Analysis I

Prof. Dr. Volker Bach

Technische Universität Braunschweig
Wintersemester 2024/25

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In diesen Tagen besuchen Sie die ersten Vorlesungen Ihres Studentenlebens. Ich hoffe, dass Ihnen die kommenden Wochen in positiver Erinnerung bleiben. Vielleicht machen Sie – wie auch ich bei Studienbeginn – folgende Erfahrungen:

- Die Lehrveranstaltungen an der Universität sind grundsätzlich verschieden vom Schulunterricht: Vorlesungen sind Frontalunterricht, und nur in den Übungen haben Sie die Gelegenheit, aktiv am Unterricht teilzunehmen.

- Das Material, das in der Vorlesung abgedeckt wird, ist ein *Vielfaches* dessen, was in derselben Zeit im Schulunterricht behandelt wird.

- Der Abstraktionsgrad ist ebenfalls viel größer als in der Schule.

- Sie haben das Gefühl, noch nie soviel neue, interessante Dinge in so kurzer Zeit gelernt zu haben. Es eröffnet sich geradezu eine neue, bisher unbekannte Welt für Sie.

- Sie sind für alles, was Sie lernen oder nicht lernen selbst verantwortlich. Das gibt Ihnen eine völlig neue Freiheit, aber es erfordert auch ein hohes Maß an Selbstdisziplin.

Ich möchte Ihnen deshalb ein paar persönliche Ratschläge mit auf den Weg geben:

- Ihr Zeitaufwand für die (4+2+2)-stündige Vorlesung *Analysis I* ist enorm, wenn Sie den Anspruch haben, auch wirklich zu verstehen, was Sie lernen. Sollten Sie merken, dass Sie den Aufwand aller Ihrer Veranstaltungen nicht mehr schaffen, dann empfehle ich Ihnen, lieber Vorlesungen aus ihrem Stundenplan zu streichen, als viele Dinge nur oberflächlich zu machen.

- Suchen Sie sich Kommilitonen/innen, mit denen Sie gemeinsam Übungsaufgaben und deren Lösungen vor deren Abgabe besprechen.

- Erklären Sie sich gegenseitig den Vorlesungsstoff – nur das, was Sie jemandem überzeugend erklären können, haben Sie selbst auch gut verstanden.

- Kommen Sie zur Vorlesung statt zu "schwänzen" und sich darauf zu verlassen, in den Semesterferien alles nacharbeiten zu können. (Im Übrigen besteht für Vorlesungen und Übungen sowieso Anwesenheitspflicht!)

- Kaufen Sie kein Buch ohne nicht vorher damit gearbeitet zu haben, denn Buchauswahl ist Geschmacksache – auch bei Mathematikbüchern.

- Trauen Sie sich ruhig in Vorlesungen und Übungen dazwischen zu fragen, wenn Sie etwas nicht verstehen. Meistens sind Sie nicht allein, und die anderen sind dankbar für Ihre klärende Frage.

- Versuchen Sie herauszufinden, ob Sie durch das Schreibtempo in der Vorlesung "abgehängt" werden. Falls ja, kopieren Sie sich eine Mitschrift eines Kommilitionen oder wechseln Sie sich mit dem Schreiben ab. Kommen Sie aber auf jeden Fall zur Vorlesung!

- Der Erfolg Ihres Studiums hängt in entscheidender Weise von Ihrer Begeisterung für das von Ihnen gewählten Fach ab – unabhängig vom Fach. Bewahren Sie sich diese Begeisterung und versuchen Sie sich auf die Faszination einzulassen, die von den in der Lehre behandelten Inhalten ausgeht, statt auf ein maximal ökonomisches Studium (= viele gute Noten mit minimalem Aufwand) zu zielen!

Vorwissen aus der Schule

Es ist eine immer wieder beklagte Tatsache, dass nicht alle Studienanfänger der Mathematik dasselbe oder auch nur ein vergleichbares mathematisches Vorwissen besitzen. Defizite entstehen einerseits durch individuelle Lernschwächen und Abwählen von Mathematik als Schulfach, aber auch durch eigenwillige Interpretationen des Lehrplans. Es stellt sich daher die Frage, welches mathematisches Vorwissen ich Ihnen in der Lehrveranstaltung *Mathematik I* verbindlich unterstelle. Selbstverständlich lautet die korrekte Antwort auf diese Frage, dass ich von der Beherrschung aller im Lehrplan bis zum Abitur vorgesehen Inhalte ausgehe. Diese Antwort hat für Sie vermutlich nur einen sehr begrenzten praktischen Nutzen. Eine gute Orientierung über das von Ihnen erwartete Vorwissen bietet das Buch *Schulwissen Mathematik* von Winfried Scharlau (Vieweg Verlag).
Hier gebe ich Ihnen zusätzlich eine (unvollständige!) Liste mathematischer Gegenstände, deren sichere Beherrschung ich von Ihnen erwarte.

- **Zahlenbegriffe** der natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, rationale Zahlen $\mathbb{Q}$, irrationale Zahlen, wie $\sqrt{2}$, und reelle Zahlen $\mathbb{R}$.

- **Elementare Umformungen** von Gleichungen: Wenn man auf beide Seiten einer Gleichung dieselbe Operation durchführt, erhält man wieder eine Gleichung. Aber Vorsicht! Obwohl diese Umformungen in der Schule häufig als "Äquivalenzumformungen" bezeichnet werden, ist die neue Gleichung nicht immer äquivalent zur alten. Beispielsweise erhält man $a \cdot b = 0$ aus $a = 0$, aber $a = 0$ folgt aus $a \cdot b = 0$ nur, wenn man außerdem weiß, dass $b \neq 0$.

- **Auflösen von Gleichungen**, wie zum Beispiel
$$y \;=\; \frac{3x+4}{5x+6} \quad \text{oder} \quad y \;=\; \frac{3x^2+4x+5}{5x^2+6x+7},$$
nach x (durch elementare Umformungen).

- Die **p-q-Formel** für quadratische Gleichungen.

- Die **Binomischen Formeln**.

- **Geometrische Grundbegriffe**

- Die **Flächeninhalte** von Kreis, Rechteck, Parallelogramm, Dreieck.

- Die **Volumina** von Kugel, Quader, Zylinder, Prisma.

- Den **Satz von Phytargoras**.

- Die **trigonometrische Funktionen** sin, cos, tan, cot, ihre Umkehrfunktionen arcsin, arccos, arctan, arccos, sowie die **hyperbolischen Funktionen** sinh, cosh, tanh, coth und ihre Umkehrfunktionen. (Auch die Graphen dieser Funktionen!)

- Die **Exponentialfunktion** $e^x = \exp[x]$ und der **Logarithmus** $\ln[x]$. (Auch die Graphen dieser Funktionen!)

- Die **Stetigkeit** einer Funktion.
- Die **Ableitung** einer Funktion, ihre Interpretation als Steigung der Tangente, Anwendung auf Minimierungs- und Maximierungsaufgaben, Kurvendiskussion.
- Das **Integral** einer Funktion, seine Interpretation als Fläche unter der Kurve, den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

In der Vorlesung *Analysis I* werden viele dieser Begriffe -etwa die Differenzial- und Integralrechnung-neu und gründlich aufgebaut. Man sollte sich aber nicht darüber hinweg täuschen, dass dieser Aufbau ohne ein Grundverständnis dieser Dinge misslingt.

Kapitel I

Grundlagen, Konventionen und Notationen

Dieses Kapitel stellt eine Übersicht über in der Mathematik häufig gebrauchte Begriffe, Konventionen und Notationen dar. Der Inhalt dieses Kapitels wird den Leser(inne)n größtenteils aus dem Schulunterricht geläufig sein. Die wenigen neu hinzukommenden Begriffe sind so leicht zu lernen, dass wir[1] es den Leser(inne)n überlassen, sich im Laufe der ersten Woche diese anzueignen. In der Vorlesung *Analysis I* werden wir dieses Kapitel überspringen und sein Inhalt ohne weitere Erklärung benutzen.

I.1 Quantoren und Logik

- Das Zeichen = bedeutet Gleichheit und ist in seiner Bedeutung evident. Das Zeichen := bedeutet, dass die linke Seite durch die rechte definiert wird (in Analogie zur Programmiersprache Pascal), das Zeichen =: bedeutet, dass die linke Seite durch die rechte (im Sinn einer Namensgebung) abgekürzt wird.

  Beispiel:

  $$a \ := \ f(0), \quad f(1) \ =: \ b. \tag{I.1}$$

  bedeutet

  $$\textit{a wird als Wert der Funktion } f \textit{ bei } 0 \textit{ definiert, der Wert der Funktion } f \textit{ bei } 1 \textit{ wird hingegen mit } b \textit{ bezeichnet.} \tag{I.2}$$

- Das Zeichen $\forall$ bedeutet **für alle** (umgedrehtes A wie Alle).

  Beispiel:

  $$\forall\, x, y > 0 : \quad x \cdot y > 0 \tag{I.3}$$

  bedeutet

  $$\textit{Für alle } x > 0 \textit{ und } y > 0 \textit{ gilt } x \cdot y > 0. \tag{I.4}$$

[1] In mathematischen Texten wird meistens die 1. Person Plural verwendet – selbst wenn es sich nur um einen Autor handelt.

- Das Zeichen $\exists$ bedeutet **es existiert** (umgedrehtes E wie Existiert).

  Beispiel:

  $$\forall\, x > 0 \;\exists\, y < 0 : \quad x + y \;=\; 0 \tag{I.5}$$

  bedeutet

  Für jedes x größer Null existiert ein y kleiner Null, so dass $x + y = 0$ gilt. (Das gesuchte y ist natürlich $-x$.) (I.6)

- Man beachte, dass Quantoren im Allgemeinen nicht vertauscht werden dürfen. Dazu betrachten wir folgende Beispiele:

  $$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\exists\, m \in \mathbb{N} : \quad m > n$$

  bedeutet

  Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m, so dass m größer ist als n. (Diese Aussage ist wahr). (I.7)

  $$\exists\, m \in \mathbb{N} \;\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad m > n$$

  bedeutet

  Es gibt eine natürliche Zahl m, so dass alle natürlichen Zahlen n kleiner sind als m. (Diese Aussage ist falsch). (I.8)

- Das Zeichen $\Rightarrow$ bedeutet **impliziert**.

  Beispiel:

  $$A \;\Rightarrow\; B \tag{I.9}$$

  bedeutet

  Aussage A impliziert Aussage B, d.h.: Ist A wahr, so ist auch B wahr. (I.10)

- Eine Aussage A im mathematischen Sinn kann ein Satz, eine Bedingung oder auch eine Behauptung sein. In jedem Fall ist sie aber wahr oder falsch, $A \in \{w, f\}$.

  Beispiel:

  $$A \;:=\; \textit{Es regnet.}\,, \quad B \;:=\; \textit{Die Erde wird nass.} \tag{I.11}$$

  Dann gilt die Implikation $A \Rightarrow B$, was gelesen werden muss als

  $$(A = w) \quad \Rightarrow \quad (B = w).$$

  Dieses Beispiel wirkt etwas künstlich. Darum geben wir ein weiteres Beispiel, in dem die Aussagen von Platzhaltern abhängen:

  $$A(x) := \begin{cases} w, \text{ falls } x \geq 5, \\ f, \text{ falls } x < 5, \end{cases} \quad B(y) := \begin{cases} w, \text{ falls } y \geq 7, \\ f, \text{ falls } y < 7, \end{cases} \quad C(z) := \begin{cases} w, \text{ falls } z \geq 33, \\ f, \text{ falls } z < 33, \end{cases}$$

dann gilt die folgende Implikation (s. (I.18)–(I.19)):
$$A(x) \wedge B(y) \;\Rightarrow\; C(x \cdot y). \tag{I.12}$$

- Das Zeichen $\Longleftrightarrow$ bedeutet **ist gleichwertig mit** oder **ist äquivalent zu**.

  Beispiel:

$$A \iff B \tag{I.13}$$

bedeutet

A ist genau dann wahr, wenn B wahr ist. (I.14)

- Das Zeichen $\vee$ ist ein logisches **oder**, d.h.

$$A \;\vee\; B \tag{I.15}$$

ist wahr, falls A oder B oder beide wahr sind und falsch, falls A und (gleichzeitig auch) B falsch sind. (I.16)

  Beispiel:

$$\{\, x \cdot y = 0 \,\} \quad \iff \quad \big\{\, (x = 0) \;\vee\; (y = 0) \,\big\}. \tag{I.17}$$

- Das Zeichen $\wedge$ ist ein logisches **und**, d.h.

$$A \;\wedge\; B \tag{I.18}$$

ist wahr, falls A und (gleichzeitig auch) B wahr sind und sonst falsch. (I.19)

  Beispiel 1:

$$\big\{\, (x = 0) \;\wedge\; (y = 0) \,\big\} \quad \Rightarrow \quad \{\, x + y = 0 \,\}. \tag{I.20}$$

  Beispiel 2:

$$A \iff B \quad \text{ist gleichwertig mit} \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \tag{I.21}$$

d.h. (um die Verwirrung komplett zu machen)

$$\Big(A \iff B\Big) \quad \iff \quad \Big[\big(A \Rightarrow B\big) \wedge \big(B \Rightarrow A\big)\Big]. \tag{I.22}$$

- Die logische **Negation** wird mit $\neg$ bezeichnet, also

$$\neg\, A \tag{I.23}$$

ist wahr, falls A falsch ist und falsch, falls A wahr ist. (I.24)

- Eine wichtige Beobachtung ist, dass

$$(A \Rightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A). \tag{I.25}$$

Dies versteht man intuitiv sofort an folgendem Beispiel:

Es regnet. $\Rightarrow$ *Die Erde wird nass.*

ist gleichwertig mit

Die Erde ist nicht nass. $\Rightarrow$ *Es regnet nicht.* (I.26)

- Für logische Verknüpfungen gelten

das Kommutativgesetz: (I.27)

$$\begin{aligned} A \vee B &= B \vee A, \\ A \wedge B &= B \wedge A, \end{aligned}$$

das Assoziativgesetz: (I.28)

$$\begin{aligned} A \vee \big(B \vee C\big) &= \big(A \vee B\big) \vee C, \\ A \wedge \big(B \wedge C\big) &= \big(A \wedge B\big) \wedge C, \end{aligned}$$

das Distributivgesetz: (I.29)

$$\begin{aligned} A \vee \big(B \wedge C\big) &= \big(A \vee B\big) \wedge \big(A \vee C\big), \\ A \wedge \big(B \vee C\big) &= \big(A \wedge B\big) \vee \big(A \wedge C\big). \end{aligned}$$

sowie: (I.30)

$$\begin{aligned} \neg\,(A \,\vee\, B) &= \neg A \,\wedge\, \neg B, \\ \neg\,(A \,\wedge\, B) &= \neg A \,\vee\, \neg B. \end{aligned}$$

I.2 Mengen

Mengen sind (endliche, abzählbare oder sogar überabzählbare) Sammlungen mathematischer Objekte.

- $\{1, 5, 9\}$ ist die Menge, die die Zahlen 1,5 und 9 enthält,
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ enthält alle natürlichen Zahlen, die kleiner als 5 sind (also $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$).
- Jedes Element einer Menge wird nur einmal aufgeführt, beispielsweise ist $\{1, 5, 9, 9, 5\} = \{1, 5, 9\}$.
- $x \in M$ heißt x **ist Element der Menge** M.
- $x \notin M$ heißt x **ist nicht in der Menge** M **enthalten**.

- Die **Anzahl der Elemente** einer Menge M wird mit $\#[M]$ oder auch $|M|$ bezeichnet. Beispielsweise ist $\#\big[\{1,5,9\}\big] \ = \ 3$.

- $A \subseteq B$ bedeutet, dass die Menge A in der Menge B enthalten ist, also dass A **Teilmenge** von B ist. Umgekehrt heißt $A \supseteq B$, dass die Menge A die Menge B enthält:
$$\big(A \subseteq B\big) \iff \big(B \supseteq A\big) \iff (x \in A \Rightarrow x \in B). \tag{I.31}$$

- $\emptyset = \{\ \}$ ist die leere Menge, die kein Element enthält.

- Gleichheit von Mengen bedeutet elementweise Übereinstimmung,
$$\big(A = B\big) \iff \big(x \in A \Longleftrightarrow x \in B\big). \tag{I.32}$$

- $\{x \mid E(x)\}$ und $\{x\}_{E(x)}$ bezeichnen die *Menge aller x, die die Eigenschaft $E(x)$ besitzen.*

  Beispiel:
$$\{n \mid \exists\, k \in \mathbb{N}: \ n = 2k-1\} \tag{I.33}$$
  ist
$$\text{\textit{die Menge aller n, für die es eine natürliche Zahl k gibt, so dass} } n = 2k-1 \text{ (also die Menge aller ungeraden Zahlen).} \tag{I.34}$$
  Die Eigenschaft $E(x)$ kann auch durch eine **Indexmenge** $\mathcal{I}$ charakterisiert sein. Beispiel: Mit $\mathcal{I} := \{1,3,5,7\}$ ist
$$\{x_i \mid i \in \mathcal{I}\} \ = \ \{x_i\}_{i\in\mathcal{I}} \ = \ \{x_1, x_3, x_5, x_7\}. \tag{I.35}$$

- Haben wir mehrere Mengen, etwa A_1, A_2 und A_3, so bildet $M = \{A_1, A_2, A_3\}$ wieder eine Menge – eine Menge von Mengen. Dies kann man so fortsetzen und kommt zu Mengen von Mengen von Mengen u.s.w. Der Übersichtlichkeit halber hat sich deshalb im Sprachgebrauch bewährt, die übergeordnete Menge M als **Familie, System, Kollektion** oder auch **Klasse** zu bezeichnen. Somit ist M *die Familie der Mengen A_1, A_2 und A_3.*

- Die Familie aller Teilmengen einer Menge M bezeichnet man als ihre **Potenzmenge** $\mathfrak{P}(\mathbf{M})$. Dabei zählen auch die leere Menge $\emptyset$ und M selbst als Teilmenge von M. Für $\#[M] < \infty$ ist $\#[\mathfrak{P}(M)] = 2^{\#\{M\}}$. (Warum?)
  Beispiel:
$$M := \{1,2,3\} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{P}(M) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\big\}. \tag{I.36}$$

- Die **Vereinigung**, der **Durchschnitt** und die **Differenz** zweier Mengen A, B werden wie folgt bezeichnet:
$$\text{Vereinigung:} \qquad A \cup B \ = \ \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}, \tag{I.37}$$
$$\text{Durchschnitt:} \qquad A \cap B \ = \ \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}, \tag{I.38}$$
$$\text{Differenz:} \qquad A \setminus B \ = \ \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}. \tag{I.39}$$

- Ist A eine Teilmenge einer **Obermenge** M, d.h. $A \subseteq M$, so bezeichnet

$$A^c := M \setminus A \tag{I.40}$$

das Komplement von A bezüglich M. (Vorsicht, der Notation A^c für das Komplement sieht man die Grundmenge M, auf die sie sich bezieht nicht mehr an!)

