partial w_k} \left(F[w, h(w)] \right) \Big|_{w=w_0} \\ &= \frac{\partial F[w_0, h(w_0)]}{\partial w_k} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F[w_0, h(w_0)]}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial h_j(w_0)}{\partial w_k} \\ &= \frac{\partial F(x_0)}{\partial w_k} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_i} \cdot (A_z^{-1})_{i,j} (A_w)_{j,k} \\ &= \frac{\partial F(x_0)}{\partial w_k} - \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_i} (A_z^{-1})_{i,j} \right\} \frac{\partial G_j(x_0)}{\partial w_k}. \end{aligned} \quad (\text{V.94})$$

Setzen wir nun, für $j = 1, 2, \dots, N$,

$$\lambda_j := \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_i} \cdot (A_z^{-1})_{i,j} \quad (\text{V.95})$$

so folgt unmittelbar

$$\forall k = 1, 2, \dots, K - N : \quad \frac{\partial F(x_0)}{\partial w_k} - \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial G_j(x_0)}{\partial w_k} = 0. \quad (\text{V.96})$$

Multiplizieren wir (V.95) mit $(A_z)_{i,\ell} = \frac{\partial G_j(x_0)}{\partial z_\ell}$ und summieren über $j = 1, \dots, N$, so erhalten wir, für alle $\ell = 1, 2, \dots, N$,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_i} (A_z^{-1})_{i,j} - \lambda_j \right\} (A_z)_{i,\ell} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_i} \underbrace{\left\{ \sum_{j=1}^N (A_z^{-1})_{i,j} (A_z)_{j,\ell} \right\}}_{= \delta_{i,\ell}} - \sum_{j=1}^N \lambda_j (A_z)_{i,\ell} \\ &= \frac{\partial F(x_0)}{\partial z_\ell} - \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial G_j(x_0)}{\partial z_\ell}. \end{aligned} \quad (\text{V.97})$$

Fügen wir (V.96) und (V.97) mit $(w_1, \dots, w_{K-N}) = (x_1, \dots, x_{K-N})$ und $(z_1, \dots, z_N) = (x_{K-N+1}, \dots, x_K)$ zusammen, so erhalten wir (V.81),

$$\forall k = 1, \dots, K : \quad \frac{\partial F(x_0)}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial G_j(x_0)}{\partial x_k} = 0. \quad (\text{V.98})$$

□

Bemerkungen und Beispiele. Zur Illustration betrachten wir noch zwei Beispiele.

- Wie im motivierenden Beispiel ist $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ gegeben durch

$$F(x, y) := (x - a)^2 + (y - b)^2, \quad (\text{V.99})$$

allerdings wollen wir jetzt F unter der Nebenbedingung $G(x, y) = 0$ minimieren, wobei

$$G(x, y) := x^2 + y^2 - 1. \quad (\text{V.100})$$

Es sind also $K = 2$, $N = 1$ und, mit $x_0 = (x_0, y_0)$,

$$\frac{\partial F(x_0)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G(x_0)}{\partial x} = 2((x_0 - a) + \lambda x_0) = 0, \quad (\text{V.101})$$

$$\frac{\partial F(x_0)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G(x_0)}{\partial y} = 2((y_0 - b) + \lambda y_0) = 0. \quad (\text{V.102})$$

Somit ist $\lambda \neq -1$, und es gilt

$$x_0 = \frac{a}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{b}{1 + \lambda}. \quad (\text{V.103})$$

Durch Einsetzen in die Nebenbedingungen erhalten wir dann

$$\begin{aligned} 0 &= G(x_0, y_0) = \left(\frac{a}{1 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{b}{1 + \lambda}\right)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow (1 + \lambda)^2 &= a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow \lambda_{\pm} &= \pm \sqrt{a^2 + b^2} - 1. \end{aligned} \quad (\text{V.104})$$

Daher sind

$$(x_0^{\pm}, y_0^{\pm}) = \pm \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad (\text{V.105})$$

die beiden Möglichkeiten für das gesuchte Minimum. Wegen

$$\begin{aligned} F(x_0^-, y_0^-) &= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + a \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + b \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 1 \right)^2 (a^2 + b^2) > \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} - 1 \right)^2 (a^2 + b^2) \\ &= F(x_0^+, y_0^+), \end{aligned} \quad (\text{V.106})$$

ist somit

$$(x_0^+, y_0^+) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a, b) \quad (\text{V.107})$$

die Lösung des Minimierungsproblems (V.99)–(V.100).

- Als weiteres Beispiel betrachten wir abermals $K = 2$ und $N = 1$, $U := (-\pi, \pi)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, $r \in (1, 2)$ und die Funktion $G_r \in C^\infty(U; \mathbb{R})$, die für $\underline{x} = (x, y) \in U$ durch

$$G_r(x, y) = r - \cos(x) - \cos(y) \quad (\text{V.108})$$

gegeben ist und deren Nullstellenmenge

$$\mathcal{G}_r(x, y) = \{\underline{x} \in U \mid G_r(\underline{x}) = 0\} = \{(x, y) \in U \mid \cos(x) + \cos(y) = r\} \quad (\text{V.109})$$

ist.

Wir prüfen zunächst, ob G_r eine Nebenbedingung im Sinne von Definition V.4 definiert. Dazu beobachten wir, dass

$$V = G_r^{-1}(U) = \{r + c_x + c_y \mid c_x, c_y \in (-1, 1)\} = (r - 2, r + 2) \quad (\text{V.110})$$

ist. Also ist $V \subseteq \mathbb{R}$ offen und wegen $r - 2 < 0 < 3 < r + 2$ liegt auch 0 in V . Weiterhin ist

$$G'_r(x, y) = (\sin(x), \sin(y)) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad (\text{V.111})$$

und entweder ist der Rang $\text{rk}[G'_r(x, y)] = 1$ gleich eins und damit maximal oder $\text{rk}[G'_r(x, y)] = 0$. Letzteres ist gleichbedeutend mit $G'_r(x, y) = (0, 0)$, also $\sin(x) = \sin(y) = 0$. Da weiterhin $x, y \in (-\pi, \pi)$ gilt, ist $\sin(x) = \sin(y) = 0$ wiederum äquivalent zu $(x, y) = (0, 0)$. Es folgt

$$\forall \underline{x} \in U \setminus \{(0, 0)\} : \quad \text{rk}[G'_r(x, y)] = 1. \quad (\text{V.112})$$

Da jedoch $G_r(0, 0) = r - 2 < 0$ nicht verschwindet, ist $(0, 0) \notin \mathcal{G}_r$, und G_r ist somit eine zulässige Nebenbedingung gemäß Definition V.4.

Wir wollen nun die Funktion $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ auf $\mathcal{G}_r$ maximieren bzw. die Funktion $F \in C^\infty(U; \mathbb{R})$, gegeben durch

$$F(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad (\text{V.113})$$

minimieren. Sei nun $\underline{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{G}_r$ ein lokales Minimum von F auf $\mathcal{G}_r$. Nach Satz V.5 gibt es dann ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$-x_0 = \frac{\partial F(\underline{x}_0)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial G(\underline{x}_0)}{\partial x} = \lambda \sin(x_0), \quad (\text{V.114})$$

$$-y_0 = \frac{\partial F(\underline{x}_0)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial G(\underline{x}_0)}{\partial y} = \lambda \sin(y_0). \quad (\text{V.115})$$

Wäre $\lambda = 0$, so wären $x_0 = y_0 = 0$, aber $(0, 0) \notin \mathcal{G}_r$, also gilt $\lambda \neq 0$. Außerdem ist die Sinusfunktion ungerade, deshalb folgt, dass

$$\lambda < 0. \quad (\text{V.116})$$

Weiterhin beobachten wir, dass $\cos(x_0) + \cos(y_0) = r > 1$ ist. Da außerdem $\cos(\alpha) \leq 1$ gilt, müssen deshalb

$$\cos(x_0) > 0 \quad \text{und} \quad \cos(y_0) > 0 \quad (\text{V.117})$$

und somit $x_0, y_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ gelten. Außerdem sind $F(x, y) = F(|x|, |y|)$ und $G_r(x, y) = G_r(|x|, |y|)$, deshalb können wir $x_0, y_0 \geq 0$ annehmen, also

$$0 \leq x_0, y_0 < \frac{\pi}{2}. \quad (\text{V.118})$$

für alle $\sigma, \tau \in \{-1, 1\}$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

(i) $x_0 = 0$: Dann sind $\cos(y_0) = r - 1$ und $F(0, y_0) = -\frac{1}{2}y_0^2 = -\frac{1}{2}[\arccos(r - 1)]^2$.

(ii) $y_0 = 0$: Dann sind $\cos(x_0) = r - 1$ und $F(x_0, 0) = -\frac{1}{2}x_0^2 = -\frac{1}{2}[\arccos(r - 1)]^2$.

(iii) $0 < x_0, y_0 < \pi/2$: Dann sind $0 < \sin(x_0), \sin(y_0) < 1$, und wir verwenden (V.114)-(V.115) um λ zu eliminieren, nämlich

$$\frac{\sin(x_0)}{x_0} = -\frac{1}{\lambda} = \frac{\sin(y_0)}{y_0}. \quad (\text{V.119})$$

Wir definieren $f : (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^+$ durch

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x}, \quad (\text{V.120})$$

so ist mit $g : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $g(x) := \sin(x) - x \cos(x)$

$$f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2}. \quad (\text{V.121})$$

Weiterhin ist $g'(x) = x \sin(x) > 0$ auf $(0, \pi/2)$ und wegen $g(0) = 0$ somit $g > 0$ auf $(0, \pi/2)$. Es folgt, dass $f' < 0$ auf $(0, \pi/2)$ ist. Also ist f auf $(0, \pi/2)$ streng monoton fallend und insbesondere injektiv. Gemäß (V.119) gilt $f(x_0) = f(y_0)$ was $x_0 = y_0$ impliziert. Damit ist außerdem $r = \cos(x_0) + \cos(y_0) = 2 \cos(x_0)$, also

$$x_0 = y_0 = \arccos\left(\frac{1}{2}r\right) \quad (\text{V.122})$$

und

$$F(x_0, x_0) = -\left[\arccos\left(\frac{1}{2}r\right)\right]^2. \quad (\text{V.123})$$

Wir vergleichen noch die Ergebnisse der Fälle (i)-(iii): Dazu führen wir $s := r - 1 \in (0, 1)$ ein und

$$\forall s \in [0, 1] : q(s) := \sqrt{2} \arccos[\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}] - \arccos[s]. \quad (\text{V.124})$$

Wir beobachten, dass

$$\begin{aligned} q(0) &= \sqrt{2} \arccos[\tfrac{1}{2}] - \arccos[0] \geq \sqrt{2} \arccos[\tfrac{1}{\sqrt{2}}] - \arccos[0] \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} - 1 > 0. \end{aligned} \quad (\text{V.125})$$

Außerdem ist für alle $s \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} q'(s) &= (\sin[\arccos(s)])^{-1} - (\sqrt{2} \sin[\arccos(\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2})])^{-1} \\ &= (1 - s^2)^{-1/2} - (2[1 - (\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2})^2])^{-1/2} \\ &= (1 - s)^{-1/2} \left[(1 + s)^{-1/2} - (\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}s)^{-1/2} \right] > 0, \end{aligned} \quad (\text{V.126})$$

da $\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}s > 1 + s$. Es folgt, dass $q(s) > 0$ für alle $s \in (0, 1)$, was mit $s = r - 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arccos(r - 1) < \arccos(\tfrac{1}{2}r) \quad (\text{V.127})$$

impliziert. Deshalb ist

$$\begin{aligned} F[0, \arccos(r - 1)] &= F[\arccos(r - 1), 0] = -\frac{1}{2} [\arccos(r - 1)]^2 \\ &> -[\arccos(\tfrac{1}{2}r)]^2 = F[\arccos(\tfrac{1}{2}r), \arccos(\tfrac{1}{2}r)], \end{aligned} \quad (\text{V.128})$$

und die Menge $\mathcal{M}$ der Minimierer ist

$$\mathcal{M} = \left\{ (\sigma \cdot \arccos(\tfrac{1}{2}r), \tau \cdot \arccos(\tfrac{1}{2}r)) \mid \sigma, \tau \in \{-1, 1\} \right\}. \quad (\text{V.129})$$

V.4. Ergänzungen

V.4.1. Beweis von Lemma V.1

Beweis. Wir definieren drei Folgen

$$(\ell_n)_{n=1}^\infty, \quad (m_n)_{n=1}^\infty, \quad (r_n)_{n=1}^\infty, \quad (\text{links}, \underline{\text{mitte}}, \underline{\text{rechts}}) \quad (\text{V.130})$$

in S durch folgende Rekursion. Wir setzen

$$\ell_1 := x, \quad m_1 := \frac{1}{2}(x + x'), \quad r_1 := x'. \quad (\text{V.131})$$

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir dann

$$\ell_{n+1} := \ell_n, \quad m_{n+1} := \frac{1}{2}(\ell_n + m_n), \quad r_{n+1} := m_n, \quad (\text{V.132})$$

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \text{---} & \times & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \\ \ell_{n+1} = \ell_n & & m_{n+1} & & r_{n+1} = m_n & & r_n \end{array}$$

falls

$$\|F(\ell_n) - F(m_n)\|_Y \geq \|F(m_n) - F(r_n)\|_Y, \quad (\text{V.133})$$

und

$$\ell_{n+1} := m_n, \quad m_{n+1} := \frac{1}{2}(m_n + r_n), \quad r_{n+1} := r_n, \quad (\text{V.134})$$

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \times & \text{---} & \bullet \\ \ell_n & & \ell_{n+1} = m_n & & m_{n+1} & & r_{n+1} = r_n \end{array}$$

falls

$$\|F(\ell_n) - F(m_n)\|_Y < \|F(m_n) - F(r_n)\|_Y. \quad (\text{V.135})$$

Somit gelten stets:

$$\|\ell_n - m_n\|_X = \|m_n - r_n\|_X = \frac{1}{2}\|\ell_n - r_n\|_X = 2^{-n}\|x - x'\|_X \quad (\text{V.136})$$

und

$$\|F(\ell_{n+1}) - F(r_{n+1})\|_Y = \max \{ \|F(\ell_n) - F(m_n)\|_Y, \|F(m_n) - F(r_n)\|_Y \}. \quad (\text{V.137})$$

Schreiben wir weiter

$$\ell_n = (1 - \alpha_n^{(\ell)})x + \alpha_n^{(\ell)}x', \quad m_n = (1 - \alpha_n^{(m)})x + \alpha_n^{(m)}x', \quad r_n = (1 - \alpha_n^{(r)})x + \alpha_n^{(r)}x', \quad (\text{V.138})$$

für eindeutige Folgen $(\alpha_n^{(\ell)})_{n=1}^\infty$, $(\alpha_n^{(m)})_{n=1}^\infty$, $(\alpha_n^{(r)})_{n=1}^\infty$ in $[0, 1]$, so folgt, dass

$$\alpha_n^{(\ell)} \leq \alpha_{n+1}^{(\ell)} \leq \alpha_{n+1}^{(m)} \leq \alpha_{n+1}^{(r)} \leq \alpha_n^{(r)}. \quad (\text{V.139})$$

Damit sind $(\alpha_n^{(\ell)})_{n=1}^\infty$ und $(\alpha_n^{(r)})_{n=1}^\infty$ monoton und beschränkt, also konvergent. Wegen

$$0 \leq \alpha_n^{(r)} - \alpha_n^{(\ell)} = \frac{\|r_n - \ell_n\|_X}{\|x - x'\|_X} = 2^{-n} \quad (\text{V.140})$$

gilt dann sogar, dass alle drei Folgen gegen dieselbe Zahl konvergieren,

$$\alpha_* := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(\ell)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(m)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(r)}. \quad (\text{V.141})$$

Definieren wir

$$x_* := (1 - \alpha_*)x + \alpha_* x' \in S \quad (\text{V.142})$$

so folgt damit

$$x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n. \quad (\text{V.143})$$

Wir beobachten nun, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{\|F(\ell_n) - F(r_n)\|_Y}{\|\ell_n - r_n\|_X} &= \frac{\|F(\ell_n) - F(m_n) + F(m_n) - F(r_n)\|_Y}{2\|\ell_{n+1} - r_{n+1}\|_X} \\ &\leq \frac{1}{2\|\ell_{n+1} - r_{n+1}\|_X} \left\{ \|F(\ell_n) - F(m_n)\|_Y + \|F(m_n) - F(r_n)\|_Y \right\} \\ &\leq \frac{1}{\|\ell_{n+1} - r_{n+1}\|_X} \max \left\{ \|F(\ell_n) - F(m_n)\|_Y, \|F(m_n) - F(r_n)\|_Y \right\} \\ &= \frac{\|F(\ell_{n+1}) - F(r_{n+1})\|_Y}{\|\ell_{n+1} - r_{n+1}\|_X}, \end{aligned} \quad (\text{V.144})$$

wobei wir $\frac{1}{2}(a+b) \leq \max\{a, b\}$, für $a, b \geq 0$, benutzt haben. Damit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{\|F(x) - F(x')\|_Y}{\|x - x'\|_X} &= \frac{\|F(\ell_1) - F(r_1)\|_Y}{\|\ell_1 - r_1\|_X} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\|F(\ell_n) - F(r_n)\|_Y}{\|\ell_n - r_n\|_X} \right\} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\|\ell_n - r_n\|_X} \left\| \left[F(\ell_n) - F(x_*) - F'(x_*) \cdot (\ell_n - x_*) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[F(r_n) - F(x_*) - F'(x_*) \cdot (r_n - x_*) \right] + F'(x_*) \cdot (\ell_n - r_n) \right\|_Y \right\} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\|F(\ell_n) - F(x_*) - F'(x_*) \cdot (\ell_n - x_*)\|_Y}{\|\ell_n - x_*\|_X} \right\} \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\|F(r_n) - F(x_*) - F'(x_*) \cdot (r_n - x_*)\|_Y}{\|r_n - x_*\|_X} \right\} + \|F'(x_*)\|_{\mathcal{B}(X;Y)} \\ &= \|F'(x_*)\|_{\mathcal{B}(X;Y)} \leq M. \end{aligned} \quad (\text{V.145})$$

□

VI. Grundzüge der Maßtheorie

VI.1. Ringe und Figuren

Definition VI.1. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{P}(\Omega) := \{A : A \subseteq \Omega\}$ ihre Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt **Ring** $:\Leftrightarrow$

$$\emptyset \in \mathfrak{R}, \quad (\text{VI.1})$$

$$A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{R}, \quad (\text{VI.2})$$

$$A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R}. \quad (\text{VI.3})$$

Wir bemerken, dass aus (VI.2) mit $A, B \in \mathfrak{R}$ auch

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{\omega \in A \mid \omega \in B\} = \{\omega \in A \mid \omega \notin (A \setminus B)\} \\ &= A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{R}. \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

Damit folgt, dass ein Ring mit endlich vielen Mengen auch deren Vereinigung und Durchschnitt enthält,

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{R} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^n A_j, \bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathfrak{R}. \quad (\text{VI.5})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die leere Menge bildet einen Ring, $\mathfrak{R} = \{\emptyset\}$.
- Ebenso erhält man einen Ring, wenn man noch die volle Menge hinzufügt, $\mathfrak{R}' = \{\emptyset, \Omega\}$.
- Natürlich ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ selbst ein Ring.
- Für das nächste Beispiel erinnern wir an die Halbordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}^d$, die für $a, b \in \mathbb{R}^d$ gegeben ist durch

$$a \leq b :\Leftrightarrow a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_d \leq b_d. \quad (\text{VI.6})$$

Definition VI.2. Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $d \geq 1$. Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$ heißt

$$[a, b) := [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_d, b_d) \quad (\text{VI.7})$$

(nach rechts halboffener) **Quader**. Die Menge aller Quader bezeichnen wir mit $\mathfrak{Q}_d$. Die Vereinigung endlich vieler Quader sammeln wir im System der **Figuren**,

$$\mathfrak{F}_d := \{q_1 \cup \dots \cup q_N \mid q_1, q_2, \dots, q_N \in \mathfrak{Q}_d, N < \infty\}. \quad (\text{VI.8})$$

Lemma VI.3. $\mathfrak{F}_d$ ist ein Ring.

Beweis. Offensichtlich gelten (VI.1) und (VI.3) trivialerweise, und die einzig nachzuweisende Eigenschaft ist (VI.2).

Dazu zeigen wir zunächst, dass die Differenz zweier Quader eine Figur ist. Seien $a, b, a', b' \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$ und $a' \leq b'$. Wir zeigen, dass $[a, b] \setminus [a', b'] \in \mathfrak{F}_d$. Dazu ordnen wir die Koordinaten $a_\nu, b_\nu, a'_\nu, b'_\nu$ nach der Größe, d. h., für alle $\nu = 1, 2, \dots, d$, definieren wir $-\infty < x_\nu^{(1)} < \dots < x_\nu^{(k_\nu)} < \infty$, durch $\{x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(k_\nu)}\} = \{a_\nu, b_\nu, a'_\nu, b'_\nu\}$, wobei $1 \leq k_\nu \leq 4$, je nachdem, wie viele Koordinaten doppelt auftreten. Anschließend setzen wir

$$\mathcal{K} := \{1, \dots, k_1 - 1\} \times \{1, \dots, k_2 - 1\} \times \dots \times \{1, \dots, k_d - 1\} \quad (\text{VI.9})$$

und, für $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathcal{K}$,

$$q_\xi := [x_1^{(\xi_1)}, x_1^{(\xi_1+1)}] \times [x_2^{(\xi_2)}, x_2^{(\xi_2+1)}] \times \dots \times [x_d^{(\xi_d)}, x_d^{(\xi_d+1)}]. \quad (\text{VI.10})$$

Für $\xi \neq \xi'$ gilt offensichtlich $q_\xi \cap q_{\xi'} = \emptyset$. Außerdem sind

$$[a, b] = \bigcup_{\xi \in \mathcal{K}: q_\xi \cap [a, b] \neq \emptyset} q_\xi, \quad [a', b'] = \bigcup_{\xi \in \mathcal{K}: q_\xi \cap [a', b'] \neq \emptyset} q_\xi, \quad (\text{VI.11})$$

und insbesondere ist die Differenz der Quader $[a, b]$ und $[a', b']$ eine Figur,

$$[a, b] \setminus [a', b'] = \bigcup_{\xi \in \mathcal{K}: q_\xi \cap ([a, b] \setminus [a', b']) \neq \emptyset} q_\xi \in \mathfrak{F}_d. \quad (\text{VI.12})$$

Seien nun $\hat{f} \in \mathfrak{F}_d$ eine Figur und $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_M \in \mathfrak{Q}_d$ so, dass $\hat{f} = \bigcup_{i=1}^M \hat{q}_i$.

Sei weiterhin $q \in \mathfrak{Q}_d$. Nach (VI.12) und (VI.3) ist dann

$$\hat{f} \setminus q = \left(\bigcup_{i=1}^M \hat{q}_i \right) \setminus q = \bigcup_{i=1}^M (\hat{q}_i \setminus q) \in \mathfrak{F}_d, \quad (\text{VI.13})$$

d.h., die Differenz einer Figur und eines Quaders ist eine Figur. Sind nun $f \in \mathfrak{F}_d$ eine Figur und $q_1, \dots, q_N \in \mathfrak{Q}_d$ so, dass $f = \bigcup_{j=1}^N q_j$, dann ist nach (VI.13) auch

$$\hat{f} \setminus f = \hat{f} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N q_j \right) = (\dots (\hat{f} \setminus q_1) \setminus q_2) \setminus \dots \setminus q_N \in \mathfrak{F}_d. \quad (\text{VI.14})$$

□

Mit einer Partition analog zur Konstruktion der Quader q_ξ in (VI.10) kann man zeigen, dass sich jede Figur als endliche Vereinigung *disjunkter* Quader schreiben lässt.

Lemma VI.4.

$$\mathfrak{F}_d = \{q_1 \cup \dots \cup q_N \mid q_1, q_2, \dots, q_N \in \mathfrak{Q}_d, N < \infty, \forall i < j: q_i \cap q_j = \emptyset\}, \quad (\text{VI.15})$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Wir kommen nun zum Begriff des (Raum-)Inhalts.

Definition VI.5. Sei $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Inhalt** (auf $\mathfrak{R}$) : $\Leftrightarrow$

$$(i) \quad \mu(\emptyset) = 0.$$

(ii) Sind $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathfrak{R}$ paarweise disjunkt, so ist μ **additiv**,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i). \quad (\text{VI.16})$$

Ist $\mu(A) < \infty$, für alle $A \in \mathfrak{R}$, so bezeichnen wir den Inhalt μ als **endlich**.

Das wichtigste Beispiel für Definition VI.5 in unserem Zusammenhang ist das übliche, d -dimensionale Volumen: Für $a, b \in \mathbb{R}^d$, mit $a \leq b$, ist $[a, b] \in \mathfrak{Q}_d$ ein Quader mit Volumen

$$\mu_d([a, b]) := \prod_{\nu=1}^d (b_\nu - a_\nu). \quad (\text{VI.17})$$

Sind weiterhin $q_1, q_2, \dots, q_N \in \mathfrak{Q}_d$ paarweise disjunkte Quader, so setzen wir

$$\mu_d\left(\bigcup_{i=1}^N q_i\right) = \sum_{i=1}^N \mu_d(q_i). \quad (\text{VI.18})$$

Nach Lemma VI.4 ist jede Figur darstellbar in eine endliche Vereinigung disjunkter Quader, und insofern lässt sich jeder Figur durch (VI.18) ein Volumen zuordnen.

Lemma VI.6. μ_d ist ein Inhalt auf $\mathfrak{F}_d$.

Beweis. Definition VI.5(i) und (ii) gelten trivialerweise, falls die Wohldefiniertheit von $\mu_d : \mathfrak{F}_d \rightarrow [0, \infty]$ gesichert ist. Dazu ist zu bemerken, dass die Zerlegung einer Figur in disjunkte Quader keineswegs eindeutig ist. Sind $q_1, \dots, q_M \in \mathfrak{Q}_d$ und $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_N \in \mathfrak{Q}_d$ jeweils paarweise disjunkt, ergeben aber in der Vereinigung dieselbe Menge,

$$\bigcup_{i=1}^M q_i = \bigcup_{j=1}^N \hat{q}_j, \quad (\text{VI.19})$$

so bleibt zu zeigen, dass auch die zugeordneten Volumina gleich sind,

$$\sum_{i=1}^M \mu_d(q_i) = \mu_d\left(\bigcup_{i=1}^M q_i\right) = \mu_d\left(\bigcup_{j=1}^N \hat{q}_j\right) = \sum_{j=1}^N \mu_d(\hat{q}_j). \quad (\text{VI.20})$$

Dafür bemerken wir, dass $\tilde{q}_{ij} := q_i \cap \hat{q}_j \in \mathfrak{Q}_d$ eine Familie disjunkter Quader definiert, und dass

$$q_i = \bigcup_{j=1}^N \tilde{q}_{ij} \quad \text{und} \quad \hat{q}_j = \bigcup_{i=1}^M \tilde{q}_{ij} \quad (\text{VI.21})$$

für alle $i = 1, \dots, M$ und alle $j = 1, \dots, N$ gilt. Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \mu_d(q_i) &= \sum_{i=1}^M \mu_d\left(\bigcup_{j=1}^N \tilde{q}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \mu_d(\tilde{q}_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^N \mu_d\left(\bigcup_{i=1}^M \tilde{q}_{ij}\right) = \sum_{j=1}^N \mu_d(\hat{q}_j), \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

und μ_d ist auf den Figuren wohldefiniert. $\square$

VI.2. Prämaße

In den folgenden Betrachtungen gehen wir von endlichen Vereinigungen $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_L$ von Mengen $A_n \in \mathfrak{R}$ in einem Ring $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ zu abzählbar unendliche Vereinigungen $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ solcher Mengen über. Um dies zu beschreiben, führen wir noch etwas Notation ein:

Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{R}$.

- Dann heißt $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ **aufsteigend**, falls $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- und $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt **absteigend**, falls $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Wir schreiben $\mathbf{A}_n \nearrow \mathbf{A}$, falls $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ aufsteigend ist und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ gilt
- und $\mathbf{A}_n \searrow \mathbf{A}$, falls $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ absteigend ist und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ gilt.

Definition VI.7. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Prämaß** (auf $\mathfrak{R}$) $\Leftrightarrow$

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii) Die Abbildung μ ist **Sigma-additiv**, d. h., ist $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{R}$, so dass auch ihre Vereinigung in $\mathfrak{R}$ liegt, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad (\text{VI.23})$$

Gibt es außerdem eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $A_n \nearrow \Omega$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, so heißt das Prämaß μ **Sigma-endlich**.

Wir sehen, dass jedes Prämaß auf $\mathfrak{R}$ auch einen Inhalt auf $\mathfrak{R}$ definiert. Um Bedingungen für die Umkehrung dieser Aussage zu formulieren, führen wir noch den Begriff der $\emptyset$ -Stetigkeit ein.

Definition VI.8. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring. Ein Inhalt $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **$\emptyset$ -stetig**, falls für jede absteigende Folge $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{R}^\mathbb{N}$ mit $\mu(A_1) < \infty$ und $A_n \searrow \emptyset$ gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0. \quad (\text{VI.24})$$

Das folgende Lemma besagt, dass unter der Bedingung der $\emptyset$ -Stetigkeit endliche Inhalte auch Prämaße sind.

Lemma VI.9. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Ist μ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$, so ist μ $\emptyset$ -stetig.
- (ii) Ist der Inhalt μ endlich und $\emptyset$ -stetig, so ist μ auch ein Prämaß.

Beweis. (i): Sei $(B_n)_{n=1}^\infty$ eine absteigende Folge in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(B_1) < \infty$ und $B_n \searrow \emptyset$. Bilden wir $A_n := B_n \setminus B_{n+1}$, so ist $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{R}$, und B_1 lässt sich als disjunkte Vereinigung für alle $N \in \mathbb{N}$ wie folgt darstellen,

$$B_1 = \bigcup_{n=1}^N A_n \cup B_{N+1} = \bigcup_{n=1}^\infty A_n. \quad (\text{VI.25})$$

Weil μ ein Prämaß ist, folgt daraus, dass

$$\mu(B_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) + \mu(B_{N+1}) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n) + \mu(B_{N+1}) \quad \text{und} \quad (\text{VI.26})$$

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \mu(B_1) < \infty. \quad (\text{VI.27})$$

Insbesondere ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ konvergent, und deshalb muss

$$\mu(B_{N+1}) = \sum_{n=N+1}^\infty \mu(A_n) \rightarrow 0 \quad (\text{VI.28})$$

konvergieren, für $N \rightarrow \infty$.

(ii): Sei $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{R}$, so dass auch $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{R}$. Setzen wir $\tilde{B}_N := \bigcup_{n=1}^N A_n$ und $B_N := \bigcup_{n=N+1}^\infty A_n$, so sind $\tilde{B}_N$ und B_N disjunkt und $A = \tilde{B}_N \cup B_N$. Offensichtlich sind $\tilde{B}_N \in \mathfrak{R}$ und somit auch $B_N = A \setminus \tilde{B}_N \in \mathfrak{R}$. Da μ ein endlicher Inhalt ist, sind

$$\mu(A), \mu(B_N), \mu(\tilde{B}_N) < \infty \quad (\text{VI.29})$$

endlich, und die Disjunktheit von $\tilde{B}_N$ und B_N impliziert, dass $\mu(A) = \mu(\tilde{B}_N) + \mu(B_N)$ bzw.

$$\forall N \in \mathbb{N} : \quad \mu(B_N) = \mu(A) - \mu(\tilde{B}_N). \quad (\text{VI.30})$$

Außerdem impliziert die Disjunktheit der Mengen A_n , dass $B_N \searrow \emptyset$, für $N \rightarrow \infty$, denn zu jedem $x \in A$ gibt es genau ein $n(x) \in \mathbb{N}$, so dass $x \in A_{n(x)}$, und somit ist $x \notin B_N$, für alle $N > n(x)$. Aus der $\emptyset$ -Stetigkeit und (VI.30) folgt deshalb

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(B_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A \setminus \tilde{B}_N) \\ &= \mu(A) - \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\tilde{B}_N) = \mu(A) - \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \\ &= \mu(A) - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(A_n) = \mu(A) - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \end{aligned} \tag{VI.31}$$

was gerade die Sigma-Additivität ergibt. $\square$

In dem nun folgenden Satz verwenden wir folgende elementare Identität,

Lemma VI.10. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring, $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt und $A, B \in \mathfrak{R}$. Dann gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{VI.32}$$

Beweis. Wir beobachten, dass in

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{und} \quad B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \tag{VI.33}$$

auf den rechten Seiten jeweils zwei disjunkte Mengen vereinigt sind. Aus der Additivität des Inhalts folgt damit

$$\mu(A \cup B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B), \tag{VI.34}$$

woraus sich sofort Glg. (VI.32) ergibt. $\square$

Satz VI.11. μ_d ist ein σ -endliches Prämaß auf $\mathfrak{F}_d$.

Beweis. Da wir in Lemma VI.6 bereits gezeigt haben, dass μ_d einen (offensichtlich endlichen) Inhalt auf $\mathfrak{F}_d$ definiert, bleibt nach Lemma VI.9 nur die $\emptyset$ -Stetigkeit und die σ -Endlichkeit von μ_d zu zeigen.

Die σ -Endlichkeit ist aber trivial richtig, da mit $Q_n := [-n, n]^d \in \mathfrak{Q}_d$ eine aufsteigende Folge $(Q_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{F}_d^{\mathbb{N}}$ mit $\mu_d(Q_n) = (2n)^d < \infty$ und $Q_n \nearrow \mathbb{R}^d$ definiert wird.

Für den Beweis der $\emptyset$ -Stetigkeit von μ_d sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge in $\mathfrak{F}_d$, d.h. $A_n \supseteq A_{n+1}$. Es reicht zu zeigen, dass

$$\delta := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_d(A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu_d(A_n) > 0, \tag{VI.35}$$

die Aussage

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset \tag{VI.36}$$

impliziert, wobei wir o. B. d. A. $\delta \leq 1$ annehmen können. Wir fixieren nun $n \in \mathbb{N}$ und wählen nichtleere, disjunkte Quader $q^{(1)}, \dots, q^{(L)}$ in $\mathfrak{Q}_d$ so, dass

$$A_n = \bigcup_{\ell=1}^L q^{(\ell)}, \quad (\text{VI.37})$$

wobei $q^{(\ell)} = x^{(\ell)} + [-\varepsilon^{(\ell)}, \varepsilon^{(\ell)})$, für geeignete $x^{(\ell)} \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon^{(\ell)} \in (\mathbb{R}^+)^d$. Anschließend definieren wir etwas kleinere Quader

$$\hat{q}^{(\ell)} := x^{(\ell)} + \left(1 - \frac{\delta 2^{-n-1-\ell}}{1 + \mu_d(q^{(\ell)})}\right)^{1/d} [-\varepsilon^{(\ell)}, \varepsilon^{(\ell)}) \in \mathfrak{Q}_d \quad (\text{VI.38})$$

und setzen

$$B_n := \bigcup_{\ell=1}^L \hat{q}^{(\ell)}. \quad (\text{VI.39})$$

Wir beobachten, dass der Abschluss von B_n kompakt ist und dass

$$\overline{B_n} = \bigcup_{\ell=1}^L \overline{\hat{q}^{(\ell)}} \subseteq A_n. \quad (\text{VI.40})$$

Weiterhin beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} \mu_d(A_n) - \mu_d(B_n) &= \sum_{\ell=1}^L \left\{ \mu_d(q^{(\ell)}) - \left(1 - \frac{\delta 2^{-n-1-\ell}}{1 + \mu_d(q^{(\ell)})}\right) \mu_d(q^{(\ell)}) \right\} \\ &= \sum_{\ell=1}^L \delta 2^{-n-1-\ell} \left(\frac{\mu_d(q^{(\ell)})}{1 + \mu_d(q^{(\ell)})} \right) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^L \delta 2^{-n-1-\ell} \leq \delta 2^{-n-1}. \end{aligned} \quad (\text{VI.41})$$

Der Inhalt von $B_n \subseteq \overline{B_n} \subseteq A_n$ ist also nur geringfügig kleiner als der von A_n . Allerdings ist nun unklar, ob auch $(B_n)_{n=1}^\infty$ wie $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine monoton absteigende Folge von Figuren ist. Um dies sicherzustellen, definieren wir im nächsten Schritt eine weitere Folge $(C_N)_{N=1}^\infty \in \mathfrak{F}_d^\mathbb{N}$ von Figuren durch

$$C_N := \bigcap_{n=1}^N B_n = C_{N-1} \cap B_N \subseteq C_{N-1}. \quad (\text{VI.42})$$

Offenbar ist $(C_N)_{N=1}^\infty$ monoton absteigend und mit (VI.32) ergibt sich aus (VI.42), dass

$$\mu_d(C_N) = \mu_d(C_{N-1} \cap B_N) = \mu_d(C_{N-1}) + \mu_d(B_N) - \mu_d(C_{N-1} \cup B_N). \quad (\text{VI.43})$$

Nun ist $C_{N-1} \subseteq B_{N-1} \subseteq A_{N-1}$ und auch $B_N \subseteq A_N \subseteq A_{N-1}$, also $C_{N-1} \cup B_N \subseteq A_{N-1}$. Setzen wir dies und (VI.41) in (VI.43) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_d(C_N) &\geq \mu_d(C_{N-1}) + \mu_d(B_N) - \mu_d(A_{N-1}) \\ &\geq \mu_d(C_{N-1}) + \mu_d(A_N) - \mu_d(A_{N-1}) - \delta 2^{-N-1} \\ &= \mu_d(C_{N-1}) + \mu_d(A_N) - \mu_d(A_{N-1}) - \frac{1}{4} \delta 2^{-(N-1)}, \end{aligned} \quad (\text{VI.44})$$

woraus wir schließen, dass

$$\begin{aligned}
\mu_d(C_N) - \mu_d(A_N) &\geq \mu_d(C_{N-1}) - \mu_d(A_{N-1}) - \frac{1}{4} \delta 2^{-(N-1)} \\
&\geq \mu_d(C_{N-2}) - \mu_d(A_{N-2}) - \frac{1}{4} \delta (2^{-(N-1)} + 2^{-(N-2)}) \\
&\geq \cdots \geq \mu_d(C_1) - \mu_d(A_1) - \frac{1}{4} \delta \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n} \\
&= \mu_d(B_1) - \mu_d(A_1) - \frac{1}{4} \delta \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n} \geq -\frac{1}{4} \delta - \frac{1}{4} \delta = -\frac{1}{2} \delta,
\end{aligned} \tag{VI.45}$$

wobei wir im letzten Schritt $C_1 = B_1$ und (VI.41) mit $n = 1$ anwenden. Wegen $\mu_d(A_N) \geq \delta$ impliziert dies, dass

$$\forall N \in \mathbb{N}: \quad \mu_d(C_N) \geq \frac{\delta}{2} > 0. \tag{VI.46}$$

was wiederum zur Folge hat, dass $C_N \neq \emptyset$, für alle $N \in \mathbb{N}$.