Beispiel: Seien $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $M = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Dann sind

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad A \cap B = \{3\}, \tag{I.41}$$

$$A \setminus B = \{1, 2\}, \qquad A^c = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}. \tag{I.42}$$

- Vereinigungen und Durchschnitte können auch über Familien $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ von Mengen A_i gebildet werden, wobei i eine Indexmenge $\mathcal{I}$ durchläuft.

Beispiel:

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \mid \exists\, i \in \mathcal{I} :\ x \in A_i\}, \tag{I.43}$$

ist

die Vereinigung der Mengen A_i, d.h. die x, die in (mindestens) einer Menge A_i mit $i \in \mathcal{I}$ enthalten sind; (I.44)

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \mid \forall\, i \in \mathcal{I} :\ x \in A_i\}, \tag{I.45}$$

ist

der Durchschnitt der Mengen A_i, d.h. die x, die in allen Mengen A_i mit $i \in \mathcal{I}$ enthalten sind. (I.46)

- Für Vereinigung, Durchschnitt und Komplementbildung von Mengen gelten Kommutativ-, Assoziativ-, und Distributionsgesetze, analog zu den entsprechenden Gesetzen für die logischen Verknüpfungen $\vee$, $\wedge$ und $\neg$.

- Sind A und B zwei nichtleere Mengen, so bezeichnet

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A\ ,\ b \in B\} \tag{I.47}$$

das kartesische Produkt von A und B, d.h. die Menge aller Paare (a, b), die sich mit Elementen a aus A und b aus B bilden lässt. (I.48)

Allgemeiner ist

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1,\ \ldots,\ a_n \in A_n\} \tag{I.49}$$

das (n-fache) kartesische Produkt der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, d.h. die Menge aller *n-Tupel* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, die sich mit Elementen a_i aus A_i, für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bilden lässt. (I.50)

Vorsicht! Oft wird $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ mit $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ verwechselt. Der Unterschied wird aber schon deutlich, wenn man die Zahl der Elemente für $A := A_1 = A_2$ betrachtet:

$$\#\big[A \times A\big] = \big(\#[A]\big)^2, \tag{I.51}$$

$$\#\big[A \cup A\big] = \#[A]. \tag{I.52}$$

- Sind $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Zahlen, so bezeichnen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als **Zahlenfolge**. Man beachte auch hier den Unterschied zwischen dem Tupel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Menge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. So ist beispielsweise für die Zahlenfolge $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$, die konstant gleich eins ist,

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;=\; (1, 1, 1, \ldots), \tag{I.53}$$

aber

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;=\; \{1, 1, 1, \ldots\} \;=\; \{1\}. \tag{I.54}$$

- Häufig wiederkehrende Mengen haben in der Mathematik eine eigene Bezeichnung bekommen. Wir listen die Symbole für die wichtigsten Zahlenmengen auf:

$$\text{die } \textbf{natürlichen Zahlen:} \quad \mathbb{N} \;:=\; \{1, 2, 3, \ldots\}, \tag{I.55}$$

$$\text{die } \textbf{natürlichen Zahlen mit Null:} \quad \mathbb{N}_0 \;:=\; \{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \tag{I.56}$$

$$\text{die } \textbf{ganzen Zahlen:} \quad \mathbb{Z} \;:=\; \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}, \tag{I.57}$$

$$\text{die } \textbf{rationalen Zahlen:} \quad \mathbb{Q} \;:=\; \Big\{ \frac{p}{q} \;\Big|\; p \in \mathbb{Z},\; q \in \mathbb{N} \Big\}, \tag{I.58}$$

$$\text{die } \textbf{reellen Zahlen:} \quad \mathbb{R} \tag{I.59}$$

$$\text{die } \textbf{komplexen Zahlen:} \quad \mathbb{C} \tag{I.60}$$

Die präzise Definition der reellen oder gar der komplexen Zahlen geht über den üblichen Schulstoff hinaus. Wir werden dies in den kommenden Wochen in der Vorlesung behandeln.

- Weiterhin führen wir für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ noch die Bezeichnung

$$\mathbb{Z}_m^n \;:=\; \{m, m+1, m+2, \ldots, n\} \tag{I.61}$$

für die natürlichen Zahlen zwischen m und n ein.

I.3 Ordnungsrelationen

Die Zeichen $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ haben wir in verschiedenen Beispielen in den vorigen Abschnitten wie selbstverständlich benutzt.

- $a \leq b$ heißt **a ist kleiner als oder gleich b**.

- $a \geq b$ heißt **a ist größer als oder gleich b**.
- $a < b$ heißt **a ist kleiner als b**. Zur Unterscheidung dieser Relation von $a \leq b$ sagt man auch **a ist echt kleiner als b** oder **a ist strikt kleiner als b**.
- $a > b$ heißt **a ist (echt, strikt) größer als b**.
- Offenbar gilt

$$a < b \iff b > a, \tag{I.62}$$

$$a \leq b \iff (a < b) \vee (a = b), \tag{I.63}$$

$$a \geq b \iff (a > b) \vee (a = b). \tag{I.64}$$

Die Ordnungsrelation $<$ lässt sich aber auch auf andere Mengen, als den uns vertrauten Zahlen übertragen. Deshalb ist es zweckmäßig, den Begriff einer geordneten Menge präzise zu definieren.

Definition I.1. Eine Menge $S \neq \emptyset$ heißt **(total) geordnet** bezüglich “$<$” $:\Leftrightarrow$

(i) Sind $a, b \in S$, so gilt genau eine der drei Relationen $a < b$, $a = b$ oder $a > b$. (I.65)

(ii) Sind $a, b, c \in S$, und gilt $a < b$ und $b < c$, dann gilt auch $a < c$. (I.66)

Das Symbol “$<$” heißt **Ordnungsrelation** auf S.

Beispiele für total geordnete Mengen sind $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Auf den komplexen Zahlen gibt es keine (mit den Verknüpfungen verträgliche) Ordnungsrelation. Ebenso gibt es keine (mit den Verknüpfungen verträgliche) Ordnungsrelation auf den Vektoren in $\mathbb{R}^3$.
Mit Hilfe der Ordnungsrelation kann man **Intervalle** in $\mathbb{R}$ definieren. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$. Dann heißen

$$(a\,,\ b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \tag{I.67}$$

das **offene Intervall** von a nach b,

$$[a\,,\ b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \tag{I.68}$$

das **abgeschlossene Intervall** von a nach b,

$$[a\,,\ b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \tag{I.69}$$

das **rechts halboffene Intervall** von a nach b,

$$(a\,,\ b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \tag{I.70}$$

das **links halboffene Intervall** von a nach b

und insbesondere

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \qquad \mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}, \tag{I.71}$$

$$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \qquad \mathbb{R}_0^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}. \tag{I.72}$$

I.4 Funktionen

Funktionen, auch **Abbildungen** genannt, sind die wichtigsten Objekte der Mathematik. Eine Funktion f ordnet jedem Element x seiner **Definitionsmenge** $\mathcal{D}$ genau ein Element $f(x)$ seiner **Wertemenge** $\mathcal{W}$ zu. Die symbolische Schreibweise dafür ist

$$f \;:\; \mathcal{D} \to \mathcal{W}, \quad x \mapsto f(x). \tag{I.73}$$

Dabei ist die Definitionsmenge zwar voll ausgeschöpft, denn $f(x)$ ist für jedes $x \in \mathcal{D}$ definiert. Für die Wertemenge muss das aber nicht der Fall sein. Sind $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ und $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ Teilmengen von $\mathcal{D}$ bzw. $\mathcal{W}$, so bezeichnen wir mit

$$f(\mathcal{D}') \;:=\; \big\{ f(x) \in \mathcal{W} \;\big|\; x \in \mathcal{D}' \big\} \tag{I.74}$$

die **Bildmenge** (oder das Bild) von $\mathcal{D}'$ und

$$f^{-1}(\mathcal{W}') \;:=\; \big\{ x \in \mathcal{D} \;\big|\; f(x) \in \mathcal{W}' \big\} \tag{I.75}$$

die **Urbildmenge** (oder das Urbild) von $\mathcal{W}'$.

Es kann also $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{W}$ durchaus eine *echte* Teilmenge des Wertebereichs sein. (Wir sollten hier aber erwähnen, dass diese Konvention nicht einheitlich akzeptiert ist. Manche Autoren verlangen, dass für $f : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ auch stets $f(\mathcal{D}) = \mathcal{W}$ gilt, andere fordern noch nicht einmal, dass $f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{D}$.)

Definition I.2. Seien $\mathcal{D}, \mathcal{W} \neq \emptyset$ und $f : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ eine Abbildung.

$$f \text{ heißt } \textbf{surjektiv} \quad :\Leftrightarrow \quad f(\mathcal{D}) \;=\; \mathcal{W}, \tag{I.76}$$

$$f \text{ heißt } \textbf{injektiv} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, x, x' \in \mathcal{D} : \; \big(f(x) = f(x') \big) \;\Rightarrow\; \big(x = x' \big), \tag{I.77}$$

$$f \text{ heißt } \textbf{bijektiv} \quad :\Leftrightarrow \quad f \text{ ist surjektiv und injektiv.} \tag{I.78}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$ ist nicht surjektiv, (wegen $e^x > 0$) aber injektiv (wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion).
- $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin x$ ist surjektiv aber nicht injektiv.
- $\tan : (-\pi/2\,,\ \pi/2) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan x$ ist bijektiv.

Definition I.3. Für $g : A \to B$ und $f : g(A) \to C$ ist die **Verkettung** oder **Komposition** oder auch **Hintereinanderschaltung** $f \circ g$ von g und f wie folgt definiert:

$$f \circ g \;:\; A \to C, \quad x \mapsto f\big(g(x)\big). \tag{I.79}$$

Satz I.4. *Seien $g : A \to B$ und $f : B \to C$.*

(i) Sind f und g surjektiv, so ist auch $f \circ g : A \to C$ surjektiv.

(ii) Sind f und g injektiv, so ist auch $f \circ g : A \to C$ injektiv.

(iii) Sind f und g bijektiv, so ist auch $f \circ g : A \to C$ bijektiv.

Beweis.
Zu (i): Sei $c \in C$. Weil f surjektiv ist, gibt es ein $b \in B$ mit $f(b) = c$. Weil g surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $g(a) = b$. Also gilt $(f \circ g)(a) = c$.

Zu (ii): Seien $a, a' \in A$ mit $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(a')$. Weil f injektiv ist, folgt $g(a) = g(a')$. Weil g injektiv ist, folgt dann auch $a = a'$.

Zu (iii): Folgt aus (i) und (ii). □

Wichtig ist also zu beachten, dass der Definitionsbereich von f mit dem Bildbereich von g übereinstimmt. Man beachte auch die Reihenfolge: obwohl die Komposition $f \circ g$ heißt, wird erst g auf $x \in A$ angewandt und danach f auf das Ergebnis $g(x) \in B$.
Eine wichtige Klasse von Funktionen ist die der charakteristischen Funktionen, auch Indikatorfunktionen genannt. Ist $\mathcal{D}$ eine nichtleere Menge und $A \subseteq \mathcal{D}$ eine Teilmenge, so ist die **charakteristische Funktion** von A gegeben als

$$\mathbb{1}_A : \mathcal{D} \to \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases} \tag{I.80}$$

Mit anderen Worten: $\mathbb{1}_A[x]$ ist genau dann gleich 1, wenn x in A liegt und anderenfalls gleich 0.

I.5 Beweistechniken

I.5.1 Vollständige Induktion

Eine häufig verwendete Beweistechnik ist die **vollständige Induktion**. Zunächst stellen wir das Verfahren abstrakt vor. Nehmen wir an, wir wollten Aussagen $A(1), A(2), A(3), \ldots$ beweisen. Dann können wir folgende Tatsache verwenden.

Satz I.5. *Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $A(n_0)$ wahr ist, und gilt die Implikation*

$$A(n) \quad \Rightarrow \quad A(n+1), \tag{I.81}$$

für jedes $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $A(m)$ wahr, für jedes $m \geq n_0$, $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wendet man (I.81) $(m - n_0)$-mal an, so erhält man

$$A(n_0) \Rightarrow A(n_0 + 1) \Rightarrow A(n_0 + 2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow A(m-1) \Rightarrow A(m). \tag{I.82}$$

□

Der Beweis durch vollständige Induktion wird an einem Beispiel am deutlichsten. Wir wollen für $n \in \mathbb{N}$ die Summe

$$F(n) := 1 + 2 + \cdots + n \tag{I.83}$$

berechnen, und wir haben die Vermutung, dass $F(n) = G(n)$, wobei

$$G(n) := \frac{n(n+1)}{2}. \tag{I.84}$$

Nun gilt es, die Aussage

$$A(n) \;=\; w \quad :\Leftrightarrow \quad F(n) = G(n) \tag{I.85}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen.

- **Induktionsanfang**: Wähle $n_0 := 1$. Dann ist

$$F(n_0) \;=\; F(1) \;=\; 1 \;=\; \frac{1(1+1)}{2} \;=\; G(1) \;=\; G(n_0), \tag{I.86}$$

  und $A(n_0) = A(1) = w$.

- **Induktionsannahme**: Seien $n \geq 1$ und gelte $A(n) = w$, also $F(n) = G(n)$.

- **Induktionsschritt**: Wir zeigen, dass aus $A(n) = w$ auch $A(n+1) = w$ folgt. Dazu beobachten wir, dass unter Verwendung von $F(n) = G(n)$ auch

$$\begin{aligned} F(n+1) \; &= n+1+F(n) \;=\; n+1+G(n) \;=\; n+1+\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \;=\; G(n+1) \end{aligned} \tag{I.87}$$

  gilt, dass somit also $A(n+1) = w$ richtig ist.

Nach Satz I.5 ist damit $A(n) = w$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

I.5.2 Beweis durch Widerspruch

Neben der vollständigen Induktion ist auch der Widerspruchsbeweis eine häufig verwendete Methode, die auf (I.25) beruht,

$$(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\neg\, B \Rightarrow \neg\, A).) \tag{I.88}$$

Wir illustrieren dies wieder mit einem Beispiel:

$$A \;=\; w \;:\Leftrightarrow \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{Q}. \tag{I.89}$$

Dann gibt es $p, q \in \mathbb{N}$, teilerfremd, so dass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, also wäre

$$B \;=\; w \;:\Leftrightarrow \qquad 2q^2 \;=\; p^2. \tag{I.90}$$

Dies ist aber unmöglich (ergibt einen Widerspruch), weil der Primfaktor 2 in $2q^2$ in ungerader Anzahl und in p^2 in gerader Anzahl auftreten müsste.
Also ist $\{B = f\} \Rightarrow \{\neg\, B = w\} \Rightarrow \{\neg\, A = w\}$, d.h.

$$\sqrt{2} \;\notin\; \mathbb{Q}. \tag{I.91}$$

I.6 Notationen

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und

$$A = \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n\} \tag{I.92}$$

eine Menge von Zahlen. Dann ist das Summenzeichen wie folgt definiert,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n. \tag{I.93}$$

Wir bemerken, dass der *Summationsindex* i durch irgend einen anderen Buchstaben außer m oder n ersetzt werden kann,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j. \tag{I.94}$$

Für $m > n$ wird $\sum_{i=m}^{n} a_i := 0$ definiert.
Mit $\mathcal{I} := \{m, m+1, \ldots, n\}$ und A wird die Summe auch oft noch anders geschrieben:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i = \sum_{a \in A} a. \tag{I.95}$$

I.7 Ergänzungen

I.7.1 Äquivalenzrelationen

Häufig lässt sich eine Menge in eine Familie disjunkter Teilmengen zerlegen, deren Elemente jeweils ähnliche Eigenschaften haben. Beispiel:
Wir zerlegen $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$, wobei

$$A_0 := 3\mathbb{Z} \;=\; \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \tag{I.96}$$

$$A_1 := 3\mathbb{Z} + 1 \;=\; \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \tag{I.97}$$

$$A_2 := 3\mathbb{Z} + 2 \;=\; \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}. \tag{I.98}$$

Offensichtlich sind $A_0 \cap A_1 = A_1 \cap A_2 = A_0 \cap A_2 = \emptyset$. Die Elemente in A_j $(j = 0, 1, 2)$ lassen sich dadurch charakterisieren, dass sie einen Rest j beim Teilen durch 3 ergeben.
Wir formalisieren nun diese Überlegungen.

Definition I.6. Sei A eine Menge. Eine Abbildung $R : A \times A \to \{w, f\}$ heißt **Relation auf A**. Für $R(a, b) = w$ schreiben wir auch $\mathbf{a \sim b}$.

Definition I.7. Eine Relation $R : A \times A \to \{w, f\}$ auf einer Menge A, mit $R(a, b) = w \Leftrightarrow: a \sim b$ heißt **Äquivalenzrelation**, falls folgende drei Eigenschaften gelten:

$$\textbf{Reflexivität} \quad \forall\, a \in A : \qquad a \sim a, \tag{I.99}$$

$$\textbf{Symmetrie} \quad \forall\, a, b \in A : \qquad a \sim b \Leftrightarrow b \sim a, \tag{I.100}$$

$$\textbf{Transitivität} \quad \forall\, a, b, c \in A : \qquad (a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow (a \sim c). \tag{I.101}$$

Satz I.8. *Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A bewirkt eine Zerlegung von A in disjunkte Teilmengen. Dabei sind zwei Elemente aus A genau dann äquivalent, wenn sie derselben Teilmenge angehören.*

Beweis. Zu $a \in A$ definieren wir

$$[a]_\sim := \{x \in A \mid a \sim x\}. \tag{I.102}$$

Wegen $a \in [a]_\sim$ ist $[a]_\sim$ nicht leer. Wir zeigen nun für $a, b \in A$, dass

$$\text{entweder} \quad [a]_\sim \;\cap\; [b]_\sim \;=\; \emptyset \tag{I.103}$$

$$\text{oder} \qquad [a]_\sim \;=\; [b]_\sim \tag{I.104}$$

gilt. (Wegen $[a]_\sim \neq \emptyset$ können (I.103) und (I.104) nicht gleichzeitig gelten.)
Sei $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$. Dann gibt es also ein gemeinsames Element $c \in [a]_\sim$, $c \in [b]_\sim$. Damit gelten $a \sim c$ und $c \sim b$, also auch $a \sim b$. Ist nun $x \in [a]_\sim$, dann gilt $x \sim a$ und mit $a \sim b$ auch $x \sim b$, also $x \in [b]_\sim$. Es folgt, dass $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$. Genauso erhält man $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$, also $[a]_\sim = [b]_\sim$. Damit ist (I.103)–(I.104) gezeigt.
Schreiben wir jetzt

$$A \;=\; \bigcup_{a \in A} [a]_\sim, \tag{I.105}$$

folgt die Aussage unmittelbar durch Zusammenfassen gleicher $[a]_\sim$. □

Definition I.9. Die Teilmengen $[a]_\sim$ heißen **Äquivalenzklassen**. Die Familie der Äquivalenzklassen bezeichnet man mit

$$A/\sim \quad \text{(sprich: '' } A \text{ modulo } \sim \text{'')}. \tag{I.106}$$

Liegt a in einer Äquivalenzklasse, so heißt a **Repräsentant der Klasse**.