Schließlich stellen wir fest, dass $(\overline{C_N})_{N=1}^\infty$ eine monotone Folge nichtleerer, kompakter Mengen ist, $\overline{C_N} \supseteq \overline{C_{N+1}} \neq \emptyset$, was nach Lemma I.3 impliziert, dass auch der Durchschnitt aller $\overline{C_N}$ nichtleer ist. Mit $\overline{C_n} \subseteq \overline{B_n} \subseteq A_n$ folgt also

$$\bigcap_{n=1}^\infty A_n \supseteq \bigcap_{n=1}^\infty \overline{B_n} \supseteq \bigcap_{n=1}^\infty \overline{C_n} \neq \emptyset. \tag{VI.47}$$

□

VI.3. Sigma-Algebren

Die entscheidende Einsicht, die den Grundbaustein der Maßtheorie darstellt, ist, dass der Begriff des Mengenrings (hier: die Figuren $\mathfrak{F}_1$) nicht flexibel genug ist und durch den der Sigma-Algebra ersetzt werden muss.

Definition VI.12. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{P}(\Omega) := \{A : A \subseteq \Omega\}$ ihre Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt **Sigma-Algebra** (über Ω) $\Leftrightarrow$

$$\Omega \in \mathfrak{A}, \tag{VI.48}$$

$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}, \tag{VI.49}$$

$$(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{A}. \tag{VI.50}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ die kleinstmögliche bzw. die größtmögliche Sigma-Algebra über Ω sind. Der Ausgangspunkt der Maßtheorie ist jedoch die Erkenntnis, dass für $\Omega = \mathbb{R}^d$ der Ring der Figuren $\mathfrak{F}_d$ zu klein und die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ zu groß sind.

- Weiterhin bemerken wir, dass jede Sigma-Algebra $\mathfrak{A}$ auch ein Ring ist. Denn mit $\Omega \in \mathfrak{A}$ ist auch $\emptyset = \Omega^c \in \mathfrak{A}$; für $A, B \in \mathfrak{A}$ setzen wir $A_1 := A$, $A_2 := B$ und $A_n := \emptyset$, für alle $n \geq 2$. Dann ist $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, und deshalb ist auch $A \cup B = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{A}$. Schließlich sind mit $A, B \in \mathfrak{A}$ auch $A^c, B^c \in \mathfrak{A}$. Dann ist auch $A^c \cup B \in \mathfrak{A}$ und somit auch

$$A \setminus B = A \cap B^c = [A^c \cup B]^c \in \mathfrak{A}. \quad (\text{VI.51})$$

Lemma VI.13. Jeder (endliche, abzählbare oder auch überabzählbare) Durchschnitt von Sigma-Algebren ist wieder eine Sigma-Algebra.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Nachprüfen der Eigenschaften (VI.48)–(VI.50). $\square$

Ist nun $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein System von Teilmengen von Ω , so setzen wir

$$\mathfrak{A}(\mathcal{E}) := \bigcap \left\{ \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega) \mid \mathfrak{A} \supseteq \mathcal{E}, \mathfrak{A} \text{ ist eine Sigma-Algebra} \right\}. \quad (\text{VI.52})$$

Dieser Durchschnitt ist nicht leer, denn $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist selbst eine Sigma-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Nach Lemma VI.13 ist $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ wieder eine Sigma-Algebra, und nach Konstruktion ist sie die kleinste Sigma-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

Definition VI.14.

- (i) Zu $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte Sigma-Algebra.
- (ii) Für $\Omega = \mathbb{R}^d$ heißt die von den Quadern $\mathfrak{Q}_d$ bzw. den Figuren $\mathfrak{F}_d$ erzeugte Sigma-Algebra die Sigma-Algebra der **Borelmengen**,

$$\mathfrak{B}_d := \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d) = \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_d). \quad (\text{VI.53})$$

Wir bemerken, dass, wenn $\widehat{\mathfrak{A}}$ bereits eine Sigma-Algebra ist, die von $\widehat{\mathfrak{A}}$ erzeugte Sigma-Algebra mit $\widehat{\mathfrak{A}}$ übereinstimmt. Insbesondere ist

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}(\mathcal{E})) = \mathfrak{A}(\mathcal{E}), \quad (\text{VI.54})$$

für jedes $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$.

Satz VI.15. Seien $\mathcal{O}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die offenen, $\mathcal{C}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die abgeschlossenen und $\mathcal{K}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die kompakten Mengen in $\mathbb{R}^d$. Die von ihnen erzeugten Sigma-Algebren stimmen alle mit den Borelmengen überein,

$$\mathfrak{B}_d = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d). \quad (\text{VI.55})$$

Beweis. In $\mathbb{R}^d$ ist eine Menge genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist; das ist die Aussage des Satzes von Heine-Borel. Also ist $\mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{C}_d$, und deshalb auch $\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d)$. Sind umgekehrt $A \in \mathcal{C}_d$ eine abgeschlossene Menge und $\bar{B}_r \in \mathcal{K}_d$ die abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^d$ um den Ursprung und mit Radius $r \in \mathbb{R}^+$, so sind auch $A_n := A \cap \bar{B}_n \in \mathcal{K}_d$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d). \quad (\text{VI.56})$$

Also ist $\mathcal{C}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d)$, und somit gilt nach (VI.54))

$$\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d)) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d). \quad (\text{VI.57})$$

Also ist $\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d)$.

Ist $A \in \mathcal{C}_d$ abgeschlossen, so ist $A^c \in \mathcal{O}_d$ offen. Weil $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$ mit A^c auch dessen Komplement A enthält, folgt also, dass $\mathcal{C}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$, was nach (VI.54) wiederum $\mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$ nach sich zieht. Dasselbe Argument liefert aber auch $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d)$, und somit erhalten wir

$$\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d). \quad (\text{VI.58})$$

Wir zeigen nun noch, dass $\mathfrak{B}_d = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$. Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a < b$, d.h. $a_1 < b_1, \dots, a_d < b_d$. Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$A_n := \left(a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2n}, b_1 \right) \times \dots \times \left(a_d + \frac{b_d - a_d}{2n}, b_d \right). \quad (\text{VI.59})$$

Dann ist $A_n \in \mathcal{O}_d$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d). \quad (\text{VI.60})$$

Also ist $\mathfrak{Q}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$, woraus abermals mit (VI.54) auch $\mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$ folgt.

Um die umgekehrte Inklusion $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d)$ zu beweisen, betrachten wir eine offene Menge $A \in \mathcal{O}_d$. Da jeder Punkt $x \in A$ ein innerer Punkt ist, gibt es ein $r(x) > 0$, so dass $B_{r(x)}(x) \subseteq A$. Wir wählen nun $\rho(x) \in \mathbb{Q}^+$ so, dass $(2d)^{-1}r(x) < \rho(x) < d^{-1}r(x)$ und dann einen Punkt $y(x) \in \mathbb{Q}^d$, mit $\|y(x) - x\| < (4d)^{-1}r(x)$. Definieren wir nun noch $\varepsilon(x) \in \mathbb{Q}^d$ durch $\varepsilon_\nu(x) := \rho(x)$, für alle $\nu = 1, \dots, d$, so beobachten wir dass $|x_\nu - y_\nu(x)| < \varepsilon_\nu(x)$ und somit dass

$$x \in [y(x) - \varepsilon(x), y(x) + \varepsilon(x)) \subseteq B_{r(x)}(x) \subseteq A \quad (\text{VI.61})$$

Insbesondere ist

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} [y(x) - \varepsilon(x), y(x) + \varepsilon(x)) \subseteq A, \quad (\text{VI.62})$$

also

$$A = \bigcup_{x \in A} [y(x) - \varepsilon(x), y(x) + \varepsilon(x)). \quad (\text{VI.63})$$

Die Vereinigung auf der rechten Seite in (VI.63) ist abzählbar, denn die Menge der Quader $[y(x) - \varepsilon(x), y(x) + \varepsilon(x)) \in \mathfrak{Q}_d$ ist mit $y(x), \varepsilon(x) \in \mathbb{Q}^d$ abzählbar. Es folgt also, dass $\mathcal{O}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d)$ und somit auch $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d) = \mathfrak{B}_d$. $\square$

VI.4. Das äußere Maß

Wir führen nun den auf Caratheodory zurückgehenden Begriff des äußeren Maßes ein.

Definition VI.16. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. Für $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ sei

$$\mathfrak{U}(Q) := \left\{ (A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{R} \mid Q \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \right\}, \quad (\text{VI.64})$$

wobei $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{R}$ eine Folge in $\mathfrak{R}$ bezeichne. Das **äußere Maß** (bezüglich μ) ist die Abbildung $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$, die durch $\mu^*(Q) := \infty$, falls $\mathfrak{U}(Q) = \emptyset$, und

$$\mu^*(Q) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \mid (A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q) \right\}, \quad (\text{VI.65})$$

falls $\mathfrak{U}(Q) \neq \emptyset$, definiert ist.

Lemma VI.17. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. Für jede Familie $\{Q_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Omega$ von Teilmengen von Ω besitzt das zugehörige äußere Maß folgende Eigenschaften:

$$\mu^* \geq 0 \quad , \quad \mu^*(\emptyset) = 0, \quad (\text{VI.66})$$

$$Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow \mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2), \quad (\text{VI.67})$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty Q_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(Q_n). \quad (\text{VI.68})$$

Ist $A \in \mathfrak{R}$, so gelten weiterhin noch

$$\forall Q \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A), \quad (\text{VI.69})$$

$$\mu^*(A) = \mu(A). \quad (\text{VI.70})$$

Beweis.

Glg. (VI.66): Die Nichtnegativität von μ^* ist offensichtlich. Mit $A_n := \emptyset$ ist $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(\emptyset)$ und deshalb $0 \leq \mu^*(\emptyset) \leq 0$.

Glg. (VI.67): Mit $Q_1 \subseteq Q_2$ ist $\mathfrak{U}(Q_1) \supseteq \mathfrak{U}(Q_2)$ und daher $\mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)$.

Glg. (VI.68): Seien $(Q_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathfrak{P}(\Omega)$ und $Q := \bigcup_{n=1}^\infty Q_n$. Sei weiterhin $\varepsilon > 0$. Wir können für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen, dass $\mathfrak{U}(Q_n) \neq \emptyset$, denn anderenfalls ist die rechte Seite in (VI.68) unendlich und (VI.68) somit gültig. Nach Definition von μ^* gibt es dann zu jedem $Q_n \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Folge $(A_{n,m})_{m=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q_n)$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mu^*(Q_n) \geq \sum_{m=1}^\infty \mu(A_{n,m}) - \varepsilon 2^{-n}. \quad (\text{VI.71})$$

Da $Q_n \subseteq \bigcup_{m=1}^\infty A_{n,m}$, ist auch $Q \subseteq \bigcup_{m,n=1}^\infty A_{n,m}$, d.h., die (abzählbare) Doppelfolge überdeckt Q also $(A_{n,m})_{m,n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q)$. Somit ist

$$\mu^*(Q) \leq \sum_{m,n=1}^\infty \mu(A_{n,m}) \leq \sum_{n=1}^\infty \{ \mu^*(Q_n) + \varepsilon 2^{-n} \} = \varepsilon + \sum_{n=1}^\infty \mu^*(Q_n). \quad (\text{VI.72})$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, impliziert dies (VI.68).

Glg. (VI.69): Seien $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ und $A \in \mathfrak{R}$. Setzen wir $Q_1 := Q \cap A$, $Q_2 := Q \setminus A$ und $Q_3 := Q_4 := \dots := \emptyset$, so folgt aus (VI.66) und (VI.68), dass

$$\mu^*(Q) \leq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A). \quad (\text{VI.73})$$

Es verbleibt also die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Dazu können wir wieder $\mathfrak{U}(Q) \neq \emptyset$ annehmen, denn anderenfalls gilt $\mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \leq \infty = \mu^*(Q)$ trivialerweise. Ist also $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q)$, dann beobachten wir zunächst, dass $\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A)$, weil μ ein Inhalt ist. Addieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \setminus A) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n). \quad (\text{VI.74})$$

Außerdem sind $(A_n \cap A)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q \cap A)$ und $(A_n \setminus A)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q \setminus A)$, daher sind

$$\mu^*(Q \cap A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \cap A) \quad \text{und} \quad \mu^*(Q \setminus A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \setminus A), \quad (\text{VI.75})$$

woraus mit (VI.74)

$$\mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \quad (\text{VI.76})$$

für alle $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q)$ folgt. Also gilt auch

$$\mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \leq \inf_{(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q)} \left\{ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \right\} = \mu^*(Q). \quad (\text{VI.77})$$

Glg. (VI.70): Mit $A_1 := A$ und $A_2 := A_3 := \dots := \emptyset$ ist $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(A)$, und deshalb ist

$$\mu^*(A) \leq \mu(A). \quad (\text{VI.78})$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, verwenden wir, dass μ auf $\mathfrak{R}$ ein Prämaß und somit $\emptyset$ -stetig ist. Wir wissen bereits, dass $\mathfrak{U}(A) \ni (A, \emptyset, \emptyset, \dots)$ nicht leer ist. Seien also $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(A)$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir setzen $B_N := A \setminus (\bigcup_{n=1}^N A_n) \in \mathfrak{R}$ und beobachten, dass $(B_N)_{N=1}^\infty \in \mathfrak{R}^\mathbb{N}$ monoton absteigend ist und dass

$$\mu(A) = \mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^N A_n\right) + \mu(B_N) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n) + \mu(B_N). \quad (\text{VI.79})$$

Mit $N \rightarrow \infty$ ergibt dies insbesondere

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) + \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(B_N). \quad (\text{VI.80})$$

Nun bemerken wir, dass $B_N \searrow \emptyset$, da $A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Weil μ $\emptyset$ -stetig ist, folgt damit, dass $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(B_N) = 0$, und wir haben

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n), \quad (\text{VI.81})$$

für alle $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(A)$, was $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ nach sich zieht. $\square$

Satz VI.18 (Caratheodory). Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring, $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$ und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ das zugehörige äußere Maß. Dann ist

$$\mathfrak{A}^* := \left\{ A \in \mathfrak{P}(\Omega) \mid \forall Q \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \right\} \quad (\text{VI.82})$$

eine Sigma-Algebra, die $\mathfrak{R}$ umfasst, also

$$\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{P}(\Omega). \quad (\text{VI.83})$$

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass $\mathfrak{A}^*$ eine Sigma-Algebra ist, denn nach (VI.69) ist $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}^*$. Weiterhin ist trivialerweise $\Omega \in \mathfrak{A}^*$, und auch die Implikation $A \in \mathfrak{A}^* \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}^*$ gilt trivial, wenn wir $Q \setminus A = Q \cap A^c$ beachten. Es ist also nur nachzuweisen, dass $\mathfrak{A}^*$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Dazu betrachten wir zunächst $A, B \in \mathfrak{A}^*$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) &= \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \\ &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \\ &\quad + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B^c) \\ &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \\ &\quad + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap [A \cup B]^c). \end{aligned} \quad (\text{VI.84})$$

Ersetzen wir in dieser Identität Q durch $Q \cap [A \cup B]$, so fällt der letzte Term heraus, und die anderen drei bleiben unverändert,

$$\begin{aligned} \mu^*(Q \cap [A \cup B]) &= \mu^*(Q \cap [A \cup B] \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap [A \cup B] \cap A^c \cap B) \\ &\quad + \mu^*(Q \cap [A \cup B] \cap A \cap B^c) \\ &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c). \end{aligned} \quad (\text{VI.85})$$

Ersetzen wir die ersten 3 Terme auf der rechten Seite von (VI.84) durch die linke Seite von (VI.85), so erhalten wir

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap [A \cup B]) + \mu^*(Q \cap [A \cup B]^c), \quad (\text{VI.86})$$

also $A \cup B \in \mathfrak{A}^*$. Sind nun $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}^*$ disjunkt, so sind $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_2^c = A_1$ und $A_1^c \cap A_2 = A_2$, und aus (VI.85) folgt dann außerdem, dass

$$\mu^*(Q \cap [A_1 \cup A_2]) = \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_2). \quad (\text{VI.87})$$

Durch Induktion übertragen sich (VI.86) und (VI.87) sofort auf endlich viele Mengen: Ist $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{A}^*$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen und

$$B_N := \bigcup_{n=1}^N A_n \quad \text{sowie} \quad A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n, \quad (\text{VI.88})$$

so folgt, dass $B_N \in \mathfrak{A}^*$ und

$$\mu^*(Q \cap B_N) = \sum_{n=1}^N \mu^*(Q \cap A_n). \quad (\text{VI.89})$$

Wegen $B_N \subseteq A$ ist $Q \setminus B_N \supseteq Q \setminus A$ und daher $\mu^*(Q \setminus B_N) \geq \mu^*(Q \setminus A)$, was mit (VI.89) und $B_N \in \mathfrak{A}^*$ zusammen

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap B_N) + \mu^*(Q \setminus B_N) \geq \sum_{n=1}^N \mu^*(Q \cap A_n) + \mu^*(Q \setminus A) \quad (\text{VI.90})$$

ergibt. Im Limes $N \rightarrow \infty$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_n) + \mu^*(Q \setminus A) \\ &\geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \geq \mu^*(Q), \end{aligned} \quad (\text{VI.91})$$

wobei wir zusätzlich (VI.68) verwenden. Also muss tatsächlich Gleichheit überall in (VI.91) gelten, und es folgt, dass $A \in \mathfrak{A}^*$. $\square$

VI.5. Maße

Definition VI.19. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Sigma-Algebra. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Maß** (auf $\mathfrak{A}$): $\Leftrightarrow$

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii) Die Abbildung μ ist σ -additiv, d. h., ist $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad (\text{VI.92})$$

Gibt es außerdem eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $A_n \nearrow \Omega$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, so heißt das Maß μ **Sigma-endlich**.

Ein Maß ist also ein Prämaß auf einer Sigma-Algebra. Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Kapitels.

Satz VI.20. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. Dann definiert die Restriktion des äußeren Maßes $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ eine Fortsetzung von μ zu einem Maß $\tilde{\mu} := \mu^*|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{R})} : \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \rightarrow [0, \infty]$, so dass also $\tilde{\mu}|_{\mathfrak{R}} = \mu$. Ist das Prämaß μ Sigma-endlich, so ist $\tilde{\mu}$ die einzige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$.

Beweis. Wie bereits in (VI.66) bemerkt, gilt $\mu^*(\emptyset) = 0$. Um zu zeigen, dass die Restriktion von μ^* auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ ein Maß definiert, brauchen wir also nur die Sigma-Additivität von μ^* auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ nachzuweisen. Dazu beobachten wir, dass $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{A}^*$, nach Satz VI.18. Die Sigma-Additivität von μ^* erhalten wir aus (VI.91) sogar auf $\mathfrak{A}^*$, indem wir $Q := A$ setzen,

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap A_n) + \mu^*(A \setminus A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \quad (\text{VI.93})$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit der Fortsetzung von μ würden wir noch die Begriffe der *Dynkin-Systeme* bzw. der *monotonen Klassen* benötigen. Aus Zeitmangel verzichten wir auf diese Konstruktion und verweisen den interessierten Leser auf die Bücher von Bauer [1] und von Lieb und Loss [2].

□

Korollar VI.21. Das auf den Figuren $\mathfrak{F}_d$ definierte Prämaß μ_d hat eine eindeutige Fortsetzung zu einem Sigma-endlichen Maß auf $\mathfrak{B}_d$, das **Lebesgue-Borel-Maß**, das wir abermals mit μ_d bezeichnen.

Definition VI.22. Sind Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Sigma-Algebra, so bezeichnet man das Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ als **Messraum** oder **messbaren Raum**, und die Mengen in $\mathfrak{A}$ heißen **messbar**. Ist weiterhin $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß, so bezeichnet man das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ als **Maßraum**.

Insbesondere ist nach Korollar VI.21 das Tripel $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \mu_d)$ ein Maßraum.

Wir bemerken noch, dass sich das sogenannte *Lebesgue-Maß* vom Lebesgue-Borel-Maß in einem wichtigen Punkt unterscheidet: Ist $A \in \mathfrak{B}_d$ eine messbare Menge mit Maß Null, $\mu_d(A) = 0$, so gilt wegen der Monotonie des äußeren Maßes auch $\mu_d^*(A') = 0$, für jede Teilmenge $A' \subseteq A$. Trotzdem muss A' nicht notwendig messbar sein, und obwohl 0 ein natürlicher Kandidat für $\mu_d(A')$ ist, wäre dann $\mu_d(A')$ nicht definiert. Diesen Nachteil kann man noch beseitigen, indem man zu den Borelmengen noch die Mengen in $\mathfrak{A}^*$ mit äußerem Maß Null hinzufügt. Genauer gesagt definieren wir die **Nullmengen** durch

$$\mathfrak{N}_d := \left\{ A \in \mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d) \mid \mu_d^*(A) = 0 \right\} \quad (\text{VI.94})$$

und anschließend die Sigma-Algebra der **Lebesgue-messbaren Mengen** durch

$$\mathfrak{L}_d := \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_d \cup \mathfrak{N}_d). \quad (\text{VI.95})$$

Da $\mathfrak{L}_d \subseteq \mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d)$, kann man sich leicht überzeugen, dass das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathfrak{B}_d$ in eindeutiger Weise zum **Lebesgue-Maß** auf $\mathfrak{L}_d$ fortgesetzt werden kann.

Schließlich stellt sich die Frage, ob $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine echte Teilmenge darstellt. Die Antwort auf diese Frage hängt von Ω , dem Ring $\mathfrak{R}$ und dem darauf definierten Inhalt μ ab. Ist etwa Ω abzählbar, und enthält $\mathfrak{R}$ die Elemente von Ω als einelementige Mengen, so ist sofort $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und somit auch $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{P}(\Omega)$. Für den Ring $\mathfrak{F}_d$ der Figuren mit Prämaß μ_d gilt jedoch

$$\mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d) \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d). \quad (\text{VI.96})$$

Die Konstruktion von Mengen in $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d)$ ist allerdings anspruchsvoll, unintuitiv und führt auf (scheinbar) paradoxe Sachverhalte. Eine interessante Diskussion dieser Mengen findet man bei Oxtoby [3].

Satz VI.23. Das Lebesgue-Maß $\mu_d : \mathcal{B}_d \rightarrow [0, \infty]$ besitzt die Eigenschaften der **äußeren Regularität** und der **inneren Regularität**, d.h. für jedes $A \in \mathcal{B}_d$ gilt

$$\mu_d(A) = \inf \{ \mu_d(U) \mid U \supseteq A, U \text{ ist offen} \} \quad (\text{VI.97})$$

$$= \sup \{ \mu_d(C) \mid C \subseteq A, C \text{ ist kompakt} \}. \quad (\text{VI.98})$$

Beweis. Wir zeigen nur (VI.97)), bemerken aber zuvor, dass $\mathbb{R}^d \supseteq A$ offen und $\emptyset \subseteq A$ abgeschlossen sind. Für $\mu_d(A) = \infty$ gilt (VI.97) trivialerweise, sei also $\mu_d(A) < \infty$. Da $\mu_d = \mu^*|_{\mathcal{L}_d}$, wobei μ^* das zum Ring $\mathfrak{F}_d$ der Figuren gehörige äußere Maß notiert, gibt es gemäß (VI.82) zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathfrak{F}_d$, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \quad \text{und} \quad \mu_d(A) \geq \left(\sum_{n=1}^\infty \mu_d(A_n) \right) - \varepsilon. \quad (\text{VI.99})$$

Jedes A_n ist aber die Vereinigung endlich vieler halboffener und paarweise disjunkter Quader. Daher gibt es Folgen $(a_k)_{k=1}^\infty, (b_k)_{k=1}^\infty$ in $\mathbb{R}^d$, mit $a_k < b_k$, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty [a_k, b_k) \quad \text{und} \quad \mu_d(A) \geq \left(\sum_{k=1}^\infty \mu_d([a_k, b_k)) \right) - \varepsilon. \quad (\text{VI.100})$$

Wählen wir nun $c_k < a_k$ so, dass

$$\mu_d((c_k, b_k)) \leq \mu_d([a_k, b_k]) + \varepsilon \cdot 2^{-k}, \quad (\text{VI.101})$$

so ist

$$U := \bigcup_{k=1}^\infty (c_k, b_k) \supseteq \bigcup_{k=1}^\infty [a_k, b_k) \supseteq A \quad (\text{VI.102})$$

offen und

$$\begin{aligned} \mu_d(A) &\geq \left(\sum_{k=1}^\infty \left\{ \mu_d((c_k, b_k)) - \varepsilon \cdot 2^{-k} \right\} \right) - \varepsilon \\ &= \left(\sum_{k=1}^\infty \mu_d((c_k, b_k)) \right) - 2\varepsilon \geq \mu_d(U) - 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{VI.103})$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus (VI.97). $\square$

VII. Integration über Maße

VII.1. Riemann-Integrabilität monotoner Funktionen

Zu Beginn dieses Kapitels beweisen wir zwei wichtige Lemmata über das Riemann-Integral monotoner Funktionen auf $\mathbb{R}^+$. Dazu rufen wir in Erinnerung, dass, für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, die Menge der Partitionen des Intervalls (a, b) gegeben ist durch

$$\mathcal{P}[a, b] := \bigcup_{N=1}^{\infty} \left\{ (x_0, x_1, x_2, \dots, x_N) \mid a =: x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N := b \right\}. \quad (\text{VII.1})$$

Für eine beschränkte Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $P = (x_n)_{n=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$ sind dann

$$\overline{\mathcal{I}}[F, P] := \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1}) \sup_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} \{F(x)\}, \quad (\text{VII.2})$$

$$\underline{\mathcal{I}}[F, P] := \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1}) \inf_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} \{F(x)\}, \quad (\text{VII.3})$$

und *Obersumme* und *Untersumme* berechnen sich aus

$$\overline{\int_a^b} F := \inf_{P \in \mathcal{P}[a, b]} \overline{\mathcal{I}}[F, P] \quad \text{und} \quad \underline{\int_a^b} F := \sup_{P \in \mathcal{P}[a, b]} \underline{\mathcal{I}}[F, P]. \quad (\text{VII.4})$$

Stimmen Ober- und Untersumme überein, so heißt die beschränkte Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $F \in \mathcal{R}[a, b]$, und die Obersumme heißt das Integral von F ,

$$\int_a^b F(x) dx := \overline{\int_a^b} F = \underline{\int_a^b} F. \quad (\text{VII.5})$$

Das uneigentliche Integral, für $a = -\infty$, $b = \infty$ oder unbeschränktes F , ist durch einen geeigneten Grenzprozess definiert.

Wir wollen hier die spezielle Situation studieren, dass $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ monoton fallend ist. Dann ist die Einschränkung von F auf $[a, b]$ beschränkt, für alle $0 < a < b < \infty$.

Lemma VII.1. Ist $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ monoton fallend, so ist F auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, für alle $0 < a < b < \infty$. Ist darüber hinaus

$$I_F := \sup_{0 < a < b < \infty} \int_a^b F(x) dx < \infty, \quad (\text{VII.6})$$

so ist F auch auf $[0, \infty)$ Riemann-integrierbar, und $\int_0^\infty F(x) dx = I_F$.

Beweis. Seien $0 < a < b < \infty$, dann ist $F : [a, b] \rightarrow [0, F(a)]$ beschränkt. Für $P = (x_n)_{n=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$ sind

$$\sup_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} \{F(x)\} = F(x_{n-1}) \quad \text{und} \quad \inf_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} \{F(x)\} = F(x_n) \quad (\text{VII.7})$$

Wählen wir speziell $x_n := a + \frac{n}{N}(b-a)$, für $n = 0, 1, \dots, N$, so folgt damit, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\int_a^b F} - \underline{\int_a^b F} \leq \overline{\mathcal{I}}[F, P] - \underline{\mathcal{I}}[F, P] \\ &= \frac{b-a}{N} \left(\sum_{n=1}^N F(x_{n-1}) - \sum_{n=1}^N F(x_n) \right) = \frac{(b-a)[F(a) - F(b)]}{N} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (\text{VII.8})$$

für $N \rightarrow \infty$. Somit ist F auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar. Da $F \geq 0$, gilt außerdem

$$\forall 0 < a' \leq a < b \leq b' : \quad \int_a^b F(x) dx \leq \int_{a'}^{b'} F(x) dx. \quad (\text{VII.9})$$

Daher ist die Folge $(I_{k,\ell})_{k,\ell=1}^\infty$, wobei

$$I_{k,\ell} := \int_{1/k}^\ell F(x) dx, \quad (\text{VII.10})$$

monoton wachsend in k und ℓ , und es gilt

$$I_F = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\ell \rightarrow \infty} I_{k,\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} I_{k,\ell}. \quad (\text{VII.11})$$

□

Das nächste Lemma zeigt, dass für monotone Funktionen nicht nur die Riemann-Integrierbarkeit leicht zu zeigen ist, sondern dass auch die Vertauschung des Integrals mit dem Grenzwert für monotone Folgen monotoner Funktionen unproblematisch ist.

Lemma VII.2. Sei $(F_k)_{k=1}^\infty$ eine monoton wachsende, punktweise konvergente Folge nichtnegativer, monoton fallender, Riemann-integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^+$, deren Integrale konvergieren, d.h. $F_k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ besitze folgende Eigenschaften:

$$\forall 0 < x < x' < \infty : F_k(x) \geq F_k(x') \geq 0, \quad (\text{VII.12})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : F_k(x) \leq F_{k+1}(x) \leq F(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) < \infty. \quad (\text{VII.13})$$

Dann gelten

- (i) Die Funktion $F := \lim_{k \rightarrow \infty} F_k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist genau dann Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}^+$, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_k(x) dx < \infty. \quad (\text{VII.14})$$

- (ii) Gilt (VII.14), so stimmen auch die Integrale überein,

$$\int_0^\infty F(x) dx = \int_0^\infty \left(\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) \right) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_k(x) dx. \quad (\text{VII.15})$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass mit F_k auch F monoton fallend ist. Sind nämlich $0 < x < x' < \infty$, so ist $F_k(x) \geq F_k(x')$, und deshalb gilt

$$F(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x') = F(x'). \quad (\text{VII.16})$$

Daher ist $F : [a, b] \rightarrow [0, F(a)]$, für $0 < a < b < \infty$, beschränkt, monoton fallend und nach Lemma VII.1 auch Riemann-integrierbar. Wählen wir wieder die Partition $P = (x_n)_{n=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$ mit $x_n := a + \frac{n}{N}(b-a)$, für $n = 0, 1, \dots, N$, so folgt, für alle $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\int_a^b F} - \underline{\int_a^b F_k} \leq \overline{\mathcal{I}}[F, P] - \underline{\mathcal{I}}[F_k, P] \\ &= \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^N \{F(x_{n-1}) - F_k(x_n)\} \\ &= \frac{b-a}{N} \left(\sum_{n=1}^N \{F(x_{n-1}) - F(x_n)\} + \sum_{n=1}^N \{F(x_n) - F_k(x_n)\} \right) \\ &\leq \frac{(b-a)[F(a) - F(b)]}{N} + (b-a) \max_{1 \leq n \leq N} \{F(x_n) - F_k(x_n)\}. \end{aligned} \quad (\text{VII.17})$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, dann wählen wir erst $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\frac{(b-a)[F(a) - F(b)]}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\text{VII.18})$$

und anschließend wählen wir $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\forall k \geq k_0 : \quad (b-a) \max_{1 \leq n \leq N} \{F(x_n) - F_k(x_n)\} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{VII.19})$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall k \geq k_0 : \quad 0 \leq \overline{\int_a^b F} - \underline{\int_a^b F_k} \leq \varepsilon. \quad (\text{VII.20})$$

Da $F_k \leq F$ auf $[a, b]$, folgt aus (VII.20) insbesondere, dass F auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist und dass

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b F_k(x) dx, \quad (\text{VII.21})$$

für alle $0 < a < b < \infty$.

Existiert nun $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_k(x) dx < \infty$, so folgt aus (VII.21), dass

$$\int_a^b F(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_k(x) dx, \quad (\text{VII.22})$$

für alle $0 < a < b < \infty$, also

$$\int_0^\infty F(x) dx = \sup_{0 < a < b < \infty} \int_a^b F(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_k(x) dx < \infty, \quad (\text{VII.23})$$

und F ist auf $\mathbb{R}^+$ Riemann-integrierbar. Ist umgekehrt F auf $\mathbb{R}^+$ Riemann-integrierbar, so folgt sofort aus $F_k \nearrow F$, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_k(x) dx \leq \int_0^\infty F(x) dx < \infty \quad (\text{VII.24})$$

und $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_k(x) dx < \infty$. Aus (VII.23)–(VII.24) ergibt sich unmittelbar die Äquivalenz (i) und die Identität (ii). $\square$

VII.2. Messbare Funktionen

Nach diesen vorbereitenden Lemmata über Riemann-Integrale monotoner Funktionen kommen wir nun zur Definition des Messbarkeitsbegriffs.

Definition VII.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ zwei Messräume. Eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt **messbar** $:\Leftrightarrow$

$$\forall A' \in \mathfrak{A}' : f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}. \quad (\text{VII.25})$$

Ist speziell $(\Omega', \mathfrak{A}') = (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}}_1)$, wobei wir vereinbaren, dass $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1 := \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1 \cup \{\{-\infty\}, \{\infty\}\})$, so heißt eine messbare Abbildung $\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ **reell-messbar**.

Wir werden in dieser Vorlesung nur *reell-messbare* Funktionen behandeln, es wird also stets $(\Omega', \mathfrak{A}') = (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}}_1)$ sein. Das folgende, wichtige Lemma besagt, dass die Menge der reell-messbaren Funktionen unter abzählbaren Supremums- und Infimumsbildung, sowie den Limes Superior und Limes Inferior abgeschlossen ist.

Lemma VII.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge reell-messbarer Funktionen. Dann sind $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k$, $\limsup_k f_k$, $\liminf_k f_k$, und, falls für alle $\omega \in \Omega$ existent, auch $\lim_k f_k$ reell-messbar.