Bemerkungen und Beispiele. Sind $A := \mathbb{Z}$ die ganzen Zahlen und $p \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so sind

$$m \sim n \;:\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z}: \quad m - n \;=\; kp. \tag{I.107}$$

$$\Rightarrow\; \mathbb{Z} \;=\; [0]_\sim \cup [1]_\sim \cup \ldots \cup [p-1]_\sim, \tag{I.108}$$

$$[j]_\sim \;=\; \{kp + j \mid k \in \mathbb{Z}\}. \tag{I.109}$$

$\mathbb{Z}/\sim$ bezeichnet man auch mit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}_p$ und $[j]_\sim =: [j]_{\bmod p}$.

Definition I.10. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A. Eine Teilmenge $S \subseteq A$ heißt ein **vollständiges Repräsentantensystem zu** $\sim$, falls folgende zwei Eigenschaften gelten:

(i) Jedes Element aus A ist zu einem Element aus S äquivalent.

(ii) Die Elemente aus S sind paarweise nicht äquivalent.

Bemerkungen und Beispiele.

$$A \;:=\; \big\{ g \subseteq \mathbb{R}^2 \;\big|\; g \text{ ist eine Gerade} \big\}, \tag{I.110}$$

$$g_1 \sim g_2 :\Leftrightarrow\; g_1 \text{ und } g_2 \text{ sind parallel.}$$

$$\Rightarrow\; S \;=\; \big\{ g \in A \;\big|\; g \cap \{\vec{0}\} = \{\vec{0}\} \big\} \tag{I.111}$$

$$\text{ist ein vollständiges Repräsentantensystem.} \tag{I.112}$$

I.7.2 Das griechische Alphabet

Das griechische Alphabet wird in der Mathematik häufig verwendet. Zum Abschluss geben wir noch eine Liste der gebräuchlichsten griechischen Buchstaben:

					KLEIN				
α	alpha	β	beta	γ	gamma	δ	delta	ϵ	epsilon
ε	epsilon	ζ	zeta	η	eta	θ	theta	ϑ	theta
ι	jota	κ	kappa	λ	lambda	μ	mü	ν	nü
ξ	xi	o	o	π	pi	φ	phi	ρ	rho
ϱ	rho	σ	sigma	ς	sigma	τ	tau	υ	upsilon
ϕ	phi	φ	phi	χ	chi	ψ	psi	ω	omega

					GROSS				
Γ	Gamma	Δ	Delta	Θ	Theta	Λ	Lambda	Ξ	Xi
Π	Pi	Σ	Sigma	Υ	Upsilon	Φ	Phi	Ψ	Psi
Ω	Omega								

Kapitel II

Gruppen, Ringe und Körper

Im vorigen Kapitel I haben wir die wichtigsten Zahlenmengen bereits genannt:
die *natürlichen* Zahlen,

$$\mathbb{N} \; := \; \{1, 2, 3, \ldots\}, \tag{II.1}$$

die *ganzen* Zahlen,

$$\mathbb{Z} \; := \; \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\}, \tag{II.2}$$

die *rationalen* Zahlen,

$$\mathbb{Q} \; := \; \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}, \tag{II.3}$$

sowie die *reellen* und die *komplexen* Zahlen,

$$\mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}. \tag{II.4}$$

Wir wenden uns zunächst $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ zu. Für $a, b \in \mathbb{N}$ ist auch $a + b \in \mathbb{N}$. Diese Tatsache bezeichnet man als *Abgeschlossenheit* von $\mathbb{N}$ bezüglich Addition.

I.A. gilt $a - b \in \mathbb{N}$ jedoch nicht. Dafür geht man von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ über; für $a, b \in \mathbb{Z}$ sind $a + b$ und $a - b \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist 0 das *neutrale Element* bezüglich Addition in $\mathbb{Z}$: $a + 0 = 0 + a = a$. Man sagt, dass $\mathbb{Z}$ bezüglich der Addition $+$ eine *Gruppe* bildet.

Weiterhin ist $\mathbb{Z}$ auch bezüglich Multiplikation abgeschlossen, d.h. für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist auch $a \cdot b \in \mathbb{Z}$, und es gilt das Distributivgesetz, $a(b + c) = ab + bc$. Somit ist $\mathbb{Z}$ bezüglich der Addition $+$ und der Multiplikation $(\cdot)$ ein *Ring*.

Schließlich gelangt man von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ durch die Forderung, dass auch Abgeschlossenheit bezüglich Division gelten soll: Für $a, b \in \mathbb{Q}$ sind $a + b, a - b, a \cdot b \in \mathbb{Q}$ und $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, falls $b \neq 0$. Diese Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ stehen auch exemplarisch für die allgemeine Definition eines *Körpers.*

II.1 Gruppen

Definition II.1. Eine Menge G heißt **Gruppe** :$\Leftrightarrow$
Auf G ist eine Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ definiert, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$
\begin{aligned}
&(G_1) \quad \forall\, a,b,c \in G: && (a \circ b) \circ c \;=\; a \circ (b \circ c), && \text{(II.5)}\\
&(G_2) \quad \exists\, e \in G\, \forall\, a \in G: && a \circ e \;=\; e \circ a \;=\; a, && \text{(II.6)}\\
&(G_3) \quad \forall\, a \in G\, \exists\, a^{-1} \in G: && a \circ a^{-1} \;=\; a^{-1} \circ a \;=\; e. && \text{(II.7)}
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnet man (G_1) als **Assoziativität**, e als das **neutrale Element** und a^{-1} als das **zu a inverse Element**. Die Anzahl $\#[G]$ der Elemente in G bezeichnet man als **Ordnung von G**.
Gilt außerdem noch

$$(G_4) \quad \forall\, a,b \in G: \quad a \circ b \;=\; b \circ a \quad \text{(Kommutativität)}, \tag{II.8}$$

so nennt man G **kommutativ** oder **abelsch**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Für abelsche Gruppen G schreibt man die Verknüpfung "$\circ$" häufig als Addition $+ : G \times G \to G$, und die Eigenschaften (G_1)–(G_4) nehmen folgende, uns aus der Schulmathematik sehr vertraute Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{G}_1) \quad \forall\, a,b,c \in G: && (a + b) + c \;=\; a + (b + c), && \text{(II.9)}\\
&(\widetilde{G}_2) \quad \exists\, 0 \in G\, \forall\, a \in G: && a + 0 \;=\; 0 + a \;=\; a, && \text{(II.10)}\\
&(\widetilde{G}_3) \quad \forall\, a \in G\, \exists\, -a \in G: && a + (-a) \;=\; (-a) + a \;=\; 0, && \text{(II.11)}\\
&(\widetilde{G}_4) \quad \forall\, a,b \in G: && a + b \;=\; b + a. && \text{(II.12)}
\end{aligned}
$$

- Die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen ist bezüglich der Addition keine Gruppe, da weder das neutrale Element der Addition 0 noch das zu einer gegebenen natürlichen Zahl n additiv inverse Element $-n$ in $\mathbb{N}$ liegt.

- Die Menge $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ der ganzen Zahlen ist bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe mit 0 als neutralem Element und $k^{-1} = -k$ als zu $k \in \mathbb{Z}$ inversem Element.

- Die Menge $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ der rationalen Zahlen ohne Null ist bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe mit 1 als neutralem Element und $q^{-1} = 1/q$ als zu $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ inversem Element.

- Die Assoziativität erlaubt es uns, Klammern bei der Gruppenverknüpfung einfach weglassen oder bei Bedarf einzufügen,

$$(a \circ b) \circ c \;=\; a \circ (b \circ c) \;=:\; a \circ b \circ c. \tag{II.13}$$

- Das neutrale Element e einer Gruppe ist eindeutig. Ist nämlich e' irgendein (möglicherweise von e verschiedenes) Element von G, das die Eigenschaft (G_2) besitzt, so folgt $e' = e \circ e' = e$.

- Sind G eine Gruppe, $a \in G$ und $b \in G$ ein (möglicherweise von a^{-1} verschiedenes) zu a inverses Element, also $a \circ b = b \circ a = e$, so folgt dass

$$b \;=\; e \circ b \;=\; (a^{-1} \circ a) \circ b \;=\; a^{-1} \circ (a \circ b) \;=\; a^{-1} \circ e \;=\; a^{-1}, \tag{II.14}$$

  und das zu a inverse Element, a^{-1}, ist eindeutig.

- Aus der Eindeutigkeit des inversen Elements folgen dann auch

$$(a^{-1})^{-1} \;=\; a \qquad \text{und} \qquad (a \circ b)^{-1} \;=\; b^{-1} \circ a^{-1}, \tag{II.15}$$

  letzteres wegen $a \circ b \circ b^{-1} \circ a^{-1} \;=\; a \circ e \circ a^{-1} \;=\; a \circ a^{-1} \;=\; e$.

- Die Menge $G := \mathbb{R} \setminus \{1\}$ bildet bezüglich $a \circ b := a + b - ab$ eine Gruppe.

- Häufig wird das Verknüpfungszeichen weg gelassen, und man schreibt

$$a \circ b \;=:\; a\,b. \tag{II.16}$$

II.2 Ringe

Definition II.2. Eine Menge R heißt **Ring** $:\Leftrightarrow$
Auf R sind zwei Verknüpfungen *Addition* $+ : R \times R \to R$ und *Multiplikation* $(\cdot) : R \times R \to R$ definiert, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$(R_1) \qquad R \text{ ist bezüglich der Addition } + \text{ eine abelsche Gruppe,} \tag{II.17}$$

$$(R_2) \quad \forall a, b, c \in R: \qquad (a \cdot b) \cdot c \;=\; a \cdot (b \cdot c), \tag{II.18}$$

$$(R_3) \quad \forall a, b, c \in R: \quad a \cdot (b + c) \;=\; a \cdot b + a \cdot c, \quad (b + c) \cdot a \;=\; b \cdot a + c \cdot a. \tag{II.19}$$

Dabei bezeichnet man (R_3) als **Distributivität** und vereinbart, dass Multiplikation vor Addition ausgeführt wird (Punktrechnung vor Strichrechnung).

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Menge $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen ist kein Ring.

- Die Menge $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ der ganzen Zahlen bildet einen Ring.

- Die Menge $2\mathbb{Z} := \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ der geraden Zahlen bildet einen Ring.

- Die Menge $2\mathbb{Z} + 1 := \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ der ungeraden Zahlen ist gegenüber Addition nicht abgeschlossen und deswegen auch kein Ring.

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind Ringe.

II.3 Körper

Definition II.3. Ein Ring $\mathbb{F}$ heißt **Körper**[1] $\Leftrightarrow$
$\mathbb{F}$ besitzt zu (R_1)–(R_3) zusätzlich die folgenden Eigenschaften:

$$(K_1) \quad \forall a, b \in \mathbb{F} : \qquad a \cdot b = b \cdot a, \tag{II.20}$$

$$(K_2) \quad \exists 1 \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \; \forall a \in \mathbb{F} : \qquad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \tag{II.21}$$

$$(K_3) \quad \forall a \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \; \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{F} \setminus \{0\} : \qquad a \cdot \frac{1}{a} = 1. \tag{II.22}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist $\mathbb{F}$ ein Ring, der die Eigenschaften (K_2) und (K_3), aber nicht (K_1) besitzt, so bezeichnet man $\mathbb{F}$ als Schiefkörper.
- Die Eigenschaften (R_1)–(R_3) sowie (K_1)–(K_3) eines Körpers $\mathbb{F}$ implizieren, dass $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1 ist. Man bezeichnet $\mathbb{F}^\times := \mathbb{F} \setminus \{0\}$ als multiplikative Gruppe von $\mathbb{F}$.
- Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist kein Körper.
- Die Menge $\mathbb{Q} := \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ der *rationalen Zahlen* bilden einen Körper.
- Weitere Körper sind die Menge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ und die Menge der *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$. Diese Körper sind für diese Vorlesung am wichtigsten. Deshalb schreiben wir $\mathbb{K}$ statt $\mathbb{F}$, falls $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.
- Ist p eine Primzahl, so bilden die Restklassen $\mathbb{Z}_p$ modulo p einen Körper.

[1] engl.: Field

Kapitel III

Reelle und komplexe Zahlen

III.1 Ordnungsrelation und Vollständigkeit

Zu Beginn dieses Kapitels rufen wir den in Definition I.1 eingeführten Begriff einer geordneten Menge in Erinnerung.

Definition III.1. Eine Menge $S \neq \emptyset$ heißt **(total) geordnet** bezüglich "$<$" $:\Leftrightarrow$

$$(i) \text{ Sind } a, b \in S, \text{ so gilt genau eine der drei Relationen } a < b,\ a = b \text{ oder } a > b. \tag{III.1}$$

$$(ii) \text{ Sind } a, b, c \in S, \text{ und gilt } a < b \text{ und } b < c, \text{ dann gilt auch } a < c. \tag{III.2}$$

Wie gesagt, sind $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ total geordnete Mengen.

Definition III.2. Seien $S \neq \emptyset$ eine total geordnete Menge und $T \subseteq S$ eine Teilmenge.

(i) T ist **nach oben (n.o.) beschränkt**

$$:\Leftrightarrow \quad \exists\, a \in S\ \forall\, t \in T \ :\ t \leq a, \tag{III.3}$$

(ii) T ist **nach unten (n.u.) beschränkt**

$$:\Leftrightarrow \quad \exists\, b \in S\ \forall\, t \in T \ :\ b \leq t, \tag{III.4}$$

(iii) T ist **beschränkt**:

$$:\Leftrightarrow \quad T \text{ ist nach unten und oben beschränkt.} \tag{III.5}$$

Definition III.3. Seien $S \neq \emptyset$ eine total geordnete Menge und $T \subseteq S$ eine nach oben beschränkte Teilmenge. Ein Element $b \in S$ heißt **Supremum von T** $:\Leftrightarrow$

$$(i) \qquad \forall t \in T: \qquad\qquad t \leq b, \tag{III.6}$$

$$(ii) \quad \forall a \in S,\ a < b\ \exists\, t \in T: \qquad a < t. \tag{III.7}$$

Ist $T \subseteq S$ eine nach unten beschränkte Teilmenge, dann heißt $d \in S$ **Infimum von T** $:\Leftrightarrow$

$$(iii) \qquad \forall t \in T: \qquad\qquad t \geq d, \tag{III.8}$$

$$(iv) \quad \forall a \in S,\ a > d\ \exists\, t \in T: \qquad a > t. \tag{III.9}$$

Eine nach oben beschränkte Teilmenge $T \subseteq S$ muss nicht notwendig ein Supremum besitzen. In Definition III.3 wird auch nicht behauptet, dass ein $b \in S$ mit den Eigenschaften (III.6)–(III.7) existiert. Ebensowenig ist klar, ob jede nach unten beschränkte Teilmenge ein Infimum besitzt. In der Tat geben wir ein Gegenbeispiel zu einer solchen Vermutung.

Lemma III.4. *Seien $S := \mathbb{Q}$ und $T := \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$. Dann existiert kein Supremum von T in S.*

Beweis. (Skizze) Man sieht leicht ein, dass $b^2 = 2$ für jedes Supremum $b \in S$ von T gelten muss. Diese Gleichung hat jedoch keine rationale Lösung. □

Das in Lemma III.4 vorgestellte Gegenbeispiel illustriert eine der fundamentalen, immer wiederkehrenden Fragestellungen in der Mathematik: *Existiert ein (vorher definiertes) Objekt?* Von gleichrangiger Bedeutung ist die Frage nach der *Eindeutigkeit eines (vorher definierten) Objekts*, und auch diese Frage wollen wir am Beispiel des Supremums illustrieren.

Lemma III.5. *Seien $S \neq \emptyset$ eine total geordnete Menge und $T \subseteq S$ eine nach oben beschränkte Teilmenge, für die ein Supremum $b \in S$ existiert. Dann ist dieses Supremum eindeutig, und wir schreiben*

$$b \;=:\; \sup T, \tag{III.10}$$

das Supremum von T. (Die Eindeutigkeit berechtigt uns nun zur Benutzung des bestimmten Artikels.)

Beweis. Sei $b' \in S$ ein (möglicherweise von b verschiedenes) Supremum von T. Nehmen wir an, $b' < b$. Dann gäbe es nach (III.7) $t \in T$, so dass $b' < t$. Weil b' ein Supremum ist, gilt allerdings auch $b' \geq t$. Widerspruch. Also ist $b' \geq b$. Durch Vertauschen der Rollen von b' und b erhält man genauso $b' \leq b$, woraus $b' = b$ folgt. □

Definition III.6. Eine total geordnete Menge $S \neq \emptyset$ erfüllt das **Supremumsaxiom**

$:\Leftrightarrow$ Jede nach oben beschränkte Teilmenge $T \subseteq S$ besitzt ein Supremum, $\sup T \in S$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Besitzt jede nach oben beschränkte Teilmenge $T \subseteq S$ ein Supremum, $\sup T \in S$, so ist dieses nach Lemma III.5 eindeutig.
- Das Supremum $\sup(T)$ ist die kleinste obere Schranke an $T \subseteq S$.
- Analog ist das Infimum $\inf(T)$ ist die größte untere Schranke an $T \subseteq S$.
- $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ erfüllen das Supremumsaxiom, sind aber keine Körper;
- $\mathbb{Q}$ ist ein Körper, ist total geordnet, erfüllt aber nicht das Supremumsaxiom.

Definition III.7. Sei $\mathbb{F} \neq \emptyset$ ein Körper und eine total geordnete Menge. $\mathbb{F}$ heißt **geordneter Körper im Sinne von Definition III.7** $:\Leftrightarrow$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{F} : \qquad a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c, \tag{III.11}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{F} : \qquad a > 0 \;\wedge\; b > 0 \;\Rightarrow\; a \cdot b > 0. \tag{III.12}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Ein Körper $\mathbb{F}$ auf dem eine totale Ordnung "$<$" definiert ist, ist kein geordneter Körper im Sinne von Definition III.7, falls nicht (III.11) und (III.12) erfüllt sind.
- $\mathbb{Q}$ ist ein geordneter Körper im Sinne von Definition III.7.
- $\mathbb{Q}^2$ bildet mit der Addition und Multiplikation wie in (III.16)–(III.17) einen Körper. Man kann auf $\mathbb{Q}^2$ auch eine totale Ordnung definieren, aber keine, bezüglich der $\mathbb{Q}^2$ ein geordneter Körper im Sinne von Definition III.7 wäre.

Satz III.8. *Es gibt einen eindeutigen geordneten Körper im Sinne von Definition III.7, der* $\mathbb{Q}$ *enthält und das Supremumsaxiom erfüllt. Wir nennen diesen Körper die* ***reellen Zahlen*** *und bezeichnen ihn mit* $\mathbb{R}$.

Der Beweis dieses Satzes ist mit unseren bisher eingeführten Mitteln sehr aufwändig und wenig lehrreich. Wir kommen in Abschnitt V.4.3 auf die Konstruktion der reellen Zahlen zurück.

Lemma III.9. *Seien* $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{R}$ *nach oben bzw. unten beschränkte Mengen. Dann gelten*

$$(i) \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists t_1 \in T_1 : \qquad \sup T_1 - \varepsilon < t_1, \tag{III.13}$$

$$(ii) \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists t_2 \in T_2 : \qquad \inf T_2 + \varepsilon > t_2. \tag{III.14}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Definitionen von Supremum und Infimum. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Lemma III.9 besagt, dass man das Supremum $\sup(T_1)$ einer nach oben beschränkten Teilmenge $T_1 \subseteq \mathbb{R}$ und das Infimum $\inf(T_1)$ einer nach unten beschränkten Teilmenge $T_2 \subseteq \mathbb{R}$ durch Elemente aus T_1 und T_2 beliebig gut nähern kann: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ -und sei es auch noch so klein- findet man $t_1 \in T_1$ und $t_2 \in T_2$, so dass

$$0 \;\leq\; \sup(T_1) - t_1 \;<\; \varepsilon \quad \text{und} \quad 0 \;\leq\; t_2 - \inf(T_2) \;<\; \varepsilon. \tag{III.15}$$

- Es sind $\sup[0,5] = \sup(0,5) = 5$ und $\inf[0,5] = \inf(0,5) = 0$.
- Mit $T := \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ sind $\sup T = 1$ und $\inf T = 0$.
- Sei $T := \{\cos(n) \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$, dann sind $\inf T = -1$ und $\sup T = 1$, wie in Ergänzung III.3.3 bewiesen wird.

III.2 Die komplexen Zahlen

Definition III.10. Auf der Menge $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ seien Addition und Multiplikation durch

$$(a,b) + (c,d) \;:=\; (a+c,\; b+d), \tag{III.16}$$

$$(a,b) \cdot (c,d) \;:=\; (a \cdot c - b \cdot d,\; b \cdot c + a \cdot d), \tag{III.17}$$

definiert.

Lemma III.11. *Die Menge* $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *bildet bezüglich der Addition* (III.16) *und der Multiplikation* (III.17)*) einen Körper, den Körper* $\mathbb{C}$ *der* ***komplexen Zahlen****. Dabei sind* $(0,0)$ *das neutrale Element bezüglich Addition und* $(1,0)$ *das neutrale Element bezüglich Multiplikation. Die inversen Elemente in* $\mathbb{C}$ *sind wie folgt gegeben,*

$$-(a,b) \ = (-a,-b), \tag{III.18}$$

$$\frac{1}{(a,b)} \ = \left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right), \tag{III.19}$$

wobei zu beachten ist, dass

$$\Big[(a,b) \neq (0,0)\Big] \ \Leftrightarrow \ \Big[(a \neq 0 \vee b \neq 0)\Big] \ \Leftrightarrow \ \Big[a^2+b^2 > 0\Big]. \tag{III.20}$$

Beweis. Der Beweis, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist, erfolgt durch Nachprüfen der Eigenschaften $(R_1)-(R_3)$ und $(K_1)-(K_3)$. $\square$

Zu jeder komplexen Zahl $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ definieren wir

ihren **Realteil**	$\mathrm{Re}\{z\} \ := \ a \ \in \ \mathbb{R},$	(III.21)
ihren **Imaginärteil**	$\mathrm{Im}\{z\} \ := \ b \ \in \ \mathbb{R},$	(III.22)
ihren **Betrag**	$\lvert z\rvert \ := \ \sqrt{a^2+b^2} \ \in \ \mathbb{R}_0^+,$	(III.23)
und die **konjugiert komplexe Zahl**	$\bar{z} \ := \ (a,-b) \ \in \ \mathbb{C}.$	(III.24)

Es ist bequem, die so genannte **imaginäre Einheit** $\mathbf{i} := (0,1)$ einzuführen. Identifizieren wir weiterhin $\mathbf{1} := (1,0)$, so kann man jede komplexe Zahl $(a,b) \in \mathbb{C}$ als $(a,b) = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i}$ schreiben. Damit ist

$$z \ = \ \mathrm{Re}\{z\} \cdot \mathbf{1} \ + \ \mathrm{Im}\{z\} \cdot \mathbf{i}. \tag{III.25}$$

Weiterhin sind mit dieser Schreibweise (III.16) und (III.17)) äquivalent zu

$$(a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i}) \ + \ (c \cdot \mathbf{1} + d \cdot \mathbf{i}) \ = (a+c) \cdot \mathbf{1} \ + \ (b+d) \cdot \mathbf{i}, \tag{III.26}$$

$$(a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i}) \ \cdot \ (c \cdot \mathbf{1} + d \cdot \mathbf{i}) \ = (ac-bd) \cdot \mathbf{1} \ + \ (bc+ad) \cdot \mathbf{i}. \tag{III.27}$$

Insbesondere ist

$$\mathbf{i}^2 \ = \ (0,1) \cdot (0,1) \ = \ (-1,0) \ = \ -\mathbf{1}, \tag{III.28}$$

d.h. die imaginäre Einheit ist eine Quadratwurzel aus $-\mathbf{1}$. Das ist auch die einzige zusätzliche Rechenregel, die man beim Rechnen mit komplexen Zahlen im Vergleich zu den reellen beachten muss. Diese bemerkenswerte Eigenschaft von i führt letztendlich dazu, dass über $\mathbb{C}$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

Satz III.12 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Für* $N \in \mathbb{N}$ *seien* $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1} \in \mathbb{C}$*. Dann gibt es* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N \in \mathbb{C}$*, so dass, für alle* $z \in \mathbb{C}$*,*

$$z^N \ + \ c_{N-1} z^{N-1} \ + \ \ldots \ + \ c_1 z \ + \ c_0 \ = \ (z-\lambda_1)(z-\lambda_2) \cdots (z-\lambda_N). \tag{III.29}$$

Beweis. Der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra erfolgt meist mit Hilfe des Satzes von Liouville in der Funktionentheorie. □

Eine sehr nützliche Beobachtung ist, dass die komplexen Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil mit den reellen Zahlen identifiziert werden können. Dies rechtfertigt auch den Namen "Realteil" für die erste Komponente einer komplexen Zahl. Definieren wir

$$\mathrm{Re}\,\mathbb{C} \;:=\; \{(a,0) \;=\; a\cdot\mathbf{1} \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R}\}, \tag{III.30}$$

so sieht man leicht, dass $\mathrm{Re}\,\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper ist, d.h. $\mathrm{Re}\,\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Teilmenge, die selbst ein Körper ist. Außerdem ist $\mathrm{Re}\,\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}$ *isomorph* (als Körper) zu $\mathbb{R}$. Etwas genauer formuliert, ist

$$J \;:\; \mathbb{R} \to \mathrm{Re}\,\mathbb{C}, \quad a \mapsto a\cdot\mathbf{1} \tag{III.31}$$

eine Bijektion, die die Körpereigenschaften erhält, d.h. es gilt $J(a+b) = J(a) + J(b)$ und $J(a\cdot b) = J(a)\cdot J(b)$. Mit (III.31) können wir $\mathbb{R}$ und $\mathrm{Re}\,\mathbb{C} = J[\mathbb{R}]$ miteinander identifizieren und die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen auffassen. Konkret geschieht diese Identifikation einfach durch das Weglassen von "**1**", also indem wir $a+ib := a\cdot\mathbf{1}+b\cdot\mathbf{i}$ schreiben und Einsen **1** als Faktoren auslassen. Mit dieser Identifikation wird dann auch

$$|z|^2 \;=\; \bar{z}\cdot z, \tag{III.32}$$

für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, sowie

$$(a+ib) \;+\; (c+id) \;=(a+c) \;+\; i(b+d), \tag{III.33}$$

$$(a+ib) \;\cdot\; (c+id) \;=(ac-bd) \;+\; i(bc+ad). \tag{III.34}$$

Von großer Bedeutung ist schließlich noch die **Polardarstellung** für komplexe Zahlen. Für $z = (a,b) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ wählen wir eine *Phase* $\varphi \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\cos(\varphi) \;=\; \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) \;=\; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{III.35}$$

Die Phase φ ist durch (III.35) bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Mit dieser Phase wird dann

$$z \;=\; |z|\,\cos(\varphi) \;+\; i|z|\,\sin(\varphi). \tag{III.36}$$

Ist nun $\tilde{z} = |\tilde{z}|\cos(\psi) + i|\tilde{z}|\,\sin(\psi)$, mit $\psi \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned} z\cdot\tilde{z} \;&= |z|\,|\tilde{z}|\,\big\{\big[\cos(\varphi)\cos(\psi) \;-\; \sin(\varphi)\sin(\psi)\big] \;+\; i\,\big[\sin(\varphi)\cos(\psi) \;+\; \cos(\varphi)\sin(\psi)\big]\big\} \\ &= |z|\,|\tilde{z}|\,\big\{\cos(\varphi+\psi) \;+\; i\,\sin(\varphi+\psi)\big\}. \end{aligned} \tag{III.37}$$

Wegen der Ähnlichkeit mit dem Additionsgesetz $e^x e^y = e^{x+y}$ für die Exponentialfunktion (und nicht nur deswegen) schreibt man auch

$$e^{i\varphi} \;:=\; \cos(\varphi) \;+\; i\,\sin(\varphi). \tag{III.38}$$

In dieser Polardarstellung haben dann Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen folgende grafische Interpretation:

- Die Addition zweier komplexer Zahlen erfolgt komponentenweise, wie bei Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

$$(a,b) + (c,d) \;=\; (a+c,\; b+d). \tag{III.39}$$

- Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen erfolgt durch Multiplikation ihrer Beträge und Addition der Phasen,

$$(r_1\, e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2\, e^{i\varphi_2}) \;=\; r_1\, r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \tag{III.40}$$

III.3 Ergänzungen

III.3.1 Ausführlicher Beweis von Lemma III.4

Beweis. Offensichtlich ist T z.B. durch 2 nach oben beschränkt. Nehmen wir an, T hätte das Supremum $b \in \mathbb{Q}$, etwa $b = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ (offenbar gilt $b > 0$).

(i) Nehmen wir zunächst $b^2 > 2$ an, und setzen wir $\tilde{b} := b - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ noch später gewählt wird. Dann beobachten wird, dass

$$\tilde{b}^2 \;=\; \big(b - \frac{1}{n}\big)^2 \;=\; b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \;\geq\; b^2 - \frac{2b}{n} \;\geq\; 2, \qquad \text{(III.41)}$$

sofern wir $n \in \mathbb{N}$ größer als $2b/(b^2-2)$ wählen. Dann wäre $\tilde{b} < b$ auch eine obere Schranke. Widerspruch. Also gilt: $b^2 \leq 2$.

(ii) Nehmen wir umgekehrt an, dass $b^2 < 2$. Setzen wir $t := b + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, so gilt $t > b$ und

$$t^2 \;=\; b^2 + \frac{2b}{n} \pm \frac{1}{n^2} + \frac{2b}{n} \;<\; 2, \qquad \text{(III.42)}$$

sofern wir $n \in \mathbb{N}$ größer als $2b/(b^2-2)$ wählen. Dann wäre $t \in T$. Widerspruch. Also gilt $b^2 \geq 2$.

Aus (i) und (ii) folgt, dass $b^2 = 2$. Bekanntlich ist die Lösung dieser Gleichung, $b = \sqrt{2}$, irrational, also $b \notin \mathbb{Q}$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass b ein Supremum von T ist und insbesondere $b \in \mathbb{Q}$ gilt. □

III.3.2 Die archimedische Eigenschaft

Satz III.13. *Sei* $\mathbb{R}_\pm := \{x \in \mathbb{R} \,|\, \pm x > 0\}$. $\mathbb{R}_+$ *besitzt die* ***archimedische Eigenschaft****, d.h.*

$$(i) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\; y \in \mathbb{R}\; \exists n \in \mathbb{N}: \quad nx \;>\; y; \qquad \text{(III.43)}$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\; x < y\; \exists q \in \mathbb{Q}: \quad x \;<\; q \;<\; y. \qquad \text{(III.44)}$$

Beweis.
$\underline{(i)}$ Seien $x \in \mathbb{R}_+$ und $y \in \mathbb{R}$, sowie

$$A \;:=\; \{nx \,|\, n \in \mathbb{N}\}. \qquad \text{(III.45)}$$

Wäre (i) falsch, dann wäre $\forall n \in \mathbb{N} : nx \leq y$, also wäre $A \subseteq \mathbb{R}$ durch $y \in \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Weil $\mathbb{R}$ das Supremumsaxiom erfüllt, wäre dann $z := \sup A \in \mathbb{R}$. Dann wäre $z - x < z$, deshalb gäbe es ein $\tilde{z} \in A$ mit $z - x < \tilde{z}$. Andererseits ist $\tilde{z}$ - als Element in A - von der Form $\tilde{z} = m \cdot x, m \in \mathbb{N}$. Somit wäre $z < (m+1)x \in A$, was im Widerspruch zu $z = \sup A$ steht.
$\underline{(ii)}$ Seien $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Nach (i) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$n(y - x) > 1 \iff nx < ny - 1. \qquad \text{(III.46)}$$

Aus der abermaligen Anwendung von (i) erhalten wir $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, sodass $m_1 > nx$, $m_2 > -nx$, also $-m_2 \ < \ nx \ < \ m_1$, was gleichwertig ist mit

$$nx \ \in \ (-m_2 \, , \, m_1). \tag{III.47}$$

Wegen

$$(-m_2 \, , \, m_1) \ \subseteq \ [-m_2 \, , \, m_1) \ = \ \bigcup_{m=-m_2+1}^{m_1} [m-1 \, , \, m) \tag{III.48}$$

gibt es eine Zahl $m \in \{-m_2+1, -m_2+2, \ldots, m_1\}$, sodass

$$m-1 \ \leq \ nx \ < \ m. \tag{III.49}$$

Wegen $m - 1 \leq nx < ny - 1$ gilt dann auch

$$nx \ < \ m \ < \ ny, \tag{III.50}$$

was gleichwertig ist mit

$$x \ < \ \frac{m}{n} \ < \ y. \tag{III.51}$$

$\square$

III.3.3 Diophantische Abschätzungen

Für $T = \{\cos(n) \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ zeigen wir, dass $\sup(T) = 1$. Offensichtlich gilt $\sup(T) \leq 1$, da $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Wir müssen also nur zeigen, dass auch $\sup(T) \geq 1$ richtig ist.
Wegen der Periodizität der Kosinusfunktion und ihrer Achsensymmetrie ist $\cos(n) = \cos(-n) = \cos(2\pi k - n)$, für alle $k \in \mathbb{Z}$. Somit ist $T = \{\cos(\gamma) \,|\, \gamma \in \Gamma_{2\pi}\}$ mit

$$\Gamma_\alpha \ := \ \left\{ 2\pi k - n \ \middle| \ k, n \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{III.52}$$

Ist nun $\gamma \in (-\pi, \pi]$, so gilt mit den Additionstheorem

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) \ = \ -2 \, \sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right] \, \sin\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right] \tag{III.53}$$

für trigonometrische Funktionen und der Abschätzung $|\sin(\gamma)| \leq |\gamma|$, dass

$$\cos(\gamma) \ = \ 1 - [\cos(0) - \cos(\gamma)] \ = \ 1 - 2\, \sin^2(\gamma/2) \ \geq \ 1 - \tfrac{1}{2}\,\gamma^2 \,. \tag{III.54}$$

Somit ist

$$\sup(T) \ \geq \ 1 \ - \ \tfrac{1}{2} \Big(\inf\left\{ |\gamma| \ \middle| \ \gamma \in \Gamma_{2\pi} \right\} \Big)^2 . \tag{III.55}$$

Die Behauptung $\sup(T) \geq 1$ folgt nun aus dem folgenden Satz.

Satz III.14. *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist*

$$m(\alpha) \ := \ \inf \Big\{ |k\alpha - n| \ \Big| \ k, n \in \mathbb{Z} \Big\} \ = \ 0 \, . \tag{III.56}$$

Beweis. Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist die Aussage trivial, und wir können o.B.d.A. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ annehmen. Weiterhin beobachten wir, dass $m(\alpha) = m(\sigma\alpha + n)$ für beliebige $\sigma \in \{-1, 1\}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Sei nun $\ell \in \mathbb{Z}$ die eindeutige Zahl, für die

$$\alpha_0 \ := \ |\alpha - \ell| \ < \ \frac{1}{2} \tag{III.57}$$

gilt. Dann ist $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ von der Form $\alpha_0 = \sigma\alpha + n$ entweder mit $(\sigma = 1) \wedge (n = -\ell)$ oder $(\sigma = -1) \wedge (n = \ell)$. Es gilt also

$$m(\alpha_0) \ = \ m(\alpha) \, , \qquad m(\alpha_0) \ \leq \ \alpha_0 \, , \qquad \alpha_0 \in (0, \tfrac{1}{2}) \, , \tag{III.58}$$

wobei wir die triviale Abschätzung $|\alpha| \geq m(\alpha)$ benutzen.
Zu α_0 gibt es ein eindeutiges $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $k_0\alpha_0 < 1 < (k_0 + 1)\alpha_0$ gilt, und wir setzen

$$\alpha_1 \ := \ \min \big\{ 1 - k_0\alpha_0 \, , \ (k_0 + 1)\alpha_0 - 1 \big\} \tag{III.59}$$

und beobachten, dass

$$0 \ < \ \alpha_1 \ \leq \ \frac{1}{2}\Big([1 - k_0\alpha_0] + [(k_0 + 1)\alpha_0 - 1] \Big) \ = \ \frac{1}{2}\alpha_0 \, . \tag{III.60}$$

Ist $\alpha_1 = 1 - k_0\alpha_0$, so ist außerdem

$$m(\alpha_1) \ = \ \inf \Big\{ |k - kk_0\alpha_0 - n| \ \Big| \ k, n \in \mathbb{Z} \Big\} \ \geq \ m(\alpha_0) \, , \tag{III.61}$$

was natürlich auch für $\alpha_1 = (k_0 + 1)\alpha_0 - 1$ richtig ist.
Zu α_1 gibt es ein eindeutiges $k_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $k_1\alpha_1 < 1 < (k_1 + 1)\alpha_1$ gilt. Wir setzen

$$\alpha_2 \ := \ \min \big\{ 1 - k_1\alpha_1 \, , \ (k_1 + 1)\alpha_1 - 1 \big\} \tag{III.62}$$

und beobachten, dass wieder

$$0 \ < \ \alpha_2 \ \leq \ \frac{1}{2}\alpha_1 \quad \text{und} \quad m(\alpha_2) \ \geq \ m(\alpha_1) \tag{III.63}$$

gelten.
Fahren wir so fort, so erhalten wir eine Folge $(\alpha_\nu)_{\nu=0}^\infty \in (0, \frac{1}{2})^{\mathbb{N}}$ positiver Zahlen mit

$$0 \ < \ \alpha_\nu \ \leq \ 2^{-1}\alpha_{\nu-1} \ \leq \ \cdots \ \leq \ 2^{-\nu}\alpha_0 \ < \ 2^{-\nu-1} \tag{III.64}$$

und so, dass für jedes $\nu \in \mathbb{N}$

$$2^{-\nu-1} \ > \ \alpha_\nu \ \geq \ m(\alpha_\nu) \ \geq \ \cdots \ \geq \ m(\alpha_0) \ = \ m(\alpha) \ \geq \ 0 \tag{III.65}$$

gilt. Also muss $m(\alpha) = 0$ sein. □

Kapitel IV

Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen

Wir haben schon einige Mengen in den Kapiteln I und II kennengelernt, etwa die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Jede dieser Zahlenmengen enthält unendlich viele Elemente,

$$\#[\mathbb{N}] \;=\; \#[\mathbb{Z}] \;=\; \#[\mathbb{Q}] \;=\; \#[\mathbb{R}] \;=\; \infty. \tag{IV.1}$$

Um mengentheoretische Unterschiede zwischen ihnen auszumachen, müssen wir unsere bisherigen Begriffe über Mengen verfeinern.