Beweis. Wir beweisen nur exemplarisch, dass $f := \sup_k f_k$ reell-messbar ist, und dazu schreiben wir $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega | f(\omega) \in A\} =: \{f(\omega) \in A\}$ u. s. w. Für $b \in \mathbb{R}$ ist

$$f^{-1}([-\infty, b)) = \left\{ \sup_k f_k(\omega) < b \right\} = \bigcap_{k=1}^\infty \{f_k(\omega) < b\}. \quad (\text{VII.26})$$

Da f_k reell-messbar ist, ist $\{f_k(\omega) < b\} \in \mathfrak{A}$. Weil $\mathfrak{A}$ unter Differenzbildung und abzählbarer Durchschnittsbildung abgeschlossen ist, ist also auch $f^{-1}([-\infty, b)) \in \mathfrak{A}$. Somit ist auch

$$f^{-1}([a, b)) = f^{-1}([-\infty, b)) \setminus f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathfrak{A}, \quad (\text{VII.27})$$

für alle $a < b$. Ebenso ist

$$f^{-1}(\{\infty\}) = f^{-1}([0, \infty]) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}([0, n)) \in \mathfrak{A}, \quad (\text{VII.28})$$

und analog $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathfrak{A}$. Wir definieren nun

$$\mathfrak{C}_1 := \left\{ A \in \mathfrak{P}(\overline{\mathbb{R}}) \mid f^{-1}(A) \in \mathfrak{A} \right\}, \quad (\text{VII.29})$$

und erhalten also aus (VII.27) und (VII.28), dass

$$\mathfrak{Q}_1 \cup \{\{\infty\}, \{-\infty\}\} \subseteq \mathfrak{C}_1. \quad (\text{VII.30})$$

Weiterhin beobachten wir, dass $\mathfrak{C}_1$ eine Sigma-Algebra ist, weil dies auf $\mathfrak{A}$ zutrifft und das Urbild f^{-1} mit mengentheoretischen Operationen vertauscht. Da die halboffenen Intervalle $\mathfrak{Q}_1$ zusammen mit $\{\infty\}$ und $\{-\infty\}$ die Sigma-Algebra $\overline{\mathfrak{B}}_1$ erzeugen, folgt also $\overline{\mathfrak{B}}_1 \subseteq \mathfrak{C}_1$. $\square$

Die Klasse der reell-messbaren Funktionen ist genügend groß um alle erdenklichen Beispiele mit einzuschließen – auch die meisten “pathologischen” Beispiele, wie etwa die Dirichlet-Funktion. In der Tat ist die Konstruktion konkreter nicht-messbarer Funktionen genauso schwierig wie etwa die Konstruktion von Mengen in $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d)$.

Wir wollen nun das Integral für nichtnegative Funktionen eines Maßraums definieren.

Definition VII.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ eine reell-messbare Funktion. Für $\lambda > 0$ definieren wir die **Niveaumengen** von f durch

$$A(f, \lambda) := f^{-1}((\lambda, \infty]) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > \lambda\}. \quad (\text{VII.31})$$

Nach Definition VII.3 ist $A(f, \lambda) \in \mathfrak{A}$, und

$$F(f, \lambda) := \mu(A(f, \lambda)) = \mu[f^{-1}((\lambda, \infty])] \quad (\text{VII.32})$$

definiert eine Abbildung $F(f, \cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, \infty]$.

Offensichtlich ist $F(f, \lambda)$ stets eine in λ monoton fallende Funktion, denn für $\lambda < \lambda'$ ist $(\lambda, \infty] \supseteq (\lambda', \infty]$, daher auch

$$A(f, \lambda) = f^{-1}((\lambda, \infty]) \supseteq f^{-1}((\lambda', \infty]) = A(f, \lambda'), \quad (\text{VII.33})$$

und somit

$$F(f, \lambda) = \mu(A(f, \lambda)) \geq \mu(A(f, \lambda')) = F(f, \lambda'). \quad (\text{VII.34})$$

Nach Lemma VII.1 ist dann $F(f, \cdot)$ auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, falls $0 < a < b < \infty$ so gewählt sind, dass $F(f, a) < \infty$.

Definition VII.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

- (i) Eine reell-messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ heißt **(μ) -integrabel**, falls $F(f, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^+$ Riemann-integrabel ist. In diesem Fall heißt

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) := \int_0^{\infty} F(f, \lambda) d\lambda \quad (\text{VII.35})$$

Integral von f .

- (ii) Eine reell-messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt **(μ) -integrabel**, falls $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := \max\{-f, 0\}$ jeweils μ -integrabel sind. Das **Integral** von f ist dann definiert durch

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) := \int_{\Omega} f_+(\omega) d\mu(\omega) - \int_{\Omega} f_-(\omega) d\mu(\omega). \quad (\text{VII.36})$$

- (iii) Eine komplexe Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **messbar**, falls $\operatorname{Re}\{f\}$ und $\operatorname{Im}\{f\}$ jeweils reell-messbar sind. Sind darüber hinaus $\operatorname{Re}\{f\}$ und $\operatorname{Im}\{f\}$ jeweils μ -integrabel, so ist f **(μ) -integrabel**, und ihr **Integral** ist definiert durch

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) := \int_{\Omega} \operatorname{Re}\{f(\omega)\} d\mu(\omega) + i \int_{\Omega} \operatorname{Im}\{f(\omega)\} d\mu(\omega). \quad (\text{VII.37})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Sind $M \in \mathfrak{A}$ eine messbare Menge eines Maßraums $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und

$$\mathbf{1}_M(\omega) \equiv \mathbf{1}[\omega \in M] := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in M, \\ 0 & \text{falls } \omega \notin M, \end{cases} \quad (\text{VII.38})$$

so ist, für $\eta > 0$,

$$A(\mathbf{1}_M, \lambda) = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{1}_M(\omega) > \eta\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \eta > 1, \\ M, & \text{falls } 0 < \eta \leq 1. \end{cases} \quad (\text{VII.39})$$

Somit erhalten wir

$$F(\mathbf{1}_M, \lambda) = \mu(M) \cdot \mathbf{1}[0 < \eta \leq 1] \quad (\text{VII.40})$$

und

$$\int_{\Omega} \mathbf{1}_M[\omega] d\mu(\omega) = \mu(M). \quad (\text{VII.41})$$

- Insbesondere folgt aus (VII.41), mit $M := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > \lambda\}$, wobei $\lambda > 0$ und f messbar sind, dass

$$\int_{\Omega} \mathbf{1}[f(\omega) > \lambda] d\mu(\omega) = \mu(\{f(\omega) > \lambda\}) = F(f, \lambda). \quad (\text{VII.42})$$

- Zur Rechtfertigung von (VII.35) dient folgende formale “Herleitung”, die eine nützliche *Merkhilfe* (aber auch nicht mehr als das) darstellt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty F(f, \lambda) d\lambda &= \int_0^\infty \left(\int_\Omega \mathbf{1}[f(\omega) > \lambda] d\mu(\omega) \right) d\lambda \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^\infty \mathbf{1}[f(\omega) > \lambda] d\lambda \right) d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^{f(\omega)} d\lambda \right) d\mu(\omega) = \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega). \quad (\text{VII.43})
\end{aligned}$$

(Problematisch ist in (VII.43) die Vertauschung der Integrationen, d.h. die zweite Gleichung.)

VII.3. Die Konvergenzsätze

Der große Vorteil der Definition VII.6 liegt aber in der Mühelosigkeit, mit der wir mit ihrer Hilfe die *Konvergenzsätze* beweisen können. Das ist der Gegenstand der folgenden Untersuchungen. Dafür definieren wir noch zuvor den Begriff “fast überall”.

Definition VII.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Eigenschaft $\mathcal{E} : \Omega \rightarrow \{w, f\}$ (w = wahr, f = falsch) gilt μ -**fast überall** $\Leftrightarrow$

$$\mathcal{E}^{-1}(f) \in \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mu(\mathcal{E}^{-1}(f)) = 0, \quad (\text{VII.44})$$

d.h., die Menge, auf der $\mathcal{E}$ nicht gilt, hat Maß Null.

Wir kommen zum ersten Konvergenzsatz.

Satz VII.8 (Monotone Konvergenz). Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_k)_{k=1}^\infty$ eine monoton steigende Folge nichtnegativer, μ -integrierbarer Funktionen, d.h., $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, $f_k \leq f_{k+1}$, und $\int_\Omega f_k(\omega) d\mu(\omega) < \infty$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $f := \lim_k f_k = \sup_k f_k$ reell-messbar und genau dann μ -integrierbar, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega f_k(\omega) d\mu(\omega) < \infty, \quad (\text{VII.45})$$

und in diesem Fall gilt

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega f_k(\omega) d\mu(\omega). \quad (\text{VII.46})$$

Beweis. Die Reell-Messbarkeit von f haben wir bereits in Lemma VII.4 bewiesen. Sei nun $\lambda > 0$. Aus der Monotonie von $(f_k)_{k=1}^\infty$ folgt sofort, dass $\{f_k > \lambda\} \subseteq \{f_{k+1} > \lambda\} \subseteq \{f > \lambda\}$ und daher

$$\bigcup_{k=1}^\infty \{f_k > \lambda\} \subseteq \{f > \lambda\}. \quad (\text{VII.47})$$

Sei andererseits $\omega \in \{f > \lambda\}$, was gleichwertig ist mit $\sup_k f_k(\omega) > \lambda$. Dann gibt es aber ein $k_0 \equiv k_0(\omega) \in \mathbb{N}$, so dass $f_{k_0}(\omega) > \lambda$, und damit $\omega \in \{f_{k_0} > \lambda\}$. Also ist auch umgekehrt $\{f > \lambda\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k > \lambda\}$, und somit gilt

$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k > \lambda\}. \quad (\text{VII.48})$$

Definieren wir nun $B_1 := \{f_1 > \lambda\}$ und, für alle $k \geq 2$,

$$B_k := \{f_k > \lambda\} \setminus \{f_{k-1} > \lambda\}, \quad (\text{VII.49})$$

so ist $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \{f > \lambda\}$, und es gilt

$$F(f_k, \lambda) = \mu(\{f_k > \lambda\}) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^k B_j\right), \quad (\text{VII.50})$$

$$F(f, \lambda) = \mu(\{f > \lambda\}) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right). \quad (\text{VII.51})$$

Aus der Sigma-Additivität von μ folgt dann, dass

$$F_k(\lambda) := F(f_k, \lambda) = \sum_{j=1}^k \mu(B_j) \nearrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = F(f, \lambda) =: F(\lambda), \quad (\text{VII.52})$$

für $k \rightarrow \infty$. Damit ist $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monoton steigende Folge nichtnegativer, monoton fallender Funktionen auf $\mathbb{R}^+$ mit punktwisen Limes $F = \lim_k F_k$. Im Fall, dass $F < \infty$ auf $\mathbb{R}^+$, folgt nun die Behauptung direkt aus Lemma VII.2. Gibt es umgekehrt ein $\lambda_0 > 0$, so dass $F(\lambda_0) = \infty$, so sind beide Seiten der behaupteten Gleichung (VII.46)) unendlich, und die Behauptung gilt trivialerweise. $\square$

Lemma VII.9 (Lemma von Fatou). Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer, μ -integrabler Funktionen, d.h., $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ und $\int_{\Omega} f_k(\omega) d\mu(\omega) < \infty$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist darüber hinaus $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(\omega) d\mu(\omega) < \infty$, so ist $f := \liminf_k f_k$ reell-messbar, μ -integabel, und es gilt

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(\omega) d\mu(\omega) \geq \int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega). \quad (\text{VII.53})$$

Beweis. Definieren wir $\tilde{f}_k(\omega) := \inf_{j \geq k} f_j(\omega)$, so ist $(\tilde{f}_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monoton steigende Folge reell-messbarer Funktionen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_k(\omega) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(\omega) = f(\omega)$. Außerdem ist $\tilde{f}_k$ μ -integabel, da $\tilde{f}_k \leq f_k$. Nach Satz VII.8 der monotonen Konvergenz gilt deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{f}_k(\omega) d\mu(\omega) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{f}_k(\omega) d\mu(\omega) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(\omega) d\mu(\omega), \end{aligned} \quad (\text{VII.54})$$

wobei letztere Ungleichung abermals aus $\tilde{f}_k \leq f_k$ folgt. $\square$

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Sätze der Analysis, dem Satz über majorisierte Konvergenz¹.

Satz VII.10 (Majorisierte Konvergenz). Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_k)_{k=1}^\infty$ eine punktweise, μ -fast überall konvergente Folge komplexer, μ -integrabler Funktionen, die durch eine μ -integrierte Funktion $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ majorisiert wird, d.h. $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f(\omega) := \lim_k f_k(\omega) \in \mathbb{C}$, μ -fast überall, $|f_k| \leq g$, für alle $k \in \mathbb{N}$, und $\int_\Omega g(\omega) d\mu(\omega) < \infty$. Setzen wir $f(\omega) := 0$, falls $f_k(\omega)$ divergiert, so ist f μ -integrierbar, und es gilt

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega f_k(\omega) d\mu(\omega). \quad (\text{VII.55})$$

Beweis. Es reicht, die Behauptung für nichtnegative f_k zu zeigen, denn wir können stets $f_k = (\operatorname{Re} f_k)_+ - (\operatorname{Re} f_k)_- + i(\operatorname{Im} f_k)_+ - i(\operatorname{Im} f_k)_-$ zerlegen, wobei jeder der vier Terme auf der rechten Seite aus einer nichtnegativen Funktion resultiert.

Sei also f_k nichtnegativ, konvergent, $f_k \rightarrow f$, μ -fast überall, und majorisiert durch g , d. h. $0 \leq f_k \leq g$, und sei $f(\omega) := 0$, falls $f_k(\omega)$ divergiert. Wir wenden das Lemma von Fatou auf $(f_k)_{k=1}^\infty$ und $\check{f} := \liminf_k f_k$ an. Dann ist $\check{f}(\omega) = f(\omega)$, falls $f_k(\omega)$ konvergiert, und $\check{f}(\omega) \geq 0 = f(\omega)$, falls $f_k(\omega)$ divergiert. In jedem Fall ist $0 \leq f \leq \check{f}$, $\check{f}$ und f sind reell-messbar und μ -integrierbar, und es gilt

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) \leq \int_\Omega \check{f}(\omega) d\mu(\omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega f_k(\omega) d\mu(\omega). \quad (\text{VII.56})$$

Anschließend bemerken wir, dass $(g - f_k)_{k=1}^\infty$ genau wie $(f_k)_{k=1}^\infty$ die Voraussetzungen des Lemmas von Fatou erfüllt. Wir wenden letzteres mit $g - \hat{f} := \liminf_k (g - f_k) = g - \limsup_k f_k$ an, beachten die Linearität (VII.65) des Integrals (für deren Beweis wir zwar den Satz VII.8 über die monotone Konvergenz brauchen, aber nicht die hier zu beweisende majorisierte Konvergenz) und erhalten

$$\begin{aligned} \int_\Omega \hat{f}(\omega) d\mu(\omega) &= \int_\Omega g(\omega) d\mu(\omega) - \int_\Omega \{g(\omega) - \bar{f}(\omega)\} d\mu(\omega) \\ &\geq \int_\Omega g(\omega) d\mu(\omega) - \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega \{g(\omega) - f_k(\omega)\} d\mu(\omega) \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega f_k(\omega) d\mu(\omega). \end{aligned} \quad (\text{VII.57})$$

Da f_k μ -fast überall konvergiert, stimmen f und $\bar{f}$ bis auf eine Menge vom Maß Null überein, d.h. für alle $\lambda > 0$ gilt

$$\mu\left[\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > \lambda\}\right] = \mu\left[\{\omega \in \Omega \mid \bar{f}(\omega) > \lambda\}\right], \quad (\text{VII.58})$$

und nach der Definition des Integrals ist daher auch

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega \bar{f}(\omega) d\mu(\omega). \quad (\text{VII.59})$$

Somit müssen $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega f_k(\omega) d\mu(\omega)$ und $\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega f_k(\omega) d\mu(\omega)$ mit $\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega)$ übereinstimmen. Dies impliziert aber die Konvergenz von $\int_\Omega f_k(\omega) d\mu(\omega)$ gegen $\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega)$. $\square$

¹engl.: dominated convergence

VII.4. Eigenschaften des Integrals

Es gibt verschiedene Wege zur Einführung des Integrals $\int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega)$ einer reell-messbaren Funktion $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, der hier vorgestellte folgt [2]. Ein anderer Weg zum Integral führt über *Treppenfunktionen*, d.h. Funktionen, die auf Ω nur endlich viele Werte annehmen. Das folgende Lemma zeigt, dass sich in der Tat jede (nichtnegative) messbare Funktion als (monotoner) Limes von Treppenfunktionen darstellen lässt.

Lemma VII.11. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ reell-messbar. Dann gibt es eine Folge $(f_L)_{L=1}^{\infty}$ reell-messbarer Funktionen $f_L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Zu jedem $L \in \mathbb{N}$ gibt es nichtnegative Zahlen $\alpha_L^{(1)}, \alpha_L^{(2)}, \dots, \alpha_L^{(2^L)} \in \mathbb{R}_0^+$ und paarweise disjunkte Mengen $A_L^{(1)}, A_L^{(2)}, \dots, A_L^{(2^L)} \in \mathfrak{A}$, so dass

$$f_L = \alpha_L^{(1)} \mathbf{1}_{A_L^{(1)}} + \alpha_L^{(2)} \mathbf{1}_{A_L^{(2)}} + \dots + \alpha_L^{(2^L)} \mathbf{1}_{A_L^{(2^L)}}. \quad (\text{VII.60})$$

Funktionen dieser Form heißen **Treppenfunktionen**.

- (ii) Für alle $\omega \in \Omega$ gilt $f_L(\omega) \leq f_{L+1}(\omega) \nearrow f(\omega)$, im Limes $L \rightarrow \infty$.

Beweis. Für $L \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$f_L(\omega) := \left(\sum_{\ell=1}^{2^L} \left(\frac{\ell-1}{2^L} \right) \cdot \mathbf{1} \left[\frac{\ell-1}{2^L} \leq f(\omega) < \frac{\ell}{2^L} \right] \right) + 2^L \cdot \mathbf{1}[f(\omega) \geq 2^L]. \quad (\text{VII.61})$$

Dann ist f_L offensichtlich eine Treppenfunktion und es gilt $f_L \leq f$.

Seien $\omega \in \Omega$ so, dass $f(\omega) < \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \{0, 1\}$ so, dass $2^{-L-1}(2k - \tau - 1) \leq f(\omega) < 2^{-L-1}(2k - \tau)$. Dann ist $f(\omega) < 2^{-L}k$ und somit

$$f_L(\omega) \leq \frac{k-1}{2^L} \leq \frac{k - \frac{1}{2}(1 + \tau)}{2^L} = \frac{2k - \tau - 1}{2^{L+1}} = f_{L+1}(\omega). \quad (\text{VII.62})$$

Da offensichtlich $f_L(\omega) = 2^L \leq 2^{L+1} = f_{L+1}(\omega)$ gilt, falls $f(\omega) = \infty$, folgt, dass

$$f_L \leq f_{L+1}. \quad (\text{VII.63})$$

Ist $f(\omega) = \infty$, so ist $f_L(\omega) = 2^L \nearrow \infty$, für $L \rightarrow \infty$. Ist hingegen $f(\omega) < \infty$, so gilt für $L > \log_2[f(\omega)]$, dass

$$f_L(\omega) \leq f(\omega) < f_L(\omega) + 2^{-L}, \quad (\text{VII.64})$$

und somit gilt auch in diesem Fall $f_L(\omega) \nearrow f(\omega)$. $\square$

Satz VII.12. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

- (i) Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, dann ist auch $|f| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ reell-messbar. f ist genau dann μ -integrabel, wenn $|f|$ μ -integrabel ist.