IV.1 Abzählbare Mengen

Definition IV.1. Zwei Mengen A, B heißen **gleichmächtig**

$$:\Leftrightarrow \quad \exists\, f : A \to B : \quad f \text{ ist bijektiv.} \tag{IV.2}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Jede N–elementige Menge, $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ ist gleichmächtig zu $\{1, 2, \ldots, N\}$, denn

$$f : \{1, 2, \ldots, N\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}, \quad k \mapsto a_k, \tag{IV.3}$$

  ist eine Bijektion.

- $\mathbb{N}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{Z}$, denn

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad k \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 1, \\ \frac{1}{2}\, k, & \text{falls } k \text{ gerade } \wedge\ k \geq 2, \\ -\frac{1}{2}\,(k-1), & \text{falls } k \text{ ungerade } \wedge\ k \geq 2, \end{cases} \tag{IV.4}$$

  ist eine Bijektion,

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = -1, \quad f(4) = 2, \quad f(5) = -2, \quad \ldots \tag{IV.5}$$

Definition IV.2. Eine Menge A heißt **abzählbar** $:\Leftrightarrow$

$$(a) \quad A \text{ ist } \textbf{endlich}, \text{ d.h. } \#\{A\} \in \mathbb{N} \; (:\Leftrightarrow \#\{A\} < \infty) \text{ oder} \tag{IV.6}$$

$$(b) \quad A \text{ ist } \textbf{unendlich}, \; \#\{A\} = \infty, \text{ und } A \text{ ist gleichmächtig zu } \mathbb{N} \tag{IV.7}$$

Ist A nicht abzählbar, so heißt A **überabzählbar**.

Lemma IV.3. *Seien A eine abzählbare Menge und $B \subseteq A$. Dann ist B abzählbar.*

Satz IV.4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Wir zeichnen die Elemente $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in eine Tabelle und definieren eine Abbildung $J : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, indem wir den Pfeilen folgen,

$$\begin{array}{ccccc} J(1) := (1,1) & \rightarrow & J(2) := (1,2) & & J(6) := (1,3) \quad \ldots \\ & \swarrow & & \nearrow & \\ J(3) := (2,1) & & J(5) := (2,2) & & \\ \downarrow & \nearrow & & & \\ J(4) := (3,1) & & & & \end{array} \tag{IV.8}$$

Die Bijektivität von J ist offensichtlich. □

Satz IV.5. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Wir führen den Beweis für $\mathbb{Q}_+$. Jedes Element $q \in \mathbb{Q}_+$ lässt sich eineindeutig durch $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als

$$q = \frac{m}{n} \tag{IV.9}$$

darstellen, wenn man voraussetzt, dass m und n teilerfremd sind (d.h. man kann m/n nicht kürzen). Also ist

$$J : \mathbb{Q}_+ \to A := \big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\big|\; m, n \text{ teilerfremd}\big\}, \qquad \frac{m}{n} \longmapsto (m,n), \tag{IV.10}$$

eine Bijektion. Nach Satz IV.4 ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und nach Lemma IV.3 somit auch $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar. Also ist $\mathbb{Q}_+$ abzählbar. □

IV.2 Dezimaldarstellung von Zahlen

Definition IV.6. Eine **Folge (in A)** ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to A, \quad n \longmapsto a_n, \tag{IV.11}$$

wobei $A \neq \emptyset$ eine Menge ist. Statt (IV.11) schreibt man auch

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad \text{oder} \quad (a_n)_{n=1}^{\infty}. \tag{IV.12}$$

Wir wollen nun die Dezimaldarstellung von Zahlen zwischen 0 und 1 genauer untersuchen.

Definition IV.7. Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ heißt **Dezimaldarstellung** der Zahl $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$

$$:\Leftrightarrow \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ k > n : \quad a_k \ < \ 9. \tag{IV.13}$$

Die Menge der Dezimaldarstellungen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}$.

Die Bedingung (IV.13) schließt Zahlen mit Periode 9, wie z.B.

$$x \ = \ 0,1729999\ldots \tag{IV.14}$$

aus, denn diese ist ja bereits durch

$$0,173000\ldots$$

dezimal dargestellt, und wir möchten, dass die Dezimaldarstellung eindeutig ist, siehe auch Abschnitt IV.3.3.

Lemma IV.8. *Die Menge der Dezimaldarstellungen $\mathcal{D}$ und die Menge $[0, 1) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ sind gleichmächtig.*

Satz IV.9. *$\mathcal{D}$ ist nicht abzählbar.*

Beweis. Nehmen wir an,

$$\mathcal{D} \ = \ \left\{ \big(a_n^{(1)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(a_n^{(2)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots \right\} \tag{IV.15}$$

wäre eine Abzählung. Definiere nun eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$b_n \ := \ \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad a_n^{(n)} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}, \\ 7, & \text{falls} \quad a_n^{(n)} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \end{cases} \tag{IV.16}$$

so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad b_n \ \neq \ a_n^{(n)}. \tag{IV.17}$$

Offenbar wäre

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}, \tag{IV.18}$$

da alle b_n verschieden von 9 sind. Andererseits impliziert aber (IV.17), dass

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \neq \ \big(a_n^{(k)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \tag{IV.19}$$

also

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \left\{ \big(a_n^{(1)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(a_n^{(2)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots \right\} \ = \ \mathcal{D}, \tag{IV.20}$$

was in Widerspruch zu (IV.18) steht. □

Satz IV.10. *$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Beweis. Wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, so wäre auch $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ als Teilmenge abzählbar. $[0, 1)$ ist aber gleichmächtig zur überabzählbaren Menge $\mathcal{D}$ der Dezimaldarstellungen und somit selbst überabzählbar. Also kann $\mathbb{R}$ nicht abzählbar sein. □

IV.3 Ergänzungen

IV.3.1 Teilmengen abzählbarer Mengen sind abzählbar

Beweis. Ist $\#\{B\}$ endlich, so gilt die Behauptung automatisch. Wir können also o.B.d.A. voraussetzen, dass B und somit auch $A \supseteq B$ unendlich sind,

$$\#\{B\} \;=\; \#\{A\} \;=\; \infty. \tag{IV.21}$$

Da A abzählbar ist, gibt es eine Bijektion

$$x : \mathbb{N} \to A, \quad n \mapsto x_n, \tag{IV.22}$$

und

$$A \;=\; \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}. \tag{IV.23}$$

Da $B \subseteq A$, gibt es eine Zahl $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$x_1 \notin B,\; x_2 \notin B, , \ldots ,\; x_{n_1-1} \notin B,\; x_{n_1} \in B. \tag{IV.24}$$

Weiterhin gibt es eine Zahl $n_2 \in \mathbb{N}, n_2 > n_1$, so dass

$$x_{n_1+1} \notin B, \ldots ,\; x_{n_2-1} \notin B,\; x_{n_2} \in B. \tag{IV.25}$$

Führen wir dieses Verfahren so fort, erhalten wir eine Abbildung

$$y : \mathbb{N} \to B, \quad j \mapsto y_j := x_{n_j}, \tag{IV.26}$$

wobei $n_j \in \mathbb{N}, j \leq n_j < n_{j+1}$. Weil $x : \mathbb{N} \to A$ eine Bijektion ist, gilt $x_m \neq x_n$ falls $m < n$. Insbesondere ist für $i < j$ auch $n_i < n_j$ und somit $x_{n_i} \neq x_{n_j}$,

$$i < j \;\Rightarrow\; n_i < n_j \;\Rightarrow\; y_2 = x_{n_i} \neq x_{n_j} = y_i. \tag{IV.27}$$

Also ist y injektiv. Ist nun $b \in B \subseteq A$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$b \;=\; x_n. \tag{IV.28}$$

Mit der oben beschriebenen Prozedur erhält man dann $n = n_j$, für ein gewisses $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$ (nach endlich vielen Schritten, das ist hier der Punkt!), also

$$b \;=\; x_{n_j} \;=\; y_j. \tag{IV.29}$$

Somit ist y auch surjektiv und damit bijektiv $\square$

IV.3.2 Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar

Satz IV.11. *Jede Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Beweis. Seien die Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gegeben als

$$A_j \;=\; \{x_{j,1}, x_{j,2}, x_{j,3}, \ldots\}. \tag{IV.30}$$

Dann ist

$$A \;:=\; \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \;=\; \{x_{j,k} \mid \exists\, (j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{j,k} \in A_j\}. \tag{IV.31}$$

Wie im Beweis von Satz IV.5 folgern wir nun, dass A gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und somit abzählbar ist. □

IV.3.3 Beweis der Gleichmächtigkeit der reellen Zahlen und der Dezimaldarstellungen (Lemma IV.8)

Beweis. Seien $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}$ eine Dezimaldarstellung und, für $N \in \mathbb{N}$,

$$q_N \;:=\; \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot 10^{-n} \;\in\; \mathbb{Q} \;\subseteq\; \mathbb{R}. \tag{IV.32}$$

Offensichtlich gilt immer $q_N < 1$, deshalb ist die Menge

$$A \;:=\; \{q_1, q_2, q_3, \ldots\} \subseteq \mathbb{R} \tag{IV.33}$$

nach oben beschränkt und hat ein Supremum $\sup A \in [0,1]$. Wegen (IV.13) gilt sogar $q_N \leq 1 - 10^{-\tilde{n}}$, für ein gewisses $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, und daher

$$\sup A \in [0,1). \tag{IV.34}$$

Wir erhalten somit eine Abbildung

$$J : \mathcal{D} \to [0,1), \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sup A. \tag{IV.35}$$

Seien nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass dann auch $\sup A \neq \sup B$, wobei $B = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ und $p_N = \sum_{n=1}^N b_n \cdot 10^{-n}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_1 = b_1, \;\; a_2 = b_2, \;\ldots,\; a_{m-1} = b_{m-1}, \;\; a_m \leq b_m - 1 \tag{IV.36}$$

(oder umgekehrt, dann vertausche man die Rollen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
Weiterhin gibt es nach (IV.13) ein $\tilde{n} \geq m+1$ mit

$$a_{\tilde{n}} \;\leq\; 8. \tag{IV.37}$$

Bilden wir nun q_N, für $N \geq \tilde{n}$, so gilt

$$\begin{aligned} q_N &= \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot 10^{-n} = \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + \sum_{n=m}^{\tilde{n}-1} a_n \cdot 10^{-n} + \underbrace{\sum_{n=\tilde{n}}^{N} a_n \cdot 10^{-n}}_{\leq 9 \cdot 10^{-\tilde{n}}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} a_m \cdot 10^{-m} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\tilde{n}} 9 \cdot 10^{-\tilde{n}}}_{=10^{-m}-10^{-\tilde{n}}}, \end{aligned} \tag{IV.38}$$

und andererseits, für $N \geq m$,

$$p_N := \sum_{n=1}^{N} b_n \cdot 10^{-n} \geq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + b_m \cdot 10^{-m}. \tag{IV.39}$$

Mit

$$A := \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}, \quad B := \{p_1, p_2, p_3, \ldots\} \tag{IV.40}$$

und

$$q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \ldots, \quad p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \ldots \tag{IV.41}$$

erhalten wir dann

$$\forall k \in \mathbb{N}: \qquad \sup A = \sup\{q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots\} \tag{IV.42}$$

$$\forall \ell \in \mathbb{N}: \qquad \sup B = \sup\{q_\ell, q_{\ell+1}, q_{\ell+2}, \ldots\}. \tag{IV.43}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \sup A &= \sup\{q_{\tilde{n}}, q_{\tilde{n}+1}, q_{\tilde{n}+2}, \ldots\} \\ &\leq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + (a_m + 1) \cdot 10^{-m} - 10^{-\tilde{n}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + b_m \cdot 10^{-m} - 10^{-\tilde{n}} \\ &\leq \sup\{p_m, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots\} - 10^{-\tilde{n}} \\ &= \sup B - 10^{-\tilde{n}} < \sup B. \end{aligned} \tag{IV.44}$$

Insbesondere ist

$$J\big[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big] = \sup A < \sup B = J\big[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big], \tag{IV.45}$$

und somit J *injektiv*.

Um die Surjektivität zu zeigen, wählen wir eine Zahl $x_0 \in [0, 1)$ und bestimmen die natürliche Zahl $a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so, dass

$$0 \;\le\; x_1 \;:=\; x_0 - a_1 \cdot 10^{-1} \;<\; 10^{-1}. \tag{IV.46}$$

Anschließend wählen wir $a_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so, dass

$$0 \;\le\; x_2 \;:=\; x_1 - a_2 \cdot 10^{-2} \;<\; 10^{-2} \tag{IV.47}$$

und allgemein $a_k \in \{0, \ldots, 9\}$ so, dass

$$0 \;\le\; x_k \;:=\; x_{k-1} - a_k \cdot 10^{-k} \;<\; 10^{-k}, \tag{IV.48}$$

für vorher gewählte $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in \{0, \ldots, 9\}$. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$. Bilden wir wieder

$$q_N \;:=\; \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}, \qquad A \;:=\; \{q_1, q_2, \ldots\}, \tag{IV.49}$$

so ist mit (IV.46)-(IV.48), für alle $N, k \in \mathbb{N}$

$$q_N \;\le\; x_0 \;<\; q_N + 10^{-N} \;\le\; q_{N+k} + 10^{-N}. \tag{IV.50}$$

Also gilt, für alle $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup A \;\le\; x_0 \;<\; \sup\{q_N, q_{N+1}, \ldots\} + 10^{-N} \;=\; \sup A + 10^{-N}. \tag{IV.51}$$

Aus

$$\forall\, N \in \mathbb{N} : \quad \sup A \;\le\; x_0 \;<\; \sup A + 10^{-N} \tag{IV.52}$$

folgt aber

$$x_0 \;=\; \sup A \;=\; J\big[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big], \tag{IV.53}$$

und J ist auch *surjektiv* und somit bijektiv. $\square$

Kapitel V

Folgen und Konvergenz

V.1 Konvergenz von Zahlenfolgen

Wir erinnern an den Begriff der Folge, den wir schon im Kapitel III verwenden. Eine *Folge* $(a_n)_{n=1}^\infty \in A^\mathbb{N}$ in A ist eine Abbildung $a_{(\cdot)} : \mathbb{N} \to A$, $n \mapsto a_n$. Folgen mit Werten in $A \subseteq \mathbb{K}$ nennen wir **Zahlenfolgen**.

Definition V.1.

(i) Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ heißt **konvergent** :⇔

$$\exists\, a \in \mathbb{K}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon. \tag{V.1}$$

In diesem Fall heißt a **Grenzwert** oder **Limes** von $(a_n)_{n=1}^\infty$, und wir schreiben statt (V.1) auch abkürzend

$$a_n \to a, \quad n \to \infty, \tag{V.2}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} \ = \ a. \tag{V.3}$$

(ii) Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ heißt **divergent** :⇔

$$(a_n)_{n=1}^\infty \text{ ist nicht konvergent.} \tag{V.4}$$

(iii) Enthält eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$, so heißt deren Grenzwert $\lim_{k\to\infty}\{a_{n_k}\}$ **Häufungswert** von $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass der Limes einer konvergenten Folge eindeutig ist. Ist nämlich

$$a_n \to a \quad \text{und} \quad a_n \to a', \quad n \to \infty, \tag{V.5}$$

so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ zwei Indizes $n_0, n_0' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \qquad |a_n - a| \leq \varepsilon, \tag{V.6}$$

$$\forall\, n \geq n_0' : \qquad |a_n - a'| \leq \varepsilon. \tag{V.7}$$

Für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$ ist demnach

$$|a - a'| \ \leq\ |a_n - a| + |a_n - a'| \ \leq\ 2\varepsilon. \tag{V.8}$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus

$$a \ = \ a'. \tag{V.9}$$

- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a_n := 1/n$. Dann konvergiert $a_n \to 0$, für $n \to \infty$.
- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ divergent und hat die Häufungswerte $\{-1, 1\}$.
- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $a_n := \alpha + \frac{1}{n} + i\beta - \frac{i}{n}$. Dann konvergiert $a_n \to \alpha + i\beta$, für $n \to \infty$.
- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $a_n := \cos(n) + i\,\sin(n)$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ divergent.
- Jede konvergente Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathbb{K}$ ist auch **beschränkt**. Genauer gesagt, ist dann die *Menge* $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$ *der Folgeglieder* beschränkt, d.h.

$$\exists\, R < \infty\ \forall\, n \in \mathbb{N} : \quad |a_n| \ \leq\ R. \tag{V.10}$$

Ist nämlich $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, so können wir $\varepsilon := 1$ in (V.1) wählen und erhalten ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n| \ \leq\ |a| + |a_n - a| \ \leq\ |a| + 1. \tag{V.11}$$

Also gilt (V.10) mit

$$R \ :=\ \max\big\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\big\} \ <\ \infty. \tag{V.12}$$

- Die Konvergenz von komplexen Folgen ist gleichbedeutend mit der Konvergenz ihres Real- und Imaginärteils,

$$\begin{aligned}(z_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ ist konvergent} \quad &\Leftrightarrow \\ (\mathrm{Re}\{z_n\})_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ und } (\mathrm{Im}\{z_n\})_{n=1}^\infty &\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ sind beide konvergent.}\end{aligned} \tag{V.13}$$

Ist nämlich $|z_n - z| = \sqrt{\mathrm{Re}\{z_n - z\}^2 + \mathrm{Im}\{z_n - z\}^2} \leq \varepsilon$, so sind auch $|\mathrm{Re}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$ und $|\mathrm{Im}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$.

Sind umgekehrt $|\mathrm{Re}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$ und $|\mathrm{Im}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$, so ist $|z_n - z| \leq \sqrt{2}\varepsilon$.

Satz V.2. *Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ zwei konvergente Zahlenfolgen. Dann sind auch $(a_n \pm b_n)_{n=1}^\infty$, $(\alpha\, a_n)_{n=1}^\infty$ und $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^\infty$ konvergent, und es gelten*

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n \pm b_n\} = \lim_{n\to\infty} \{a_n\} \pm \lim_{n\to\infty} \{b_n\}, \tag{V.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} \{\alpha\, a_n\} = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \{a_n\}, \tag{V.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n \cdot b_n\} = \lim_{n\to\infty} \{a_n\} \cdot \lim_{n\to\infty} \{b_n\}. \tag{V.16}$$

Sind außerdem $b_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so ist auch $(a_n/b_n)_{n=1}^\infty$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{\lim_{n\to\infty}\{a_n\}}{\lim_{n\to\infty}\{b_n\}}. \tag{V.17}$$

Beweis. Wir zeigen nur (V.14) für die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n=1}^\infty$ und (V.15). Wir setzen $a := \lim_{n\to\infty}\{a_n\}$ und $b := \lim_{n\to\infty}\{b_n\}$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist auch $\varepsilon/(2 + |\alpha|) > 0$. Weil $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent ist, gibt es $n_0' \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, n \geq n_0' : \quad |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2 + |\alpha|}, \tag{V.18}$$

und weil $(b_n)_{n=1}^\infty$ konvergent ist, gibt es $n_0'' \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, n \geq n_0'' : \quad |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{V.19}$$

Setzen wir nun

$$n_0 := \max\{n_0', n_0''\}, \tag{V.20}$$

dann gilt für alle $n \geq n_0$, dass

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2 + |\alpha|} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{V.21}$$

und

$$|\alpha a_n - \alpha a| = |\alpha| \cdot |a_n - a| \leq \frac{|\alpha| \cdot \varepsilon}{2 + |\alpha|} \leq \varepsilon. \tag{V.22}$$

□

Bemerkungen und Beispiele.

- Mit Hilfe von Satz V.2 können wir viele Folgen sehr effizient auf Konvergenz untersuchen. Setzen wir beispielsweise

$$a_n := \frac{3 + 4n^2 - 2n^4}{n^4 + n} = \frac{3n^{-4} + 4n^{-2} - 2}{1 + n^{-3}}, \tag{V.23}$$

  so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \{a_n\} &= \frac{\lim_{n\to\infty}\{3n^{-4} + 4n^{-2} - 2\}}{\lim_{n\to\infty}\{1 + n^{-3}\}} = \frac{3 \cdot \lim_{n\to\infty}\{n^{-4}\} + 4 \cdot \lim_{n\to\infty}\{n^{-2}\} - 2}{1 + \lim_{n\to\infty}\{n^{-3}\}} \\ &= \frac{-2}{1} = -2. \end{aligned} \tag{V.24}$$

V.2 Reelle Folgen und Monotonie

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass der Konvergenzbegriff in $\mathbb{C}$ auf den in $\mathbb{R}$ zurückgeführt werden kann. Aus der Ordnungsstruktur in $\mathbb{R}$ erhalten wir allerdings noch weitere Aussagen, die keine Entsprechung in $\mathbb{C}$ haben.

Definition V.3. Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$

$$\text{heißt} \left\{ \begin{array}{l} \textbf{monoton steigend} \\ \textbf{streng monoton steigend} \\ \textbf{monoton fallend} \\ \textbf{streng monoton fallend} \end{array} \right\} :\Leftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : \left\{ \begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1}, \\ a_n < a_{n+1}, \\ a_n \geq a_{n+1}, \\ a_n > a_{n+1}. \end{array} \right. \tag{V.25}$$

Satz V.4. *Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

(i) *Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt und monoton steigend, so ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent.* (V.26)

(ii) *Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach unten beschränkt und monoton fallend, so ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent.* (V.27)

Beweis. Offensichtlich sind (i) und (ii) äquivalent, wie man aus Ersetzung von a_n durch $-a_n$ ersieht. Wir zeigen nur (i). Die Menge $A := \{a_1, a_2, a_3, \ldots, \}$ ist nach oben beschränkt, und wir setzen

$$a := \sup A. \tag{V.28}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Weil a das Supremum von A ist, gibt es nach Lemma III.9 ein $a_{n_0} \in A$, so dass

$$a_{n_0} \;\leq\; a \;\leq\; a_{n_0} + \varepsilon. \tag{V.29}$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt $a_{n_0} \leq a_n$ für $n \geq n_0$, und daher

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad 0 \;\leq\; a - a_n \;\leq\; a - a_{n_0} \;\leq\; \varepsilon. \tag{V.30}$$

Also ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a$. □

Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in [-R, R]^\mathbb{N}$ eine nach oben und unten durch $\pm R$, $0 < R < \infty$ beschränkte Folge. Setzen wir

$$A_m \;:=\; \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots\}, \tag{V.31}$$

so gilt

$$[-R, R] \;\supseteq\; A_1 \;\supseteq\; A_2 \;\supseteq\; A_3 \;\supseteq \ldots. \tag{V.32}$$

Setzen wir weiter, für $m \in \mathbb{N}$,

$$b_m := \inf A_m \quad \text{und} \quad c_m := \sup A_m, \tag{V.33}$$

so gilt

$$\forall\, m \in \mathbb{N}: \quad -R \;\le\; b_m \;\le\; c_m \;\le\; R. \tag{V.34}$$

Außerdem impliziert (V.31)-(V.32), dass

$$b_m \;=\; \inf A_m \;=\; \min\big\{a_m,\ \inf A_{m+1}\big\} \;\le\; \inf A_{m+1} \;=\; b_{m+1}, \tag{V.35}$$

$$c_m \;=\; \sup A_m \;=\; \max\big\{a_m,\ \sup A_{m+1}\big\} \;\ge\; \sup A_{m+1} \;=\; c_{m+1}. \tag{V.36}$$

Also sind beide Folgen, $(b_m)_{m=1}^\infty$ und $(c_m)_{m=1}^\infty$, beschränkt und monoton und daher auch konvergent in $\mathbb{R}$.

Definition V.5. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

(i.a) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nicht nach oben beschränkt, dann setzen wir

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;:=\; \overline{\lim_{n\to\infty}}\{a_n\} := \infty. \tag{V.37}$$

(Dabei ist " ∞ " nur als Symbol zu verstehen. $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$.)

(i.b) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt, und ist $(c_m)_{m=1}^\infty$, mit $c_m := \sup\{a_m, a_{m+1}, \ldots\}$, nicht nach unten beschränkt, so setzen wir

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;:=\; -\infty. \tag{V.38}$$

(i.c) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt, und ist $(c_m)_{m=1}^\infty$, mit $c_m := \sup\{a_m, a_{m+1}, \ldots\}$, nach unten beschränkt, so setzen wir

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;:=\; \lim_{m\to\infty}\{c_m\} \;=\; \lim_{m\to\infty}\big\{\sup\{a_n \,|\, n \ge m\}\big\}. \tag{V.39}$$

(ii)

$$\liminf_{n\to\infty}\{a_n\} \;:=\; \underline{\lim}_{n\to\infty}\{a_n\} \;:=\; -\limsup_{n\to\infty}\{-a_n\}. \tag{V.40}$$

$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\}$ heißt **Limes superior** von $(a_n)_{n=1}^\infty$,

$\liminf_{n\to\infty}\{a_n\}$ heißt **Limes inferior** von $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Sei $a_n := n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nicht nach oben beschränkt, und es gilt (i.a), also $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \infty$.

- Sei $a_n := -n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt. Weiterhin ist $c_m = \sup\big(\{-m, -m-1, -m-2, \ldots\}\big) = -m$, deshalb ist $(c_m)_{n=1}^\infty$ nicht nach unten beschränkt, und es gilt (i.b), also $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = -\infty$.

- Sei $a_n := (-1)^n\big(1 + \frac{1}{n}\big)$. Wegen $-2 \leq a_n \leq 2$ ist dann $(a_n)_{n=1}^\infty$ beschränkt, und es gilt (i.c). Weiterhin ist

$$\begin{aligned} c_{2k-1} &= \sup\Big\{ -\Big(\frac{2k}{2k-1}\Big),\ +\Big(\frac{2k+1}{2k}\Big),\ -\Big(\frac{2k+2}{2k+1}\Big),\ +\Big(\frac{2k+3}{2k+2}\Big), \ldots \Big\} = \frac{2k+1}{2k}, \qquad \text{(V.41)} \\ c_{2k} &= \sup\Big\{ \frac{2k+1}{2k},\ \frac{-2k-2}{2k+1},\ \frac{2k+2}{2k+1}, \ldots \Big\} = \frac{2k+1}{2k}, \end{aligned}$$

  also $c_m \to 1$, für $m \to \infty$, und $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = 1$.

- Genauso sieht man, dass $\liminf_{n\to\infty}\{a_n\} = -1$ für $a_n := (-1)^n\big(1 + \frac{1}{n}\big)$. Wir beobachten, dass -1 und 1 Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ sind.

- Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap (0,1)$.
  Dann sind $\liminf_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$ und $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = 1$.

Satz V.6. *Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

(i) Folgende Charakterisierungen sind gleichwertig:

$$\Big\{ \limsup_{n\to\infty}\{a_n\} =: \bar{a} \in \mathbb{R} \textit{ existiert (ist nicht gleich } -\infty \textit{ oder } \infty\textit{)} \Big\} \qquad \text{(V.42)}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \Big\{ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, m \geq n_0 : \quad a_m \leq \bar{a} + \varepsilon \qquad \textit{und} \\ & \forall \varepsilon > 0\ \exists (n_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{N}^\mathbb{N},\ n_j < n_{j+1}\ \forall j \in \mathbb{N} : \quad a_{n_j} \geq \bar{a} - \varepsilon \Big\} \qquad \text{(V.43)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Big\{ (a_n)_{n=1}^\infty \textit{ ist nach oben beschränkt und } \underline{a} \textit{ ist ihr größter Häufungswert} \Big\}. \qquad \text{(V.44)}$$

(ii) Folgende Charakterisierungen sind gleichwertig:

$$\Big\{ \liminf_{n\to\infty}\{a_n\} =: \underline{a} \in \mathbb{R} \textit{ existiert (ist nicht gleich } -\infty \textit{ oder } \infty\textit{)} \Big\} \qquad \text{(V.45)}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \Big\{ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, m \geq n_0 : \quad a_m \geq \underline{a} - \varepsilon \qquad \textit{und} \\ & \forall \varepsilon > 0\ \exists (n_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{N}^\mathbb{N},\ n_j < n_{j+1}\ \forall j \in \mathbb{N} : \quad a_{n_j} \leq \underline{a} + \varepsilon \Big\} \qquad \text{(V.46)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Big\{ (a_n)_{n=1}^\infty \textit{ ist nach unten beschränkt und } \underline{a} \textit{ ist ihr kleinster Häufungswert} \Big\}. \qquad \text{(V.47)}$$

Korollar V.7. *Ist $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ eine reelle Zahlenfolge, so gilt*

$$\Big[(a_n)_{n=1}^\infty \textit{ ist konvergent in } \mathbb{R} \Big] \quad \Leftrightarrow \quad \Big[\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \liminf_{n\to\infty}\{a_n\} \in \mathbb{R} \Big], \qquad \text{(V.48)}$$

und in diesem Fall gilt weiterhin

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \liminf_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{a_n\}. \qquad \text{(V.49)}$$

Beweis.
$\Rightarrow$: Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent mit Limes $a := \lim_{n\to\infty}\{a_n\}$, so ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach (V.10) auch beschränkt. Außerdem ist auch jede Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^\infty$ konvergent, und zwar mit gleichem Grenzwert, $\lim_{j\to\infty}\{a_{n_j}\} = a$. D.h. jedoch, dass jeder Häufungswert gleich a sein muss und nach (V.44) und (V.47) insbesondere $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = a = \liminf_{n\to\infty}\{a_n\}$ gilt.

$\Leftarrow$: Sind $(a_n)_{n=1}^\infty$ beschränkt und $a := \limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \liminf_{n\to\infty}\{a_n\} \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$, so gibt es nach (V.43) und (V.46) natürliche Zahlen $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall\, n \geq n_0' : \qquad a_n \;\leq\; a + \varepsilon, \tag{V.50}$$

$$\forall\, n \geq n_0'' : \qquad a_n \;\geq\; a - \varepsilon. \tag{V.51}$$

Für $n \geq \max\{n_0', n_0''\}$ ist dann also $-\varepsilon \leq a_n - a \leq \varepsilon$, und $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a$. □

V.3 Cauchy-Folgen

Definition V.8. Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ heißt **Cauchy-Folge**

$$:\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| \leq \varepsilon. \tag{V.52}$$

Cauchy-Folgen spielen in der Analysis eine große Rolle, weil man mit ihrer Hilfe den Konvergenzbegriff einführen kann, ohne expliziten Bezug auf den Grenzwert zu nehmen.

Lemma V.9. *Ist $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ eine konvergente Zahlenfolge, so ist sie auch eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $a := \lim_{n\to\infty}\{a_n\}$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n - a| \;\leq\; \varepsilon/2. \tag{V.53}$$

Also ist

$$\forall\, m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| \;\leq\; |a_m - a| \;+\; |a_n - a| \;\leq\; \varepsilon. \tag{V.54}$$

□

Satz V.10 (Cauchy-Kriterium)**.** *Ist $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge, so ist sie auch konvergent.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ eine reelle Cauchy-Folge. Wählen wir $\varepsilon := 1$, dann gibt es nach (V.52) ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass (mit $m := n_0$)

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n - a_{n_0}| \;\leq\; 1. \tag{V.55}$$

Also ist

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n| \;\leq\; |a_{n_0}| \;+\; |a_n - a_{n_0}| \;\leq\; |a_{n_0}| \;+\; 1, \tag{V.56}$$

und daher

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad |a_n| \;\leq\; 1 + \max\big\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\big\}, \tag{V.57}$$

d.h. $(a_n)_{n=1}^\infty$ ist nach oben und nach unten beschränkt. Nach Definition V.5 sind deshalb

$$\bar{a} := \limsup_{n\to\infty}\{a_n\}, \quad \underline{a} := \liminf_{n\to\infty}\{a_n\} \in \mathbb{R}, \tag{V.58}$$

und es genügt zu zeigen, dass $\bar{a} = \underline{a}$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gewählt. Weil $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n - a_{n_0}| \;\leq\; \varepsilon, \tag{V.59}$$

was

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad a_{n_0} - \varepsilon \;\leq\; a_n \;\leq\; a_{n_0} + \varepsilon \tag{V.60}$$

impliziert. Daher gilt auch,

$$a_{n_0} - \varepsilon \;\leq\; \inf_{n\geq n_0}\{a_n\} \;=:\; b_{n_0} \;\leq\; c_{n_0} \;:=\; \sup_{n\geq n_0}\{a_n\} \;\leq\; a_{n_0} + \varepsilon. \tag{V.61}$$

Aus (V.61) und der Tatsache, dass b_m monoton steigt und c_m monoton sinkt, erhalten wir

$$a_{n_0} - \varepsilon \;\leq\; b_{n_0} \;\leq\; \lim_{n\to\infty}\{b_m\} \;=\; \underline{a} \tag{V.62}$$

und

$$\bar{a} \;=\; \lim_{n\to\infty}\{c_m\} \;\leq\; c_{n_0} \;\leq\; a_{n_0} + \varepsilon, \tag{V.63}$$

also

$$0 \;\leq\; \bar{a} - \underline{a} \;\leq\; \big(a_{n_0} + \varepsilon\big) - \big(a_{n_0} - \varepsilon\big) \;=\; 2\varepsilon. \tag{V.64}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus, dass

$$\underline{a} \;=\; \bar{a}, \tag{V.65}$$

was nach Korollar V.7 die Konvergenz von $(a_n)_{n=1}^\infty$ zur Konsequenz hat.

Ist $(z_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ eine komplexe Cauchy-Folge mit $\mathrm{Re}\{z_n\} =: a_n$ und $\mathrm{Im}\{z_n\} =: b_n$, so sind $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wegen

$$|a_m - a_n| \;\leq\; |z_m - z_n| \quad \text{und} \quad |b_m - b_n| \;\leq\; |z_m - z_n| \tag{V.66}$$

zwei reelle Cauchy-Folgen, die nach dem ersten Beweisteil damit auch beide konvergent sind, was nach (V.13) die Konvergenz der komplexen Zahlenfolge $(z_n)_{n=1}^\infty$ nach sich zieht. $\square$

V.4 Ergänzungen

V.4.1 Vertauschung von Limiten mit Produkt und Quotient

Beweis. (Fortsetzung des Beweises von Satz V.2) Als konvergente Folgen sind $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ beschränkt. Es gibt also ein $R < \infty$, so dass

$$\max\Big\{ \sup_n |a_n|,\ \sup_n |b_n|,\ |a|,\ |b| \Big\} \ \le\ R. \tag{V.67}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \ge n_0' : \quad |a_n - a| \ \le\ \frac{\varepsilon}{2R}, \tag{V.68}$$

$$\forall\, n \ge n_0'' : \quad |b_n - b| \ \le\ \frac{\varepsilon}{2R}. \tag{V.69}$$

Setzen wir $n_0 := \max\{n_0', n_0''\}$, dann gilt, für alle $n \ge n_0$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| \ &=\ |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\le\ |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \ \le\ \frac{\varepsilon}{2R} \cdot R + R \cdot \frac{\varepsilon}{2R} \ =\ \varepsilon. \end{aligned} \tag{V.70}$$

Also ist $\lim_{n\to\infty}\{a_n b_n\} = ab$.
Für den Beweis von (V.17) zeigen wir zunächst, dass die Folge $(\frac{1}{b_n})_{n=1}^\infty$ beschränkt ist. Dazu setzen wir $\varepsilon' := \frac{|b|}{2}$. Aus der Konvergenz von $(b_n)_{n=1}^\infty$ folgt dann die Existenz von $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \ge \tilde{n}_0 : \quad |b_n - b| \ \le\ \varepsilon' \ =\ \frac{|b|}{2}. \tag{V.71}$$

Damit ist aber

$$\forall\, n \ge \tilde{n}_0 : \quad |b_n| \ =\ |b + b_n - b| \ \ge\ |b| - |b_n - b| \ \ge\ \frac{|b|}{2}. \tag{V.72}$$

Also ist

$$\max\left\{ \frac{|1|}{|b|}, \sup_n \left|\frac{1}{b_n}\right| \right\} \ \le\ R \ :=\ \frac{2}{|b|} \ +\ \max\left\{ \frac{|1|}{|b_k|} \ \Big|\ 1 \le k \ \le\ \tilde{n}_0 \right\} \ <\ \infty. \tag{V.73}$$

Für $\varepsilon > 0$ impliziert wiederum die Konvergenz von $(b_n)_{n=1}^\infty$ die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \ge n_0 : \quad |b - b_n| \ \le\ \frac{\varepsilon}{R^2}. \tag{V.74}$$

Somit ist dann

$$\forall n \ge n_0 : \quad \left| \frac{1}{|b|} - \frac{1}{b} \right| \ =\ \frac{|b - b_n|}{|b| \cdot |b_n|} \ \le\ R^2 \cdot \frac{\varepsilon}{R^2} \ =\ \varepsilon. \tag{V.75}$$

Also konvergiert $(\frac{1}{b_n})_{n=1}^\infty$ in $\mathbb{K}$ gegen $\frac{1}{b}$. Die Behauptung (V.17) folgt nun aus (V.16). $\square$