(ii) Sind $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μ -integrabel und $\alpha \in \mathbb{C}$, so ist auch $f + \alpha g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μ -integrabel, und es gilt

$$\int_{\Omega} (f + \alpha g)(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) + \alpha \int_{\Omega} g(\omega) d\mu(\omega). \quad (\text{VII.65})$$

Beweis. Wir beweisen nur (ii) und auch dies nur für $\alpha = 1$ und für $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Dazu beweisen wir (ii) zunächst für zwei Treppenfunktionen

$$\tilde{f} := \sum_{i=1}^M \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad \tilde{g} := \sum_{j=1}^N \beta_j \mathbf{1}_{B_j}, \quad (\text{VII.66})$$

mit $\alpha_1, \dots, \alpha_M, \beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}_0^+$ und $A_1, \dots, A_M, B_1, \dots, B_N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A_i), \mu(B_j) < \infty$ und $A_k \cap A_\ell = B_k \cap B_\ell = \emptyset$, für $k \neq \ell$. Aus technischen Gründen definieren wir $A := \bigcup_{i=1}^M A_i$, $B := \bigcup_{j=1}^N B_j$, $A_0 := B \setminus A$, $B_0 := A \setminus B$ und $\alpha_0 := \beta_0 := 0$. Setzen wir

$$\forall i \in \mathbb{Z}_0^M, j \in \mathbb{Z}_0^N : \quad \alpha_{i,j} := \alpha_i, \quad \beta_{i,j} := \beta_j \quad (\text{VII.67})$$

und $C_{ij} := A_i \cap B_j$, so sind auch die Mengen $C_{ij} \in \mathfrak{A}$ paarweise disjunkt, und es gelten

$$\tilde{f} = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \alpha_{i,j} \mathbf{1}_{C_{ij}}, \quad \tilde{g} = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \beta_{i,j} \mathbf{1}_{C_{ij}}, \quad (\text{VII.68})$$

und

$$\tilde{f} + \tilde{g} = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) \mathbf{1}_{C_{ij}}. \quad (\text{VII.69})$$

Beachte nun, dass

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \tilde{f}(\omega) > \lambda\right\}\right) &= \mu\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \mathbf{1}_{C_{ij}}(\omega) > \lambda\right\}\right) \\ &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \mathbf{1}[\alpha_{i,j} > \lambda] \cdot \mu(C_{ij}). \end{aligned} \quad (\text{VII.70})$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{f}(\omega) d\mu &= \int_0^\infty \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \mu(C_{ij}) \mathbf{1}[\alpha_{i,j} > \lambda] d\lambda \\ &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \mu(C_{ij}) \left(\int_0^{\alpha_{i,j}} d\lambda \right) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \alpha_{i,j} \cdot \mu(C_{ij}). \end{aligned} \quad (\text{VII.71})$$

Genauso folgen

$$\int_{\Omega} \tilde{g}(\omega) d\mu(\omega) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \beta_{i,j} \mu(C_{ij}), \quad (\text{VII.72})$$

$$\int_{\Omega} (\tilde{f} + \tilde{g})(\omega) d\mu(\omega) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) \mu(C_{ij}), \quad (\text{VII.73})$$

und daher auch

$$\int_{\Omega} (\tilde{f} + \tilde{g})(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \tilde{f}(\omega) d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \tilde{g}(\omega) d\mu(\omega). \quad (\text{VII.74})$$

Sind nun $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ beliebige, μ -integrierte Funktionen, so gibt es gemäß Lemma VII.11 Folgen $(f_L)_{L=1}^{\infty}$ und $(g_L)_{L=1}^{\infty}$ von Treppenfunktionen mit $f_L \nearrow f$ und $g_L \nearrow g$, μ -fast überall. Nach dem Satz über monotone Konvergenz und mit (VII.74) folgt somit, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f + g)(\omega) d\mu(\omega) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega} (f_L + g_L)(\omega) d\mu(\omega) \right\} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega} f_L(\omega) d\mu(\omega) + \int_{\Omega} g_L(\omega) d\mu(\omega) \right\} \\ &= \int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) + \int_{\Omega} g(\omega) d\mu(\omega). \end{aligned} \quad (\text{VII.75})$$

□

Der nun folgende Satz zeigt, dass das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}$ wirklich eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals ist.

Satz VII.13. Ist $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_0^+)$ eine nichtnegative Riemann-integrierte Funktion, so gibt es eine reell-messbare und Lebesgue-integrierte Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, die μ_1 -fast überall mit f auf $\mathbb{R}$ übereinstimmt und für die gilt, dass

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{\text{Riemann-Integral}} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) d\mu_1(x)}_{\text{Lebesgue-Integral}}. \quad (\text{VII.76})$$

Beweis. Wir beweisen Satz VII.13 nur für den Fall, dass $\text{supp}(f) \subseteq (a, b)$, für geeignete $-\infty < a < b < \infty$ gilt, d.h. dass $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Partition $\hat{P}_k \in \mathcal{P}[a, b]$ von (a, b) , so dass

$$\bar{I}(f, \hat{P}_k) - \underline{I}(f, \hat{P}_k) \leq \frac{1}{k}. \quad (\text{VII.77})$$

Setzen wir $P_k := \hat{P}_1 \cup \hat{P}_2 \cup \dots \cup \hat{P}_k$, so gilt

$$\bar{I}(f, P_k) - \underline{I}(f, P_k) \leq \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad P_k \subseteq P_{k+1}, \quad (\text{VII.78})$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$. Wir schreiben nun $P_k =: \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_L < x_{L+1} = b\}$ und bilden nun zwei Funktionenfolgen auf $[a, b]$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k &:= \sum_{\ell=1}^L \alpha_{\ell} \mathbf{1}_{Q_{\ell}}, & \bar{f}_k &:= \sum_{\ell=1}^L \beta_{\ell} \mathbf{1}_{Q_{\ell}}, \\ \alpha_{\ell} &:= \min_{x_{\ell-1} \leq x \leq x_{\ell}} \{f(x)\}, & \beta_{\ell} &:= \max_{x_{\ell-1} \leq x \leq x_{\ell}} \{f(x)\}, & Q_{\ell} &:= [x_{\ell-1}, x_{\ell}]. \end{aligned} \quad (\text{VII.79})$$

Offensichtlich sind $\tilde{f}_k$ und $\bar{f}_k$ Treppenfunktionen, für die nach (VII.71) Lebesgue-Integral und Riemann-Integral übereinstimmen; genauer gelten sogar

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_k(x) d\mu_1(x) = \sum_{\ell=1}^L \alpha_{\ell} \mu_1(Q_{\ell}) = \sum_{\ell=1}^L \alpha_{\ell} (x_{\ell} - x_{\ell-1}) = \underline{I}(f, P_k), \quad (\text{VII.80})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{f}_k(x) d\mu_1(x) = \sum_{\ell=1}^L \beta_{\ell} \mu_1(Q_{\ell}) = \sum_{\ell=1}^L \beta_{\ell} (x_{\ell} - x_{\ell-1}) = \bar{I}(f, P_k). \quad (\text{VII.81})$$

Weiterhin sind

$$\tilde{f}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{f}_k(x) = \sup_k \underline{f}_k(x) \leq f(x), \quad (\text{VII.82})$$

$$\bar{f}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{f}_k(x) = \inf_k \bar{f}_k(x) \geq f(x), \quad (\text{VII.83})$$

für alle $x \in [a, b]$. Nach Lemma VII.4 sind $\tilde{f}$ und $\bar{f}$ auf $\mathbb{R}$ reell-messbar, und der Satz über monotone Konvergenz sowie (VII.77) und (VII.80) implizieren, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) d\mu_1(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_k(x) d\mu_1(x) \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{I}(f, P_k) = \int_a^b f(x) dx, \quad (\text{VII.84})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) d\mu_1(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \bar{f}_k(x) d\mu_1(x) \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{I}(f, P_k) = \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{VII.85})$$

Insbesondere ist

$$\int_{\mathbb{R}} \{\bar{f}(x) - \tilde{f}(x)\} d\mu_1(x) = 0, \quad (\text{VII.86})$$

was wegen $\bar{f} - \tilde{f} \geq 0$ auch $\bar{f} = \tilde{f}$ fast überall nach sich zieht. Da $\tilde{f} \leq f \leq \bar{f}$, gilt somit auch $f = \tilde{f}$ fast überall. $\square$

VIII. Produktmaße und der Satz von Fubini

VIII.1. Produkt-Sigma-Algebren

Definition VIII.1. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ zwei Messräume.

(i) $(\Omega_1 \times \Omega_2)$ -**Quader** sind die Elemente des Mengensystems

$$\mathfrak{Q}_{1,2} := \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2\} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2), \quad (\text{VIII.1})$$

(ii) Die von den $\Omega_1 \times \Omega_2$ -Quadern erzeugte Sigma-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ heißt **Produkt-Sigma-Algebra**,

$$\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 := \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_{1,2}). \quad (\text{VIII.2})$$

(iii) Für $x_1 \in \Omega_1$ und $x_2 \in \Omega_2$ sind die **kanonischen Projektionen**

$$P_1^{x_2} : \mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2) \rightarrow \mathfrak{P}(\Omega_1), \quad (\text{VIII.3})$$

$$P_2^{x_1} : \mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2) \rightarrow \mathfrak{P}(\Omega_2), \quad (\text{VIII.4})$$

durch

$$P_1^{x_2}(A) := \{x \in \Omega_1 \mid (x, x_2) \in A\}, \quad (\text{VIII.5})$$

$$P_2^{x_1}(A) := \{y \in \Omega_2 \mid (x_1, y) \in A\} \quad (\text{VIII.6})$$

definiert.

Wir bemerken, dass die Abbildungen $P_1^{x_2}$ und $P_2^{x_1}$ wegen $P_1^{x_2}(A_1 \times \Omega_2) = A_1$ und $P_2^{x_1}(\Omega_1 \times A_2) = A_2$ surjektiv sind. Das nächste Lemma zeigt, dass die Einschränkungen von $P_1^{x_2}$ und $P_2^{x_1}$ auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ auf $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ abbilden (und natürlich wieder Surjektionen sind).

Lemma VIII.2. Sind $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ zwei Messräume und $x_1 \in \Omega_1$, $x_2 \in \Omega_2$, so gilt

$$P_1^{x_2} : \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_1, \quad (\text{VIII.7})$$

$$P_2^{x_1} : \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_2. \quad (\text{VIII.8})$$

Beweis. Wir zeigen nur (VIII.7), fixieren dazu $x_2 \in \Omega_2$, bezeichnen $P = P_1^{x_2}$ und betrachten das Urbild

$$P^{-1}(\mathfrak{A}_1) := \{A \subseteq \Omega_1 \otimes \Omega_2 \mid P(A) \in \mathfrak{A}_1\}. \quad (\text{VIII.9})$$

Dann ist $P^{-1}(\mathfrak{A}_1)$ eine Sigma-Algebra, denn

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = P^{-1}(\Omega_1) \in P^{-1}(\mathfrak{A}_1), \quad (\text{VIII.10})$$

$$P^{-1}(A^c) = [P^{-1}(A)]^c, \quad (\text{VIII.11})$$

$$P^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P^{-1}(A_n). \quad (\text{VIII.12})$$

(Tatsächlich ist das Urbild einer Sigma-Algebra unter jeder Abbildung stets selbst eine Sigma-Algebra, also auch $P^{-1}(\mathfrak{A}_1)$.) Außerdem ist, mit $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$,

$$P(A_1 \times A_2) = \begin{cases} A_1, & \text{falls } y \in A_2, \\ \emptyset, & \text{falls } y \notin A_2 \end{cases} \in \mathfrak{A}_1. \quad (\text{VIII.13})$$

Daher ist $\mathfrak{Q}_{1,2} \subseteq P^{-1}(\mathfrak{A}_1)$, und somit gilt

$$\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}[\mathfrak{Q}_{1,2}] \subseteq \mathfrak{A}[P^{-1}(\mathfrak{A}_1)] = P^{-1}(\mathfrak{A}_1). \quad (\text{VIII.14})$$

□

Korollar VIII.3. Sind $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ zwei Messräume, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$ bezüglich $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ reell-messbar und $x_1 \in \Omega_1$, $x_2 \in \Omega_2$, so sind auch

$$f_1^{x_2} : \Omega_1 \rightarrow [0, \infty] \quad , \quad \omega_1 \mapsto f(\omega_1, x_2), \quad (\text{VIII.15})$$

$$f_2^{x_1} : \Omega_2 \rightarrow [0, \infty] \quad , \quad \omega_2 \mapsto f(x_1, \omega_2), \quad (\text{VIII.16})$$

bezüglich $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ reell-messbar.

Beweis. Wir zeigen nur (VIII.15) und fixieren dazu $x_2 =: y \in \Omega_2$ und $B \in \mathcal{B}_1$ mit $B \subseteq [0, \infty]$. Dann ist das Urbild von B unter der Abbildung f_1^y gegeben durch

$$\begin{aligned} (f_1^y)^{-1}[B] &= \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid f(\omega_1, y) \in B\} \\ &= \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid (\omega_1, y) \in f^{-1}[B]\} = P_1^y(f^{-1}[B]). \end{aligned} \quad (\text{VIII.17})$$

Mit $B \in \mathcal{B}_1$ und der Messbarkeit von f sind $f^{-1}[B] \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und nach Lemma VIII.2 auch $(f_1^y)^{-1}[B] = P_1^y(f^{-1}[B]) \in \mathfrak{A}_1$. □

VIII.2. Das Produkt zweier Maße

Satz VIII.4. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ zwei Sigma-endliche Maßräume. Für $A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ seien

$$m_1(\omega_1) := \mu_2[P_2^{\omega_1}(A)] \quad \text{und} \quad m_2(\omega_2) := \mu_1[P_1^{\omega_2}(A)]. \quad (\text{VIII.18})$$

(i) Dann sind $m_1 : \Omega_1 \rightarrow [0, \infty]$ und $m_2 : \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$ reell-messbar, und es gilt

$$\int_{\Omega_1} m_1(\omega_1) d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} m_2(\omega_2) d\mu_2(\omega_2). \quad (\text{VIII.19})$$

(ii) $\mu_1 \otimes \mu_2 : \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \rightarrow [0, \infty]$, definiert durch

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)[A] := \int_{\Omega_1} m_1(\omega_1) d\mu_1(\omega_1), \quad (\text{VIII.20})$$

ist ein Sigma-endliches Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$.

Beweis. Nach Lemma VIII.2 sind m_1 und m_2 reell-messbar.

(a) Wir zeigen, dass durch (VIII.20) ein Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ definiert wird. Offensichtlich ist $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\emptyset) = 0$. Sei nun $(A^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Dann ist $(P_2^{\omega_1}(A^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}_2$, für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$. Wir setzen nun

$$m_1^{(n)}(\omega_1) := \mu_2[P_2^{\omega_1}(A^{(n)})], \quad (\text{VIII.21})$$

$$M_1(\omega_1) := \mu_2[P_2^{\omega_1}(A)], \quad \text{wobei } A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A^{(n)}. \quad (\text{VIII.22})$$

Weil μ_2 Sigma-additiv ist, gilt

$$\begin{aligned} M_1(\omega_1) &= \mu_2\left[P_2^{\omega_1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^{(n)}\right)\right] = \mu_2\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} P_2^{\omega_1}(A^{(n)})\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2[P_2^{\omega_1}(A^{(n)})] = \sum_{n=1}^{\infty} m_1^{(n)}(\omega_1), \end{aligned} \quad (\text{VIII.23})$$

und monotone Konvergenz impliziert

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)[A] = \int_{\Omega_1} M_1(\omega_1) d\mu_1(\omega_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_1} m_1^{(n)}(\omega_1) d\mu_1(\omega_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_1 \otimes \mu_2)[A^{(n)}]. \quad (\text{VIII.24})$$

Also ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ auch Sigma-additiv und somit ein Maß.

(b) Wir bemerken, dass für $A_1 \in \mathfrak{A}_1$, $A_2 \in \mathfrak{A}_2$

$$\mu_2[P_2^{\omega_1}(A_1 \times A_2)] = \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1) \cdot \mu_2[A_2], \quad (\text{VIII.25})$$

gemäß (VIII.13). Also ist

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \left(\int_{\Omega_1} \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) \cdot \mu_2[A_2] = \mu_1[A_1] \cdot \mu_2[A_2]. \quad (\text{VIII.26})$$

(c) Wir zeigen, dass $\mu_1 \otimes \mu_2$ Sigma-endlich ist. Weil μ_i Sigma-endlich ist, für $i = 1, 2$, gibt es Folgen $(A_i^{(k)})_{k=1}^\infty \in (\mathfrak{A}_i)^\mathbb{N}$, mit $\mu_i(A_i^{(k)}) < \infty$ und $A_i^{(k)} \subseteq A_i^{(k+1)}$, für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass $\Omega_i = \bigcup_{k=1}^\infty A_i^{(k)}$.

Also ist $(A_1^{(k)} \times A_2^{(k)})_{k=1}^\infty \in (\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)^\mathbb{N}$ mit $(\mu_1 \otimes \mu_2)[A_1^{(k)} \times A_2^{(k)}] = \mu_1[A_1^{(k)}] \cdot \mu_2[A_2^{(k)}] < \infty$ und $A_1^{(k)} \times A_2^{(k)} \subseteq A_1^{(k+1)} \times A_2^{(k+1)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass $\Omega_1 \times \Omega_2 = \bigcup_{k=1}^\infty A_1^{(k)} \times A_2^{(k)}$.

(d) Genau wie in (a), (b) und (c) zeigt man, dass

$$(\widetilde{\mu_1 \otimes \mu_2})[A] := \int_{\Omega_2} m_2(\omega_2) d\mu_2(\omega_2), \quad \text{mit} \quad m_2(\omega_2) := \mu_1[P_1^{\omega_2}(A)], \quad (\text{VIII.27})$$

ein Sigma-endliches Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ definiert und dass

$$(\widetilde{\mu_1 \otimes \mu_2})[A_1 \times A_2] = \mu_1[A_1] \cdot \mu_2[A_2] \quad (\text{VIII.28})$$

für $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ gilt.