V.4.2 Limes Superior/Inferior als größter/kleinster Häufungswert

Beweis. (Beweis von Satz V.6) Aussagen (i) und (ii) sind offenbar wieder äquivalent, und wir zeigen nur (i). Dazu zeigen wir

$$\text{(V.42)} \quad \Rightarrow \quad \text{(V.43)} \quad \Rightarrow \quad \text{(V.44)} \quad \Rightarrow \quad \text{(V.42)}. \tag{V.76}$$

(V.42) $\Rightarrow$ (V.43): Sei $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \bar{a} \in \mathbb{R}$, und sei $\varepsilon > 0$. Nehmen wir an, es gäbe unendlich viele $a_n \geq \bar{a} + \varepsilon$, also eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ mit $a_{n_j} \geq \bar{a} + \varepsilon$. Wegen $n_j \to \infty$, für $j \to \infty$, gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n_j \geq m$ und deshalb ist

$$\forall\, m \in \mathbb{N}: \quad \sup_{n \geq m}\{a_n\} \;\geq\; a_{n_j} \;\geq\; \bar{a} + \varepsilon, \tag{V.77}$$

also

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;\geq\; \bar{a} + \varepsilon \;=\; \limsup_{n\to\infty}\{a_n\} + \varepsilon. \tag{V.78}$$

Widerspruch. Daraus folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0: \quad a_n \;\leq\; \bar{a} + \varepsilon. \tag{V.79}$$

Gäbe es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq \bar{a} - \varepsilon$, so müsste es $n_0' \in \mathbb{N}$ geben, so dass

$$\forall\, n_0 \geq n_0': \quad a_n \;\leq\; \bar{a} - \varepsilon. \tag{V.80}$$

Dann wäre aber

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;\leq\; \sup_{n \geq n_0'}\{a_n\} \;\leq\; \bar{a} - \varepsilon \;=\; \limsup_{n\to\infty}\{a_n\} - \varepsilon. \tag{V.81}$$

Widerspruch. Daraus folgt die Existenz einer Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ mit $a_{n_j} \geq \bar{a} - \varepsilon$, für alle $j \in \mathbb{N}$.
(V.43) $\Rightarrow$ (V.44): Seien $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ und $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ so, dass

$$\Big(\forall\, m \geq n_0: \quad a_m \;\leq\; \bar{a} + \varepsilon\Big) \wedge \Big(\forall\, j \in \mathbb{N}: \quad a_{n_j} \;\geq\; \bar{a} - \varepsilon\Big). \tag{V.82}$$

Dann gilt

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\, n_j \geq n_0: \quad |a_{n_j} - \bar{a}| \;\leq\; \varepsilon, \tag{V.83}$$

und $\bar{a}$ ist ein Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Außerdem ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nach (V.82) offensichtlich nach oben beschränkt.
Ist nun $b > \bar{a}$, so wählen wir $\varepsilon := \frac{b-\bar{a}}{3} > 0$. Nach (V.43) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m \geq n_0: \quad a_m \;\leq\; \bar{a} + \varepsilon \;=\; b - 2\varepsilon. \tag{V.84}$$

Also kann b kein Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sein. Somit ist $\bar{a}$ der größte Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(V.44) $\Rightarrow$ (V.42): Seien $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine nach oben beschränkte Folge und $\bar{a}$ ihr größter Häufungswert. Weil $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt ist, ist $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} < \infty$. Ist andererseits $\varepsilon > 0$, so gibt es eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^\infty$ mit $a_{n_j} \geq \bar{a} - \varepsilon$, für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;=\; \lim_{n\to\infty}\big(\sup_{m\geq n}\{a_m\}\big) \;\geq\; \lim_{n\to\infty}\big(\sup_{j\in\mathbb{N}:n_j\geq n}\{a_{n_j}\}\big) \;\geq\; \bar{a} - \varepsilon, \tag{V.85}$$

und mit $\varepsilon \to 0$ folgt

$$\bar{a} \;\leq\; \limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;<\; \infty. \tag{V.86}$$

Sei nun $c_n := \sup_{m\geq n}\{a_m\}$. Dann ist c_n monoton fallend und $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{c_n\}$. Weiterhin gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Index $m(n) \geq n$, so dass

$$c_n - \frac{1}{n} \;\leq\; a_{m(n)} \;\leq\; c_n, \tag{V.87}$$

nach Definition des Supremums. O.B.d.A. können wir $m(n) < m(n+1)$ annehmen und erhalten eine konvergente Teilfolge $(a_{m(n)})_{n=1}^\infty$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\{a_{m(n)}\} \;=\; \lim_{n\to\infty}\{c_n\} \;=\; \limsup_{n\to\infty}\{a_n\}. \tag{V.88}$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\}$ ein Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^\infty$. Weil $\bar{a}$ der größte Häufungswert ist, folgt

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;=\; \bar{a}. \tag{V.89}$$

$\square$

V.4.3 Konstruktion der Reellen Zahlen

In diesem Kapitel wollen wir die Konstruktion der reellen Zahlen vorstellen. Dabei kann man verschiedene Wege beschreiten - etwa den über die Dedekindschen Schnitte. Wir wählen jedoch einen andere Weg, der in die Funktionalanalysis weist: Wir führen die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen ein - ganz analog zur Vervollständigung normierter Vektorräume.

Äquivalenz rationaler Cauchy-Folgen

Definition V.11. Sei

$$\mathcal{R} := \left\{ (a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall\, k \in \mathbb{N}\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, m, n \geq n_0 : \; |a_m - a_n| \leq 10^{-k} \right\} \tag{V.90}$$

die Menge aller **rationalen Cauchy-Folgen**. Wir definieren eine Relation $\sim$: $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \{w, f\}$ durch

$$(a_n)_{n=1}^\infty \sim (b_n)_{n=1}^\infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, m, n \geq n_0 : \; |a_m - b_n| \;\leq\; 10^{-k}. \tag{V.91}$$

Gilt (V.90), so heißen $\underline{a} := (a_n)_{n=1}^\infty$ und $\underline{b} := (b_n)_{n=1}^\infty$ **äquivalent**.

Lemma V.12. $\sim$: $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \{w, f\}$ *ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Seien $\underline{a} := (a_n)_{n=1}^\infty$, $\underline{b} := (b_n)_{n=1}^\infty$, $\underline{c} := (c_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$.

Reflexivität: $\underline{a} \sim \underline{a}$ ist gleichwertig mit $\underline{a} \in \mathcal{R}$.

Symmetrie: Offensichtlich ist $\underline{a} \sim \underline{b}$ gleichwertig mit $\underline{b} \sim \underline{a}$.

Transitivität: Sei $k \in \mathbb{N}$, und gelten $\underline{a} \sim \underline{b}$ und $\underline{b} \sim \underline{c}$. Dann gibt es $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m, n \geq n_0' : \qquad |a_m - b_n| \;\leq\; 10^{-k-1}, \tag{V.92}$$

$$\forall\, n, \ell \geq n_0'' : \qquad |b_n - c_\ell| \;\leq\; 10^{-k-1}. \tag{V.93}$$

Mit $n_0 := \max(n_0', n_0'')$ ist damit

$$\forall\, m, \ell \geq n_0 : \quad |a_m - c_\ell| \;\leq\; |a_m - b_m| + |b_m - c_\ell| \;\leq\; 10^{-k-1} + 10^{-k-1} \;\leq\; 10^{-k}. \tag{V.94}$$

und daher gilt auch $\underline{a} \sim \underline{c}$.

□

Bemerkungen und Beispiele.

- Somit zerfällt $\mathcal{R}$ in disjunkte Äquivalenzklassen, die wir als **reelle Zahlen** bezeichnen,

$$\mathbb{R} \;:=\; \mathcal{R}/\sim . \tag{V.95}$$

- Ist $\underline{a} \in \mathcal{R}$, so bezeichnen wir die zugehörige Äquivalenzklasse mit $[\underline{a}]$.
- Die rationalen Zahlen sind in folgender Weise in $\mathbb{R}$ eingebettet: Zu $q \in \mathbb{Q}$ betrachten wir die konstante Folge $(q, q, q, \ldots) = (q)_{n=1}^\infty$. Offenbar ist $(q)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$, und wir identifizieren $q \in \mathbb{Q}$ mit der Äquivalenzklasse $[(q)_{n=1}^\infty] \in \mathbb{R}$.
- Wir schreiben insbesondere $[\underline{0}] := [(0)_{n=1}^\infty]$.

Die Ordnungsrelation auf $\mathbb{R} = \mathcal{R}/\sim$

Lemma V.13. *Sei $\underline{a} = (a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$ und $[\underline{a}] \neq [\underline{0}]$. Dann gilt*

$$\text{entweder} \quad [\underline{a}] > [\underline{0}] \quad :\Leftrightarrow \; \exists\, L, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \; a_n \geq 10^{-L}, \tag{V.96}$$

$$\text{oder} \quad [\underline{a}] < [\underline{0}] \quad :\Leftrightarrow \; \exists\, L, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \; a_n \leq -10^{-L}. \tag{V.97}$$

Beweis. Da $[\underline{a}] \neq [\underline{0}]$, ist $(a_n)_{n=1}^\infty \not\sim (0)_{n=1}^\infty$, und es gilt

$$\exists\, L \in \mathbb{N}\ \forall\, N_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, \tilde{n} \geq N_0 : \quad |a_{\tilde{n}} - 0| = |a_{\tilde{n}}| \geq 10^{-L+1}. \tag{V.98}$$

Wählen wir nun $k := L+1$, so ergibt sich aus der Tatsache, dass $\underline{a} \in \mathcal{R}$,

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| \leq 10^{-L}. \tag{V.99}$$

Jetzt wählen wir $N_0 := n_0$ in (V.98) und erhalten

$$\exists\, \tilde{n} \geq n_0 : \quad |a_{\tilde{n}}| \geq 10^{-L+1}. \tag{V.100}$$

Wir setzen dann $n := \tilde{n}$ in (V.99) und sehen, dass

$$\forall\, m \geq n_0 : \quad |a_m| \geq |a_{\tilde{n}}| - |a_m - a_{\tilde{n}}| \geq 10^{-L+1} - 10^{-L} = 9 \cdot 10^{-L}. \tag{V.101}$$

Ist $a_{n_0} > 0$, so ist $a_{n_0} = |a_{n_0}|$ und nach (V.98) gilt für alle $m \geq n_0$:

$$\begin{aligned} a_m &= a_{n_0} + a_m - a_{n_0} = |a_{n_0}| + a_m - a_{n_0} = |a_{n_0}| - |a_m - a_{n_0}| \\ &\geq 9 \cdot 10^{-L} - 10^{-L} = 8 \cdot 10^{-L} \geq 10^{-L}. \end{aligned} \tag{V.102}$$

Ist umgekehrt $a_{n_0} < 0$, so ist $a_{n_0} = -|a_{n_0}|$, und analog folgt

$$\forall\, m \geq n_0 : \quad a_m \leq -10^{-L}. \tag{V.103}$$

□

Lemma V.14. *Seien $\underline{a} := (a_n)_{n=1}^\infty$, $\underline{b} := (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$. Dann gilt*

$$\big(\underline{a} \sim \underline{b}\big) \iff \big(\underline{a} - \underline{b} \sim \underline{0}\big), \tag{V.104}$$

wobei $\underline{a} - \underline{b} := (a_n - b_n)_{n=1}^\infty$.

Beweis.
"$\Rightarrow$": Ist $\underline{a} \sim \underline{b}$, so gilt insbesondere

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n - b_n| \leq 10^{-k}, \tag{V.105}$$

also auch

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n \geq n_0 : \quad |(a_n - b_n) - 0| \leq 10^{-k}, \tag{V.106}$$

wobei 0 das m. Element der Folge $\underline{0}$ ist. Mit anderen Worten: $(\underline{a} - \underline{b}) \sim \underline{0}$.

"$\Longleftarrow$": Ist umgekehrt $(\underline{a}-\underline{b}) \sim \underline{0}$, so gilt (V.105). Weiterhin ist $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$, und daher gibt es $n_0' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m,n \geq n_0' : \quad |a_m - a_n| \;\leq\; 10^{-k}. \tag{V.107}$$

Für $m,n \geq \max(n_0, n_0')$ erhalten wir somit

$$|a_m - b_n| \;\leq\; |a_m - a_n| \;+\; |a_n - b_n| \;\leq\; 2 \cdot 10^{-k}, \tag{V.108}$$

d.h. $\underline{a} \sim \underline{b}$. □

Fügen wir Lemmata V.13 und V.14 zusammen und beachten Definition I.1, so erhalten wir

Korollar V.15. *Die reellen Zahlen $\mathbb{R} = \mathcal{R}/\sim$ sind bezüglich „<“ total geordnet, d.h. zu $\underline{a},\underline{b} \in \mathcal{R}$ gilt entweder $[\underline{a}] = [\underline{b}]$ oder $[\underline{a}] < [\underline{b}]$ oder $[\underline{a}] > [\underline{b}]$, und für $\underline{a},\underline{b},\underline{c} \in \mathcal{R}$ ist mit $[\underline{a}] < [\underline{b}]$ und $[\underline{b}] < [\underline{c}]$ auch $[\underline{a}] < [\underline{c}]$.*

Die Grundrechenarten

Definition V.16. Seien $\underline{a} = (a_n)_{n=1}^\infty,\ \underline{b} = (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$. Wir definieren

$$\underline{a} \pm \underline{b} \;:=\; (a_n \pm b_n)_{n=1}^\infty, \tag{V.109}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \;:=\; (a_n \cdot b_n)_{n=1}^\infty, \tag{V.110}$$

$$\frac{1}{\underline{b}} \;:=\; \left(\frac{1}{b_n + \mathrm{sgn}(b_n)\cdot 10^{-n}}\right)_{n=1}^\infty, \tag{V.111}$$

wobei $\mathrm{sgn} : \mathbb{Q} \to \{-1, 1\}$,

$$\mathrm{sgn}(q) := \begin{cases} 1, & \text{falls } q \geq 0, \\ -1, & \text{falls } q < 0. \end{cases} \tag{V.112}$$

Lemma V.17. *Seien $\underline{a} = (a_n)_{n=1}^\infty,\ \underline{b} = (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$. Dann sind $\underline{a} \pm \underline{b}$, $\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathcal{R}$, und für $\underline{b} \not\sim \underline{0}$ ist auch $\frac{1}{\underline{b}} \in \mathcal{R}$.*

Beweis. Da $\underline{a},\underline{b} \in \mathcal{R}$, gibt es zu $k \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, m,n \geq n_0' : \qquad |a_m - a_n| \;\leq\; 10^{-k-1}, \tag{V.113}$$

$$\forall\, m,n \geq n_0'' : \qquad |b_m - b_n| \;\leq\; 10^{-k-1}. \tag{V.114}$$

somit gilt für alle $m,n \geq \max(n_0', n_0'')$:

$$\begin{aligned} |(a_m \pm b_m)| \;&=\; |(a_m - a_n) \pm (b_m - b_n)| \\ &\leq |a_m - a_n| \;+\; |b_m - b_n| \;\leq\; 10^{-k-1} + 10^{-k-1} \;\leq\; 10^{-k}, \end{aligned} \tag{V.115}$$

also $\underline{a} \pm \underline{b} \in \mathcal{R}$. Mit $k := 1$ folgt aus $\underline{a},\underline{b} \in \mathcal{R}$, dass

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, m,n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n|,\ |b_m - b_n| \;\leq\; 10^{-1}. \tag{V.116}$$

Setzen wir $m := n_0$, so folgt daraus, dass

$$\forall\, m, n \geq n_0 : \quad |a_m| + |b_m| \;\leq\; |a_{n_0}| + |b_{n_0}| + 2 \cdot 10^{-1} \;\leq\; |a_{n_0}| + |b_{n_0}| + 1. \tag{V.117}$$

Mit

$$C \;:=\; \Big(\sum_{r=1}^{n_0} |a_r| + |b_r| \Big) + 1, \tag{V.118}$$

erhalten wir

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \;\leq\; C, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n| \;\leq\; C. \tag{V.119}$$

Wir beobachten nun, dass

$$\begin{aligned} |a_m b_m - a_n b_n| \;&= |(a_m - a_n) b_m \;+\; a_n (b_m - b_n)| \\ &\leq |a_m - a_n| \cdot |b_m| \;+\; |a_n| \cdot |b_m - b_n| \\ &\leq C \cdot \big(|a_m - a_n| \;+\; |b_m - b_n| \big). \end{aligned} \tag{V.120}$$

Seien nun $k \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \mathbb{N}$ so, dass $C \leq 10^{\ell}$. Dann gibt es $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m, n \geq n_0' : \qquad |a_m - a_n| \;\leq\; 10^{-k-\ell}, \tag{V.121}$$

$$\forall\, m, n \geq n_0'' : \qquad |b_m - b_n| \;\leq\; 10^{-k-\ell}. \tag{V.122}$$

Also ist mit (V.120)

$$\forall\, m, n \geq \max(n_0', n_0'') : \quad |a_m b_m - a_n b_n| \;\leq\; 10^{-k}, \tag{V.123}$$

d.h. $\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathcal{R}$.