(e) Sei

$$\mathcal{F}_{1,2} := \left\{ q_1 \cup \dots \cup q_N \mid q_j \in \mathfrak{Q}_{1,2}, \forall i < j : q_i \cap q_j = \emptyset \right\} \quad (\text{VIII.29})$$

das System aller endlichen Vereinigungen von paarweise disjunkten $(\Omega_1 \times \Omega_2)$ -Quadern. Dann ist $\mathcal{F}_{1,2}$ ein Ring - analog zum Ring der Figuren $\mathcal{F}_d$ (endliche Vereinigungen halboffener Quader).

Weil $\mu_1 \otimes \mu_2$ und $\widetilde{\mu_1 \otimes \mu_2}$ Sigma-additiv - und somit insbesondere endlich additiv - sind, gilt für $A = \bigcup_{j=1}^N A_1^{(j)} \times A_2^{(j)} \in \mathcal{F}_{1,2}$, mit $A_1^{(j)} \times A_2^{(j)} \in \mathfrak{Q}_{1,2}$ paarweise disjunkt, dass

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)[A] = \sum_{j=1}^N \mu_1[A_1^{(j)}] \mu_2[A_2^{(j)}] = (\widetilde{\mu_1 \otimes \mu_2})[A]. \quad (\text{VIII.30})$$

Also sind $\mu_1 \otimes \mu_2$ und $\widetilde{\mu_1 \otimes \mu_2}$ zwei Sigma-endliche Maße auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}(\mathcal{F}_{1,2})$, die auf dem Ring $\mathcal{F}_{1,2}$ übereinstimmen. Nach Satz VI.20 gilt deshalb

$$\mu_1 \otimes \mu_2 = \widetilde{\mu_1 \otimes \mu_2}. \quad (\text{VIII.31})$$

□

Satz VIII.5. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ zwei Sigma-endliche Maßräume und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$ eine reell-messbare Funktion bzgl. $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)[\omega_1, \omega_2] &< \infty \\ \iff \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1) &< \infty \\ \iff \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2) &< \infty, \end{aligned} \quad (\text{VIII.32})$$

und in diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(\omega_1, \omega_2) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2). \end{aligned} \quad (\text{VIII.33})$$

Beweis. Wir verwenden die Notationen von Korollar VIII.3 und Satz VIII.4. Sei $A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Dann ist für festes $y \in \Omega_2$ die Abbildung $(\mathbf{1}_A)_1^y : \omega_1 \mapsto \mathbf{1}_A[\omega_1, y]$ reell-messbar. Weiterhin ist

$$\{\omega_1 \in \Omega_1 \mid \mathbf{1}_A[\omega_1, y] > \lambda\} = \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid (\omega_1, y) \in A\} = P_1^y(A), \quad (\text{VIII.34})$$

für $0 < \lambda < 1$, und für $\lambda \geq 1$ ist die linke Seite von (VIII.34) leer. Damit ist auch

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mathbf{1}_A[\omega_1, y] d\mu_1(\omega_1) &= \int_0^1 \mu_1[\{\omega_1 \in \Omega_1 \mid \mathbf{1}_A[\omega_1, y] > \lambda\}] d\lambda \\ &= \mu_1[P_1^y(A)] = m_2(y). \end{aligned} \quad (\text{VIII.35})$$

Also ist

$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} \mathbf{1}_A[\omega_1, \omega_2] d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2) = \int_{\Omega_1} m_2(\omega_1) d\mu_2(\omega_2) = (\mu_1 \otimes \mu_2)[A]. \quad (\text{VIII.36})$$

Genauso folgt

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_A[\omega_1, \omega_2] d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1) = (\mu_1 \otimes \mu_2)[A], \quad (\text{VIII.37})$$

und wir erhalten damit (VIII.32) und (VIII.33) für $f = \mathbf{1}_A$, d.h.

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(\omega_1, \omega_2) \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} \mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2), \end{aligned} \quad (\text{VIII.38})$$

mit dem Verständnis, dass mit einem auch die jeweils beiden anderen Terme unendlich sind.

Als Nächstes betrachten wir eine Treppenfunktion $f = \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell \mathbf{1}_{A_\ell}$, wobei $\alpha_\ell > 0$ und $A_\ell \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ paarweise disjunkt sind. Letzteres impliziert, dass auch $P_1^y[A_\ell] \in \mathfrak{A}_1$ ebenso wie $P_2^x[A_\ell] \in \mathfrak{A}_2$ für feste $y \in \Omega_2$ bzw. $x \in \Omega_2$ paarweise disjunkt sind. Daher überträgt sich (VIII.38) auf f , und (VIII.32) und (VIII.33) gelten für jede Treppenfunktion.

Schließlich gibt es für jede reell-messbare Funktion $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$ eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert, $f_n \nearrow f$ (mit dem Verständnis, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega_1, \omega_2) = \infty$, falls $f(\omega_1, \omega_2) = \infty$). Der Satz über monotone Konvergenz liefert dann die Behauptung im allgemeinen Fall. $\square$

Durch vollständige Induktion lässt sich Satz VIII.4 leicht auf das Produkt endlich vieler Sigma-endlicher Maße verallgemeinern.

Satz VIII.6. Seien $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$ Sigma-endliche Maßräume, für $i \in \mathbb{N}_1^N$. Ist $\pi \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation, so definieren wir

$$\begin{aligned} V_\pi : \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_N &\rightarrow \Omega_{\pi(1)} \times \Omega_{\pi(2)} \times \cdots \times \Omega_{\pi(N)}, \\ (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) &\mapsto (\omega_{\pi(1)}, \omega_{\pi(2)}, \dots, \omega_{\pi(N)}). \end{aligned} \quad (\text{VIII.39})$$

Es gilt

$$\left(\cdots \left((\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 \right) \otimes \cdots \right) \otimes \mu_N = \left(\left((\mu_{\pi(1)} \otimes \mu_{\pi(2)}) \otimes \mu_{\pi(3)} \right) \otimes \cdots \otimes \mu_{\pi(N)} \right) \circ V_\pi. \quad (\text{VIII.40})$$

Dieser Satz berechtigt uns zu folgender Definition.

Definition VIII.7. Seien $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$ Sigma-endliche Maßräume, für $i \in \mathbb{N}_1^N$. Dann wird, mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_N &:= \left(\cdots \left((\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \otimes \mathfrak{A}_3 \right) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_N \right) \\ &= \mathfrak{A} \left(\{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N \mid A_i \in \mathfrak{A}_i\} \right) \end{aligned} \quad (\text{VIII.41})$$

und

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_N := \left(\cdots \left((\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 \right) \otimes \cdots \otimes \mu_N \right), \quad (\text{VIII.42})$$

$(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N, \mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_N, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N)$ zu einem Sigma-endlichen Maßraum. $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_N$ und $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N$ bezeichnet man als **Produkt-Sigma-Algebra** bzw. **Produktmaß**.

Satz VIII.8 (Fubini). Seien $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$ Sigma-endliche Maßräume, für $i \in \mathbb{N}_1^N$, und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_N \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion bzgl. $(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N, \mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_N)$.

(i) f ist $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N$ -integrabel genau dann, wenn es eine Permutation $\kappa \in \mathcal{S}_N$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\kappa(N)}} \cdots \left(\int_{\Omega_{\kappa(2)}} \left(\int_{\Omega_{\kappa(1)}} |f(\omega_1, \dots, \omega_N)| d\mu_{\kappa(1)}(\omega_{\kappa(1)}) \right) d\mu_{\kappa(2)}(\omega_{\kappa(2)}) \right) \\ \cdots d\mu_{\kappa(N)}(\omega_{\kappa(N)}) < \infty \end{aligned} \quad (\text{VIII.43})$$

(ii) Gilt (VIII.43), so stimmt das $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N$ -Integral von f mit der linken Seite in (VIII.43) überein, und es gilt sogar

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N} f(\omega_1, \dots, \omega_N) d(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N)(\omega_1, \dots, \omega_N) \\ = \int_{\Omega_{\pi(N)}} \cdots \left(\int_{\Omega_{\pi(2)}} \left(\int_{\Omega_{\pi(1)}} f(\omega_1, \dots, \omega_N) d\mu_{\pi(1)}(\omega_{\pi(1)}) \right) d\mu_{\pi(2)}(\omega_{\pi(2)}) \right) \\ \cdots d\mu_{\pi(N)}(\omega_{\pi(N)}) \end{aligned} \quad (\text{VIII.44})$$

für jede Permutation $\pi \in \mathcal{S}_N$.

Beweis. Induktion in N und Anwendung von Satz VIII.5 □

Definition VIII.9. Wir schreiben nun im Folgenden

$$d\mu_1(x) =: dx, \quad d\mu_d(x) =: d^d x, \quad (\text{VIII.45})$$

für das Lebesgue-Maß, und wir definieren

$$L^p(\Omega, d\mu) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist } \mathfrak{A}\text{-messbar und } |f|^p \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \right\}, \quad (\text{VIII.46})$$

wobei $1 \leq p < \infty$ und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum sind. Insbesondere ist $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ die Menge der μ -integrierbaren, komplexwertigen Funktionen.

Korollar VIII.10. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ eine $\mathcal{B}_d = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_1$ -messbare Funktion. Sei $\mu_d : \mathcal{B}_d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ das Lebesgue-Borel-Maß.

(i) f ist μ_d -integrierbar genau dann, wenn es eine Permutation $\kappa \in \mathcal{S}_d$ gibt, so dass

$$\int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, \dots, x_d)| dx_{\kappa(1)} \right) dx_{\kappa(2)} \right) \cdots dx_{\kappa(d)} < \infty. \quad (\text{VIII.47})$$

(ii) Gilt (VIII.47), so ist

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d^d x = \int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_d) dx_{\pi(1)} \right) dx_{\pi(2)} \right) \cdots dx_{\pi(d)}, \quad (\text{VIII.48})$$

für jede Permutation $\pi \in \mathcal{S}_d$.

IX. Die Transformationsformel

In diesem Kapitel untersuchen wir das Verhalten von Integralen in $\mathbb{R}^d$ unter Koordinatentransformationen. Um diesen Begriff zu definieren, erinnern wir zunächst an den Satz über Umkehrfunktionen, der besagt, dass eine Abbildung $\phi \in C^1(U, V)$ *lokal* um $y_0 = \phi(x_0) \in V$ invertierbar ist, falls die Jacobideterminante von ϕ bei x_0 nicht verschwindet, $\det[J_\phi(x_0)] \neq 0$. Damit ϕ eine Koordinatentransformation ist, fordert man zusätzlich *globale* Invertierbarkeit.

Definition IX.1. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend. Eine Abbildung $\phi \in C^1(U; V)$ heißt **Koordinatentransformation** : $\Longleftrightarrow$

- (i) Für alle $x \in U$ ist $\det[J_\phi(x)] \neq 0$, wobei $J_\phi(x) = (\partial\phi_i(x)/\partial x_j)_{i,j=1}^d$ die Jacobimatrix von ϕ ist.
- (ii) ϕ ist auf V **invertierbar**, d.h. es existiert eine Abbildung $\phi^{-1} \in C^1(V, U)$, so dass $\phi^{-1} \circ \phi = \mathbf{1}_U$ und $\phi \circ \phi^{-1} = \mathbf{1}_V$.

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis der folgenden Transformationsformel.

Satz IX.2. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend und $\phi \in C^1(U; V)$ eine Koordinatentransformation. Ist $f \in L^1(V, d^d y)$, so ist $|\det[J_\phi(x)]| \cdot (f \circ \phi) \in L^1(U, d^d x)$, und es gilt

$$\int_V f(y) d^d y = \int_U f[\phi(x)] |\det[J_\phi(x)]| d^d x. \quad (\text{IX.1})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist $d = 1$, so reduziert sich (IX.1) zur bekannten Transformationsformel, die aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:
Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $\phi \in C^1(U, V)$ mit $\det[J_\phi(x)] = \phi'(x) \neq 0$, für alle $x \in U$. Weil ϕ' stetig auf U ist, gilt $\phi' > 0$ auf U oder es gilt $\phi' < 0$ auf U . Damit ist ϕ jedoch als streng monotone Funktion auch auf U invertierbar. Etwa für $\phi' > 0$, $U = (a, b)$ und $V = (\phi(a), \phi(b))$, mit $a < b$, ist dann

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y) dy = \int_a^b f[\phi(x)] \frac{d\phi}{dx} dx. \quad (\text{IX.2})$$

- Formel (IX.2) ist auch eine gute Merkhilfe für (IX.1), wenn man $\frac{d\phi}{dx}$ mit $|\det[J_\phi]|$ identifiziert; Formel (IX.2) resultiert dann durch "Erweitern mit dx ": $dy = \frac{dy}{dx}dx = \phi'dx$.
- Für $d \geq 1$ folgt aus der Stetigkeit von $\det[J_\phi]$ auf der offenen und zusammenhängenden Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$, dass entweder

$$\left\{ \forall x \in U : \det[J_\phi(x)] > 0 \right\} \quad \text{oder} \quad \left\{ \forall x \in U : \det[J_\phi(x)] < 0 \right\} \quad (\text{IX.3})$$

gilt.

- Für $d = 2$ ist mit $U := \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)$, $V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(\lambda, 0)^T \mid \lambda \in \mathbb{R}_0^+\}$ durch

$$\phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{IX.4})$$

die Transformation $\phi \in C^1(U; V)$ auf **Polarkoordinaten** definiert. Dabei sind

$$\phi^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \arccos \left(x_1 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \end{pmatrix}, \quad (\text{IX.5})$$

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{IX.6})$$

und deshalb

$$\det[J_\phi](r, \varphi) = r. \quad (\text{IX.7})$$

- Mit Polarkoordinaten lässt sich das Integral der Normalverteilung berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x_1^2 + x_2^2)} d^2x &= \int_V e^{-(x_1^2 + x_2^2)} d^2x = \int_U e^{-r^2} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \\ &= \left(\frac{2\pi}{2} \right) \int_0^\infty \left(\frac{d}{dr} [e^{-r^2}] \right) dr = \pi. \end{aligned} \quad (\text{IX.8})$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} dx_1 dx_2 \right)^{1/2} = \sqrt{\pi}. \quad (\text{IX.9})$$

- Für $d = 3$ ist mit $U := \mathbb{R}^+ \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, und $V := \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$ durch

$$\phi \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ r \cdot \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (\text{IX.10})$$

die Transformation $\phi \in C^1(U; V)$ auf **Kugelkoordinaten** definiert. Dabei sind

$$\begin{aligned} J_\phi(r, \vartheta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial r} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & -r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \cdot \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{IX.11})$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\det[J_\phi(r, \vartheta, \varphi)] &= r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^3 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi \\
&\quad + r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^3 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi \\
&= r^2 \cdot \sin \vartheta (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \cdot \sin \vartheta.
\end{aligned} \tag{IX.12}$$

Wir wenden uns als nächstes dem Beweis von Satz IX.2 zu. Zunächst beweisen wir dazu

Lemma IX.3. Sei $A = A^* = A^T > 0$ eine reelle, symmetrische, positiv definite $d \times d$ -Matrix, $A \in \mathfrak{M}_{d \times d}(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp[-\langle x|Ax \rangle] d^d x = (\det[A])^{-1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^d. \tag{IX.13}$$

Beweis. Wir bemerken zu Beginn dass $A_{i,j} = A_{j,i}$ und $A_{i,i} > 0$, da $A = A^* > 0$ und $A_{i,j} \in \mathbb{R}$. Wir beweisen das Lemma durch Induktion in d . Für $d = 1$ ist A eine Zahl, $A_{11} > 0$, und $\det[A] = A_{11} > 0$. Damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\langle x|Ax \rangle} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{A_{11}} x)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \tag{IX.14}$$

und (IX.13) gilt für $d = 1$. Sei nun $d \geq 2$ und gelte (IX.13) für $d - 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\langle x|Ax \rangle &= \sum_{i,j=1}^d x_i A_{i,j} x_j = A_{d,d} x_d^2 + 2x_d \sum_{j=1}^{d-1} A_{d,j} x_j + \sum_{i,j=1}^{d-1} A_{i,j} x_i x_j \\
&= A_{d,d} \left(x_d + \sum_{j=1}^{d-1} \frac{A_{d,j}}{A_{d,d}} x_j \right)^2 + \sum_{i,j=1}^{d-1} Q_{i,j} x_i x_j,
\end{aligned} \tag{IX.15}$$

wobei $Q_{i,j} := A_{i,j} - \frac{A_{i,d}A_{d,j}}{A_{d,d}}$ eine reelle und symmetrische $(d-1) \times (d-1)$ -Matrix ist. Durch die lineare Variablensubstitution

$$y_d := \sqrt{A_{d,d}} \left(x_d + \sum_{j=1}^{d-1} \frac{A_{d,j}}{A_{d,d}} x_j \right) \tag{IX.16}$$

sowie $z_1 := x_1, \dots, z_{d-1} := x_{d-1}$ wird dann

$$\langle x|Ax \rangle = y_d^2 + \langle z|Qz \rangle, \tag{IX.17}$$

und $Q = A|_{\{y_d=0\}} > 0$ ist insbesondere positiv definit. Außerdem erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle x|Ax \rangle} d^d x &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle z|Qz \rangle} \frac{1}{\sqrt{A_{d,d}}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y_d^2} dy_d \right) d^{d-1} z \\
&= \frac{1}{\sqrt{A_{d,d}}} \cdot (\det[Q])^{-1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^d,
\end{aligned} \tag{IX.18}$$

nach Induktion. Beachte nun, dass

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,d-1} & A_{1,d} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{d-1,1} & \cdots & A_{d-1,d-1} & A_{d-1,d} \\ \hline A_{d,1} & \cdots & A_{d,d-1} & A_{d,d} \end{array} \right). \quad (\text{IX.19})$$

Der Wert der Determinante von A ändert sich nicht, wenn wir zur j . Spalte, für $j = 1, \dots, d-1$, ein Vielfaches der d . Spalte hinzu addieren. Daher ist

$$\begin{aligned} \det[A] &= \det \left[\left(\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} - \frac{A_{1,d}A_{d,1}}{A_{d,d}} & \cdots & A_{1,d-1} - \frac{A_{1,d}A_{d,d-1}}{A_{d,d}} & A_{1,d} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{d-1,1} - \frac{A_{d-1,d}A_{d,1}}{A_{d,d}} & \cdots & A_{d-1,d-1} - \frac{A_{d-1,d}A_{d,d-1}}{A_{d,d}} & A_{d-1,d} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_{d,d} \end{array} \right) \right] \\ &= A_{d,d} \cdot \det[Q], \end{aligned} \quad (\text{IX.20})$$

nach dem Kästchensatz, und (IX.18) und (IX.20) ergeben die Behauptung. $\square$

Lemma IX.4. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, U konvex, $x_0 \in U$ und $\phi \in C^1(U; V)$ eine Koordinatentransformation mit der Eigenschaft, dass

$$\forall x \in U : \quad \left\| J_\phi(x) \cdot (J_\phi(x_0))^{-1} - \mathbf{1} \right\|_{\text{op}} < \frac{1}{2}, \quad (\text{IX.21})$$

wobei $\|\cdot\|_{\text{op}} := \|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ die Operatornorm bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^d$ notiert. Dann gilt (IX.1), d.h. ist $f \in L^1(V, d^d y; \mathbb{R}_0^+)$, so ist $|\det[J_\phi]| \cdot f \circ \phi \in L^1(U, d^d x; \mathbb{R}_0^+)$ und

$$\int_V f(y) d^d y = \int_U f[\phi(x)] |\det[J_\phi(x)]| d^d x. \quad (\text{IX.22})$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass

$$J_\phi(x) - J_\phi(x_0) = \left[J_\phi(x) \cdot (J_\phi(x_0))^{-1} - \mathbf{1} \right] J_\phi(x_0). \quad (\text{IX.23})$$

Für $x \in U$ und $z \in \mathbb{R}^d$ ist nach (IX.21) also

$$\|J_\phi(x)z - J_\phi(x_0)z\| \leq \left\| J_\phi(x) \cdot (J_\phi(x_0))^{-1} - \mathbf{1} \right\| \cdot \|J_\phi(x_0)z\| \leq \frac{1}{2} \|J_\phi(x_0)z\|. \quad (\text{IX.24})$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus sofort

$$\forall x \in U, z \in \mathbb{R}^d : \quad \frac{1}{2} \|J_\phi(x_0)z\| \leq \|J_\phi(x)z\| \leq 2 \|J_\phi(x_0)z\|. \quad (\text{IX.25})$$

Somit unterscheiden sich die Eigenwerte von $J_\phi(x)$ und $J_\phi(x_0)$ im Betrag höchstens um einen Faktor 2, und es gilt

$$\forall x \in U : \quad \frac{1}{2^d} |\det[J_\phi(x_0)]| \leq |\det[J_\phi(x)]| \leq 2^d |\det[J_\phi(x_0)]|. \quad (\text{IX.26})$$

Daher ist mit $f \in L^1(V, d^d y)$ auch $|\det[J_\phi]| \cdot (f \circ \phi) \in L^1(U, d^d x)$.

Als Nächstes definieren wir zwei Funktionen $\tilde{f}, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch

$$\tilde{f}(y) := f(y) \cdot \left| \det[J_\phi(\phi^{-1}(y))] \right| \cdot \mathbf{1}_V[y], \quad (\text{IX.27})$$

$$g(x) := \frac{e^{-x^2}}{M^d}, \quad M := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad (\text{IX.28})$$

sowie zwei Funktionen $F, F_\varepsilon : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch

$$F(y, z) := \tilde{f}(y) \cdot g[J_\phi(\phi^{-1}(y)) \cdot z], \quad (\text{IX.29})$$

$$F_\varepsilon(y, z) := \tilde{f}(y) \cdot g\left[\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon J_\phi(sz + \phi^{-1}(y)) \cdot z ds\right] \cdot \mathbf{1}_U[\varepsilon z + \phi^{-1}(y)], \quad (\text{IX.30})$$

wobei $\mathbf{1}_U[\varepsilon z + \phi^{-1}(y)]$ und die Konvexität von U sichern, dass mit $\phi^{-1}(y)$ und $\varepsilon z + \phi^{-1}(y)$ auch $sz + \phi^{-1}(y)$ für jedes $s \in [0, 1]$ in U liegt.

Dann ist F integrierbar, und es gilt nach Lemma IX.3

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(y, z) d^d y d^d z \\ &= \int_V f(y) \cdot \left| \det[J_\phi(\phi^{-1}(y))] \right| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} g[J_\phi(\phi^{-1}(y)) \cdot z] d^d z \right) d^d y \\ &= \int_V f(y) d^d y. \end{aligned} \quad (\text{IX.31})$$

Wegen (IX.24) ist

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon J_\phi(sz + \phi^{-1}(y)) \cdot z ds \right\| \\ &= \left\| J_\phi(x_0)z + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon [J_\phi(sz + \phi^{-1}(y)) - J_\phi(x_0)] z ds \right\| \geq \frac{1}{2} \|J_\phi(x_0)z\|, \end{aligned} \quad (\text{IX.32})$$

für alle $y, z \in V \times \mathbb{R}^d$ mit $\varepsilon z + \phi^{-1}(y) \in U$. Daher ist auch F_ε integrierbar, und

$$G(y, z) := \tilde{f}(y) \cdot g\left[\frac{1}{2} J_\phi(x_0) z\right] \quad (\text{IX.33})$$

ist eine integrierbare Majorante. Weiterhin beobachten wir, dass $F(y, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(y, z)$ punktweise konvergiert, und deshalb ist

$$\int_V f(y) d^d y = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(y, z) d^d y d^d z = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F_\varepsilon(y, z) d^d y d^d z \right\}, \quad (\text{IX.34})$$

nach dem Satz über majorisierte Konvergenz. Für $\varepsilon > 0$ beobachten wir nun, dass nach Taylor

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon J_\phi(s z + \phi^{-1}(y)) \cdot z \, ds &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\phi(\varepsilon z + \phi^{-1}(y)) - \phi(\phi^{-1}(y)) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\phi(\varepsilon z + \phi^{-1}(y)) - y \right], \end{aligned} \quad (\text{IX.35})$$

für alle y, z mit $\varepsilon z + \phi^{-1}(y) \in U$, wobei wir abermals die Konvexität von U verwenden.

Wir führen nun die neue Variable

$$x := \varepsilon z + \phi^{-1}(y) \quad (\text{IX.36})$$

ein, die - für festes y - aus z durch eine Verschiebung und Skalierung hervorgeht. Damit wird

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F_\varepsilon(y, z) \, d^d y \, d^d z = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(y) \left(\int_U \varepsilon^{-d} g \left[\frac{1}{\varepsilon} (\phi(x) - y) \right] \, d^d x \right) \, d^d y. \quad (\text{IX.37})$$

Satz X.1 liefert nun das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F_\varepsilon(y, z) \, d^d y \, d^d z \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \tilde{f}(y) \cdot \frac{1}{\varepsilon^d} g \left[\frac{1}{\varepsilon} (\phi(x) - y) \right] \mathbf{1}_U[x] \, d^d x \, d^d y \right\} \\ &= \int_U \tilde{f}(\phi(x)) \, d^d x = \int_U f(\phi(x)) \left| \det [J_\phi(x)] \right| \, d^d x. \end{aligned} \quad (\text{IX.38})$$

□

Beweis. (Satz IX.2) Wir beweisen Satz IX.2 nur für $f \geq 0$ nichtnegativ. Weiterhin bemerken wir, dass es reicht,

$$\int_{\phi(K)} f(y) \, d^d y = \int_K f[\phi(x)] \left| \det [J_\phi(x)] \right| \, d^d x \quad (\text{IX.39})$$

für jedes Kompaktum $K \subseteq U$ zu zeigen, denn wegen der monotonen Konvergenz und $K_j \nearrow U$ gilt dann auch

$$\begin{aligned} \int_V F(y) \, d^d y &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\phi(K_j)} f(y) \, d^d y \right\} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ \int_{K_j} f[\phi(x)] \left| \det [J_\phi(x)] \right| \, d^d x \right\} \\ &= \int_U f[\phi(x)] \left| \det [J_\phi(x)] \right| \, d^d x, \end{aligned} \quad (\text{IX.40})$$

wobei

$$K_j := [-j, j]^d \cap \overline{\{x \in U \mid \text{dist}(x, U^c) \geq j^{-1}\}}. \quad (\text{IX.41})$$

Um (IX.39) zu zeigen, bemerken wir, dass es für jeden Punkt $x_0 \in U$ einen Radius $r(x_0) > 0$ gibt, sodass $B(x_0, r(x_0)) \subseteq U$ und

$$\forall x \in B(x_0, r(x_0)) : \quad \left\| J_\phi(x) \cdot (J_\phi(x_0))^{-1} - \mathbf{1} \right\| < \frac{1}{2}, \quad (\text{IX.42})$$

gelten, da J_ϕ stetig in U ist. Somit ist $\{B(x_0, r(x_0)) \mid x_0 \in K\}$ eine offene Überdeckung von K , die wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung $\{B_1, \dots, B_N\}$ enthält, wobei $B_n := B(x_n, r(x_n))$. Mit

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_1 &:= K \cap B_1, \\
\tilde{B}_2 &:= K \cap B_2 \cap B_1^c, \\
\tilde{B}_3 &:= K \cap B_3 \cap B_1^c \cap B_2^c, \\
&\dots \\
\tilde{B}_N &:= K \cap B_N \cap B_1^c \cap \dots \cap B_{N-1}^c
\end{aligned} \tag{IX.43}$$

sind dann $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_N$ paarweise disjunkt und $K = \tilde{B}_1 \cup \dots \cup \tilde{B}_N$. Nach Lemma IX.4 ist schließlich

$$\begin{aligned}
\int_{\phi(K)} f(y) d^d y &= \sum_{n=1}^N \int_{\phi(\tilde{B}_n)} f(y) d^d y = \sum_{n=1}^N \int_{\phi(B_n)} \mathbf{1}_{\phi(\tilde{B}_n)}[y] f(y) d^d y \\
&= \sum_{n=1}^N \int_{B_n} \mathbf{1}_{\tilde{B}_n}[x] f[\phi(x)] |\det[J_\phi(x)]| d^d x \\
&= \sum_{n=1}^N \int_{\tilde{B}_n} f[\phi(x)] |\det[J_\phi(x)]| d^d x = \int_K f[\phi(x)] |\det[J_\phi(x)]| d^d x.
\end{aligned} \tag{IX.44}$$

□

X. Faltung und Regularisierung

Für komplexwertige, messbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir das **Faltungsprodukt** $f * g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ von f und g durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x - y) d^d y, \quad (\text{X.1})$$

sofern die rechte Seite fast überall endlich ist. Welche genauen Bedingungen man an f und g stellen möchte, hängt stark vom Kontext ab. Sind z.B. f und g μ -integrierbar, so ist $f * g$ fast überall endlich und selbst μ -integrierbar, denn nach Satz VIII.8 von Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |(f * g)(x)| d^d x &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x - y) d^d y \right| d^d x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| |g(x - y)| d^d y \right) d^d x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x - y)| d^d x \right) d^d y \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| d^d y \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| d^d x \right) < \infty. \end{aligned} \quad (\text{X.2})$$

Satz X.1. Seien $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_0^+)$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} g(x) d^d x = 1$ und $\varepsilon > 0$. Wir definieren $g_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_0^+)$ durch

$$g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (\text{X.3})$$

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d; d^d x)$ definieren wir weiterhin $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^d; d^d x)$ durch

$$f_\varepsilon := f * g_\varepsilon. \quad (\text{X.4})$$

Dann gelten folgende Aussagen:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_\varepsilon(x)| d^d x \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| d^d x, \quad (\text{X.5})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f_\varepsilon(x)| d^d x \right\} = 0, \quad (\text{X.6})$$

$$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^k f_\varepsilon}{\partial x_{n_1} \partial x_{n_2} \cdots \partial x_{n_k}} = f * \frac{\partial^k g_\varepsilon}{\partial x_{n_1} \cdots \partial x_{n_k}}, \quad (\text{X.7})$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $n_1, n_2, \dots, n_k \in \{1, \dots, d\}$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass für jede messbare Funktion $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid g_\varepsilon(x) h(x) > \lambda \right\} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \varepsilon^{-d} g(x/\varepsilon) h(x) > \lambda \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid g(y) h(\varepsilon y) > \varepsilon^d \lambda \right\} \end{aligned} \quad (\text{X.8})$$

gilt. Also ist

$$\mu(\{g_\varepsilon h > \lambda\}) = \varepsilon^d \mu(\{g(y) h(\varepsilon y) > \varepsilon^d \lambda\}). \quad (\text{X.9})$$

Daher gilt für jede messbare Funktion $h \geq 0$, dass

$$\begin{aligned} \int g_\varepsilon(y) h(y) d^d y &= \varepsilon^d \int_0^\infty \mu(\{y \mid g(y) h(\varepsilon y) > \varepsilon^d \lambda\}) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \mu(\{y \mid g(y) h(\varepsilon y) > \lambda\}) d\lambda = \int g(y) h(\varepsilon y) d^d y. \end{aligned} \quad (\text{X.10})$$

Insbesondere ist

$$\int g_\varepsilon(y) d^d y = \int g(y) d^d y = 1, \quad (\text{X.11})$$

und wir erhalten (X.5) aus (X.2),

$$\int |f_\varepsilon(x)| d^d x \leq \left(\int g_\varepsilon(y) d^d y \right) \left(\int |f(x)| d^d x \right) = \int |f(x)| d^d x. \quad (\text{X.12})$$

Wir zeigen (X.6) nur für nichtnegative $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Der allgemeine Fall $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ folgt daraus durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil und anschließend jeweils in deren positive und negative Anteile. Mit (X.10) erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \int |f(x) - f_\varepsilon(x)| d^d x &= \int \left| \int g_\varepsilon(y) (f(x) - f(x-y)) d^d y \right| d^d x \\ &\leq \int g_\varepsilon(y) \left(\int |f(x) - f(x-y)| d^d x \right) d^d y \\ &= \int g(y) M(\varepsilon y) d^d y, \end{aligned} \quad (\text{X.13})$$

wobei

$$\begin{aligned} M(y) &:= \int |f(x) - f(x-y)| d^d x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\max\{f(x), f(x-y)\} - \min\{f(x), f(x-y)\} \right) d^d x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1} \left[\max\{f(x), f(x-y)\} > \lambda > \min\{f(x), f(x-y)\} \right] d^d x d\lambda. \end{aligned} \quad (\text{X.14})$$

Wir definieren nun

$$A(y) := \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \mid f(x - y) > \lambda\} \quad (\text{X.15})$$

und

$$\begin{aligned} B(y) &:= \left\{ (x, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \mid \max\{f(x), f(x - y)\} > \lambda > \min\{f(x), f(x - y)\} \right\} \\ &= \left\{ (x, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \mid f(x) > \lambda > f(x - y) \right\} \\ &\quad \cup \left\{ (x, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \mid f(x - y) > \lambda > f(x) \right\} \\ &= [A(0) \cap A(y)^c] \cup [A(y) \cap A(0)^c] = [A(0) \cup A(y)] \cap [A(0)^c \cup A(y)^c] \\ &= [A(0) \cup A(y)] \cap [A(0) \cap A(y)]^c = [A(0) \cup A(y)] \setminus [A(0) \cap A(y)]. \end{aligned} \quad (\text{X.16})$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{B(y)} &= \mathbf{1}_{A(0) \cup A(y)} - \mathbf{1}_{A(0) \cap A(y)} = \mathbf{1}_{A(0)} + \mathbf{1}_{A(y)} - 2 \cdot \mathbf{1}_{A(0) \cap A(y)} \\ &= \mathbf{1}_{A(0)} + \mathbf{1}_{A(y)} - 2 \cdot \mathbf{1}_{A(0)} \cdot \mathbf{1}_{A(y)}. \end{aligned} \quad (\text{X.17})$$

Also ist

$$\begin{aligned} M(y) &= (\mu_d \otimes \mu_1)[B(y)] \\ &= (\mu_d \otimes \mu_1)[A(0)] + (\mu_d \otimes \mu_1)[A(y)] - 2(\mu_d \otimes \mu_1)[A(0) \cap A(y)] \\ &= 2 \left\{ (\mu_d \otimes \mu_1)[A(0)] - (\mu_d \otimes \mu_1)[A(0) \cap A(y)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{X.18})$$

Sei nun $\delta > 0$ vorgegeben. Wegen der äußeren Regularität (VI.97) des Lebesgue-Maßes gibt es eine offene Menge $U \supseteq A(0)$, so dass

$$(\mu_d \otimes \mu_1)[U] \leq (\mu_d \otimes \mu_1)[A(0)] + \delta. \quad (\text{X.19})$$

Setzen wir entsprechend $U(y) := (y, 0) + U$, so gilt auch $U(y) \supseteq A(y)$ und

$$(\mu_d \otimes \mu_1)[U(y)] \leq (\mu_d \otimes \mu_1)[A(y)] + \delta. \quad (\text{X.20})$$

Also ist

$$\begin{aligned} (\mu_d \otimes \mu_1)[A(0) \cap A(y)] &\geq (\mu_d \otimes \mu_1)[A(0) \cap U(y)] - \delta \\ &= \left(\int \mathbf{1}_{A(0)}(x, \lambda) \cdot \mathbf{1}_{U(y)}(x, \lambda) d^d x d\lambda \right) - \delta. \end{aligned} \quad (\text{X.21})$$

Da U offen ist, gilt

$$\forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ : \quad \lim_{y \rightarrow 0} \mathbf{1}_{U(y)}(x, \lambda) = \lim_{y \rightarrow 0} \mathbf{1}_U(x - y, \lambda) = \mathbf{1}_U(x, \lambda). \quad (\text{X.22})$$

Also ist nach dem Satz der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
& \liminf_{y \rightarrow 0} (\mu_d \otimes \mu_1)[A(0) \cap A(y)] \\
& \geq \liminf_{y \rightarrow 0} \left(\int \mathbf{1}_{A(0)} \mathbf{1}_{U(y)} d^d x d\lambda \right) - \delta = \left(\int \mathbf{1}_{A(0)} \mathbf{1}_U d^d x d\lambda \right) - \delta \\
& = \left(\int \mathbf{1}_{A(0)} d^d x d\lambda \right) - \delta = (\mu_d \otimes \mu_1)[A(0)] - \delta.
\end{aligned} \tag{X.23}$$

Da $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt damit, dass

$$\lim_{y \rightarrow 0} M(y) = 0. \tag{X.24}$$

Damit folgt jedoch - abermalig mit dem Satz der majorisierten Konvergenz - dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int |f(x) - f_\varepsilon(x)| d^d x \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int g(y) M(\varepsilon y) d^d y \right\} = 0. \tag{X.25}$$

Der Beweis von (X.7) ist trivial. □

Literaturverzeichnis

- [1] Heinz Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*. Walter de Gruyter, Berlin, 2 edition, 1974.
- [2] E. Lieb and M. Loss. *Analysis*, volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. AMS, 1997.
- [3] J. Oxtoby. *Mass und Kategorie*. Springer, Berlin, 1971.