Ist schließlich $\underline{b} \sim \underline{0}$, so existieren nach Lemma V.13 zwei Zahlen $L, n_0' \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, n \geq n_0' : \quad |b_n| \;\geq\; 10^{-L}. \tag{V.124}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gibt es $n_0'' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m, n \geq n_0'' : \quad |b_m - b_n| \;\leq\; 10^{-k-1-2L}, \tag{V.125}$$

und so erhalten wir für alle $m, n \geq \max(n_0, n_0') + 2L + k + 1 \;=:\; n_0$.

$$\begin{aligned} &\big| (b_m + \mathrm{sgn}(b_m) \cdot 10^{-m})^{-1} \;-\; (b_n + \mathrm{sgn}(b_n) \cdot 10^{-n})^{-1} \big| \\ &= \Big(\frac{1}{|b_m| + 10^{-m}} \Big) \cdot \Big(\frac{1}{|b_n| + 10^{-n}} \Big) \cdot \Big| b_m - b_n + \mathrm{sgn}(b_m) 10^{-m} - \mathrm{sgn}(b_n) 10^{-n} \Big| \\ &\leq 10^{-2L} \cdot \big(10^{-k-1-2L} + 10^{-k-1-2L} + 10^{-k-1-2L} \big) \;\leq\; 3 \cdot 10^{-k-1} \;\leq\; 10^{-k}. \end{aligned} \tag{V.126}$$

Also ist $\frac{1}{\underline{b}} \in \mathcal{R}$. □

Lemma V.18. *Seien* $\underline{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\underline{\hat{a}} = (\hat{a}_n)_{n=1}^{\infty}$, $\underline{b} = (b_n)_{n=1}^{\infty}$, $\underline{\hat{b}} = (\hat{b}_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$ *mit* $\underline{a} \sim \underline{\hat{a}}$ *und* $\underline{b} \sim \underline{\hat{b}}$. *Dann sind*

$$\underline{a} \pm \underline{b} \ \sim \ \underline{\hat{a}} \pm \underline{\hat{b}} \tag{V.127}$$

$$\underline{a} \ \cdot \ \underline{b} \ \sim \ \underline{\hat{a}} \ \cdot \ \underline{\hat{b}} \tag{V.128}$$

und, falls $\underline{b} \not\sim \underline{0}$,

$$\frac{1}{\underline{b}} \ \sim \ \frac{1}{\underline{\hat{b}}}. \tag{V.129}$$

Beweis. Wie in Lemma V.17 gibt es $L \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : |a_n|,\ |\hat{a}_n|,\ |b_n|,\ |\hat{b}_n| \ \leq \ 10^L. \tag{V.130}$$

Zu $k \in \mathbb{N}$ gibt es dann $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m, n \geq n_0 : |a_m - \hat{a}_n|,\ |b_m - \hat{b}_n| \ \leq \ 10^{-k-1-L}. \tag{V.131}$$

Also sind für alle $m, n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |(a_m \pm b_m) \ - \ (\hat{a}_n \pm \hat{b}_n)| \ &= |(a_m - \hat{a}_n) \pm (b_m - \hat{b}_n)| \\ &\leq 2 \cdot 10^{-k-1-L} \ \leq \ 10^{-k} \end{aligned} \tag{V.132}$$

und

$$\begin{aligned} |a_m \cdot b_m - \hat{a}_n \cdot \hat{b}_n| \ &= |(a_m - \hat{a}_n) b_m + \hat{a}_n (b_m - \hat{b}_n)| \\ &\leq |b_m| \cdot |a_m - \hat{a}_n| + |\hat{a}_n| \cdot |b_m - \hat{b}_n| \\ &\leq 2 \cdot 10^L \cdot 10^{-k-1-L} \ \leq \ 10^{-k}. \end{aligned} \tag{V.133}$$

Dies beweist (V.127) und (V.128). Glg (V.129) ist analog. □

Korollar V.19. *Die Verknüpfungen* $+,\ -,\ \cdot\ :\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$[\underline{a}] \pm [\underline{b}] \ := \ [\underline{a} \pm \underline{b}], \tag{V.134}$$

$$[\underline{a}] \cdot [\underline{b}] \ := \ [\underline{a} \ \cdot \ \underline{b}], \tag{V.135}$$

und die Abbildung $1/(\cdot) : \mathbb{R} \setminus \{[\underline{0}]\} \to \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{[\underline{b}]} \ := \left[\frac{1}{\underline{b}}\right] \tag{V.136}$$

sind wohldefiniert, d.h. unabhängig von den gewählten Repräsentanten $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{R}$.

Lemma V.20. $\mathbb{R}$ *ist bezüglich der in* (V.134)–(V.135) *und durch*

$$\forall\, [\underline{a}] \in \mathbb{R},\ [\underline{b}] \in \mathbb{R} \setminus \{[\underline{0}]\} : \quad \frac{\underline{a}}{\underline{b}} \ := \ \left[\underline{a} \cdot \frac{1}{\underline{b}}\right] \tag{V.137}$$

definerten Verknüpfungen ein Körper.

Beweis. Nachprüfen der Körperaxiome; dabei sind $[\underline{0}]$ und $[\underline{1}] = [(1)_{n=1}^{\infty}]$ die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation. □

Definition V.21. Für je zwei Elemente $[\underline{a}]$, $[\underline{b}] \in \mathbb{R}$ mit $[\underline{a}] \neq [\underline{b}]$ definieren wir

$$[\underline{a}] \; < \; [\underline{b}] \quad :\Leftrightarrow \quad [\underline{a} - \underline{b}] \; < \; 0, \tag{V.138}$$

$$[\underline{a}] \; > \; [\underline{b}] \quad :\Leftrightarrow \quad [\underline{a} - \underline{b}] \; > \; 0, \tag{V.139}$$

wobei die rechten Seiten in Lemma V.13 definiert sind.

Lemma V.22. $\mathbb{R}$ *ist bezüglich "$<$" ein geordneter Körper.*

Beweis. Nachprüfen der Definitionen III.1 einer *totalen Ordnung* und III.7 eines *geordneter Körpers.* □

Das Supremumsaxiom

Satz V.23. $\mathbb{R}$ *erfüllt das Supremumsaxiom.*

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine durch $[\underline{c}] \in \mathbb{R}$, $\underline{c} = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$ nach oben beschränkte Teilmenge, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass $A \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$.
Da $\underline{c} \in \mathcal{R}$, ist auch $\underline{c}$ beschränkt, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall \, [\underline{a}] \in A: \quad [\underline{a}] \; < \; \big[(10^N)_{n=1}^{\infty}\big]. \tag{V.140}$$

Wir setzen nun $b_1 := \beta_1 \cdot 10^{N-1}$, wobei $\beta_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so gewählt ist, dass

$$\exists \, x_1 \in A: \qquad x_1 \; \geq \; \Big[(\beta_1 \cdot 10^{N-1})_{n=1}^{\infty}\Big] \quad \text{und} \tag{V.141}$$

$$\forall \, x \in A: \qquad x \; < \; \Big[\big((\beta_1 + 1) \cdot 10^{N-1}\big)_{n=1}^{\infty}\Big]. \tag{V.142}$$

Anschließend setzen wir $b_2 := b_1 + \beta_2 \cdot 10^{N-2}$, wobei $\beta_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so gewählt ist, dass

$$\exists \, x_2 \in A: \quad x_2 \; \geq \; \big[(b_2)_{n=1}^{\infty}\big] \text{ und} \tag{V.143}$$

$$\forall \, x \in A: \quad x \; < \; \Big[\big(b_2 + 10^{N-2}\big)_{n=1}^{\infty}\Big], \tag{V.144}$$

u.s.w. Für allgemeines $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $b_k := b_{k-1} + \beta_k \cdot 10^{N-k}$, wobei $\beta_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so gewählt ist, dass

$$\exists \, x_k \in A: \quad x_k \; \geq \; \big[(b_k)_{n=1}^{\infty}\big] \text{ und} \tag{V.145}$$

$$\forall \, x \in A: \quad x \; < \; \Big[(b_k + 10^{N-k})_{n=1}^{\infty}\Big]. \tag{V.146}$$

Die so gebildete Folge $(b_n) + n = 1^{\infty} =: \underline{b}$ ist offenbar eine Cauchy-Folge, denn für $m > n \geq n_0$ ist

$$|b_m - b_n| \; = \; \left| \sum_{\ell=n+1}^{m} \beta_\ell \cdot 10^{N-\ell} \right| \; \leq \; 10^{N-n} \; \leq \; 10^{N-n_0}. \tag{V.147}$$

Sei nun $\underline{d} := (d_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$ mit $[\underline{d}] < [\underline{b}]$, d.h. $[\underline{b} - \underline{d}] > [\underline{0}]$. Nach Lemma V.13 gibt es dann $m_0, M \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, m > n \geq m_0 : \quad d_m \;<\; b_m - 10^{-M} \;\leq\; b_n - (10^{-M} - 10^{N-n}), \tag{V.148}$$

wie in (V.147). Für $n_0 := m_0 + N + M + 1$ ergibt dies

$$\forall\, m > n_0 : \quad d_m \;\geq\; b_{n_0} - 10^{-M-1}, \tag{V.149}$$

was

$$[\underline{d}] \;\leq\; \Big[\big(b_{n_0} - 10^{-M-1}\big)_{n=1}^{\infty}\Big] \;\leq\; x_{n_0} - \Big[\big(10^{-M-1}\big)_{n=1}^{\infty}\Big] \;<\; x_{n_0} \;\in\; A \tag{V.150}$$

impliziert. Also ist $[\underline{d}]$ keine obere Schranke an A.
Sei schließlich $x = [\underline{a}] \in A$, und nehmen wir an, dass $[\underline{a}] > [\underline{b}]$, also $[\underline{a} - \underline{b}] > [\underline{0}]$. Dann gibt es $m_0, M \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, m > k \geq m_0 : \quad a_m \;>\; b_m + 10^{-M} \;\geq\; b_k + 10^{-M} - 10^{N-k}. \tag{V.151}$$

Für $k := M + N + 1 + m_0$ bedeutete dies, dass für alle $m > k$

$$\begin{aligned} a_m \;&\geq b_k + 10^{-M} - 10^{-M-1} \;\geq\; b_k + 9 \cdot 10^{-M-1} \\ &= b_k + 9 \cdot 10^{m_0+N-1} \;\geq\; b_k + 10^{N-k}, \end{aligned} \tag{V.152}$$

was

$$x \;=\; [\underline{a}] \;\geq\; \Big[\big(b_k + 10^{N-k}\big)_{n=1}^{\infty}\Big] \tag{V.153}$$

impliziert. Gleichung (V.153) steht jedoch in Widerspruch zu (V.146). Also gilt $[\underline{a}] \leq [\underline{b}]$.
Zusammenfassend erhalten wir

$$\forall\, [\underline{a}] \in A : \qquad [\underline{a}] \;\leq\; [\underline{b}], \tag{V.154}$$

$$\forall\, [\underline{d}] < [\underline{b}] \;\; \exists\, [\underline{a}](= x_{n_0}) \in A : \;\; [\underline{d}] \;<\; [\underline{a}]. \tag{V.155}$$

Also ist $[\underline{b}] = \sup A$. $\square$

Kapitel VI

Reihen

VI.1 Definitionen und Beispiele

Definition VI.1. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ eine Zahlenfolge. Dann heißt die Folge $(s_m)_{m=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$, mit

$$s_m := \sum_{n=1}^m a_n, \tag{VI.1}$$

Reihe in $\mathbb{K}$. Ist $(s_m)_{m=1}^\infty$ konvergent, so schreiben wir

$$\sum_{n=1}^\infty a_n := \lim_{m\to\infty}\{s_m\} \;=\; \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^m a_n\right\}. \tag{VI.2}$$

Eine Umschreibung des Cauchy-Kriteriums, Satz V.10, und des Monotoniekriteriums, Satz V.4, von Folgen auf Reihen liefert

Lemma VI.2. *Sei $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ eine Reihe in $\mathbb{K}$. Dann gilt*

$$\Big(\sum_{n=1}^m a_n\Big)_{m=1}^\infty \textit{ ist konvergent } \Leftrightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, m \geq n \geq n_0 : \left|\sum_{k=n}^m a_k\right| \;\leq\; \varepsilon. \tag{VI.3}$$

Lemma VI.3. *Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen. Dann gilt*

$$\left\{\Big(\sum_{n=1}^m a_n\Big)_{m=1}^\infty \textit{ ist konvergent in } \mathbb{R}_0^+\right\} \Leftrightarrow \left\{\Big(\sum_{n=1}^m a_n\Big)_{m=1}^\infty \textit{ ist nach oben beschränkt}\right\}. \tag{VI.4}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir beachten, dass man nicht nur Reihen als spezielle Folgen gewinnen kann, sondern dass man auch umgekehrt Folgen als spezielle Reihen auffassen kann, nämlich mit $a_n := s_n - s_{n-1}$.

- Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $0 \leq |\lambda| < 1$. Dann ist die **geometrische Reihe** $\big(\sum_{n=0}^m \lambda^n\big)_{m=0}^\infty$ konvergent in $\mathbb{K}$, und es gilt

$$\sum_{n=0}^\infty \lambda^n \;=\; \frac{1}{1-\lambda}. \tag{VI.5}$$

Aus

$$(1-\lambda)\Big(\sum_{n=0}^m \lambda^n\Big) \;=\; \sum_{n=0}^m \lambda^n - \sum_{n=0}^m \lambda^{n+1} \;=\; \sum_{n=0}^m \lambda^n - \sum_{\tilde{n}=1}^{m+1} \lambda^{\tilde{n}} \;=\; 1 - \lambda^{m+1} \tag{VI.6}$$

folgt nämlich

$$s_m \;:=\; \sum_{n=0}^m \lambda^n \;=\; \frac{1-\lambda^{m+1}}{1-\lambda} \;\to\; \frac{1}{1-\lambda}, \tag{VI.7}$$

für $m \to \infty$.

Satz VI.4 (Cauchy)**.** *Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Dann gilt*

$$\Big\{\Big(\sum_{n=1}^m a_n\Big)_{m=1}^\infty \textit{ ist konvergent in } \mathbb{R}_0^+\Big\} \;\Leftrightarrow\; \Big\{\Big(\sum_{k=0}^\ell 2^k \cdot a_{2^k}\Big)_{\ell=1}^\infty \textit{ ist konvergent in } \mathbb{R}_0^+\Big\}. \tag{VI.8}$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$d_k \;:=\; \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \;=\; a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}. \tag{VI.9}$$

Da die Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ monoton fallend ist, folgt dass

$$d_k \;\leq\; 2^k \max\big\{a_{2^k}, \ldots, a_{2^{k+1}-1}\big\} \;=\; 2^k\, a_{2^k}, \tag{VI.10}$$

und für $m = 2^{\ell+1} - 1$ erhalten wir

$$\sum_{n=1}^m a_n \;=\; \sum_{k=0}^\ell d_k \;\leq\; \sum_{k=0}^\ell 2^k\, a_{2^k}. \tag{VI.11}$$

Aus der Monotonie der $(a_n)_{n=1}^\infty$ folgt aber umgekehrt auch, dass

$$d_k \;\geq\; 2^k \min\big\{a_{2^k}, \ldots, a_{2^{k+1}-1}\big\} \;\geq\; 2^k\, a_{2^{k+1}} = \tfrac{1}{2} 2^{k+1}\, a_{2^{k+1}}, \tag{VI.12}$$

und für $m = 2^{\ell+1} - 1$ erhalten wir

$$\sum_{n=1}^m a_n \;=\; \sum_{k=0}^\ell d_k \;\geq\; \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\ell+1} 2^k\, a_{2^k}. \tag{VI.13}$$

Glg. (VI.11) und (VI.13) bedeuten aber, dass $\Big(\sum_{n=1}^m a_n\Big)_{m=1}^\infty$ genau dann nach oben beschränkt ist, wenn $\Big(\sum_{k=0}^\ell 2^k \cdot a_{2^k}\Big)_{\ell=1}^\infty$ nach oben beschränkt ist. Nach Lemma VI.3 ist dann auch die Konvergenz von $\Big(\sum_{n=1}^m a_n\Big)_{m=1}^\infty$ gleichwertig mit der Konvergenz von $\Big(\sum_{k=0}^\ell 2^k \cdot a_{2^k}\Big)_{\ell=1}^\infty$. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir untersuchen die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n(\alpha)\big)_{m=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^{\mathbb{N}}$, wobei $\alpha > 0$ und $a_n(\alpha) = n^{-\alpha}$, mit Hilfe des Satzes VI.4 von Cauchy auf Konvergenz. Da $2^k a_{2^k}(\alpha) = 2^{(1-\alpha)k}$, ist diese Reihe offensichtlich konvergent, wenn $\alpha > 1$ und divergent, wenn $0 < \alpha \leq 1$.

- Insbesondere ist die **harmonische Reihe** $\big(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n}\big)_{m=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^{\mathbb{N}}$ divergent. In der Tat können wir später leicht mit Hilfe der Integralrechnung zeigen, dass $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \approx \ln(m)$ unbeschränkt wächst, falls $m \to \infty$.

VI.2 Absolute Konvergenz

Definition VI.5. Eine Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ in $\mathbb{K}$ heißt **absolut konvergent**

$$:\Leftrightarrow \qquad \text{Die Reihe } \Big(\sum_{n=1}^m |a_n|\Big)_{m=1}^\infty \text{ ist konvergent in } \mathbb{R}_0^+. \tag{VI.14}$$

Lemma VI.6. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Ist die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ absolut konvergent, so ist $\big(\sum_{n=1}^m |a_n|\big)_{m=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^{\mathbb{N}}$ konvergent. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m \geq n \geq n_0 : \quad \sum_{k=n}^m |a_k| \;\leq\; \varepsilon. \tag{VI.15}$$

Mit der Dreiecksungleichung gilt dann auch

$$\forall\, m \geq n \geq n_0 : \quad \Big|\sum_{k=n}^m a_k\Big| \;\leq\; \sum_{k=n}^m |a_k| \;\leq\; \varepsilon, \tag{VI.16}$$

also ist nach Lemma VI.2 $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ konvergent in $\mathbb{K}$. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Nicht jede konvergente Reihe ist auch absolut konvergent. Um dies zu sehen betrachten wir die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ mit $a_n := (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$.

  Wir beobachten, dass für $m = 2k$ gilt

$$\begin{aligned} s_{2k} &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2k-1} - \tfrac{1}{2k} \\ &\leq 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2k-1} - \tfrac{1}{2k} + \underbrace{\tfrac{1}{2k+1} - \tfrac{1}{2k+2}}_{\geq 0} \;=\; s_{2k+2}. \end{aligned} \tag{VI.17}$$

  Also ist die Folge $(s_{2k})_{k=1}^\infty$ der Summen mit gerader Zahl von Summanden monoton wachsend. Außerdem ist wegen $2\ell(2\ell-1) \geq \ell^2$

$$s_{2k} \;=\; \sum_{\ell=1}^k \Big(\frac{1}{2\ell-1} - \frac{1}{2\ell}\Big) \;=\; \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{2\ell(2\ell-1)} \;\leq\; \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\ell^2} \;\leq\; \text{const} \;<\; \infty \tag{VI.18}$$

beschränkt, da die Reihe $\big(\sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell^2}\big)_{k=1}^{\infty}$ konvergent ist. Somit ist die Folge $(s_{2k})_{k=1}^{\infty}$ konvergent.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $(s_{2k})_{k=1}^{\infty}$ konvergent ist, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$\forall\, \ell \geq k \geq k_0 : \quad |s_{2\ell} - s_{2k}| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3}. \tag{VI.19}$$

Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $n_0 \geq 2k_0 + 2$ und $\frac{1}{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Sind nun $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n \geq n_0$, so gibt es eindeutige Zahlen $\ell, k \in \mathbb{N}$, $\ell \geq k \geq k_0$ und $\sigma, \tau \in \{0, 1\}$, sodass $m = 2\ell + \sigma$ und $n = 2k + \tau$ gelten. Damit erhalten wir aus (VI.19)

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| \;&= |s_{2\ell+\sigma} - s_{2k+\tau}| \;\leq\; |s_{2\ell+\sigma} - s_{2\ell}| + |s_{2\ell} - s_{2k}| + |s_{2k} - s_{2k+\tau}| \\ &\leq \frac{1}{2\ell} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2k} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \;\leq\; \varepsilon. \end{aligned} \tag{VI.20}$$

Also ist $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge und daher auch konvergent.

- Andererseits ist $\big(\sum_{n=1}^{m} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\big)_{m=1}^{\infty}$ nicht absolut konvergent, denn $\big(\sum_{n=1}^{m} |(-1)^{n+1} \frac{1}{n}|\big)_{m=1}^{\infty} = \big(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\big)_{m=1}^{\infty}$ ist divergent.

Eine fundamentale Eigenschaft absolut konvergenter Reihen ist die Tatsache, dass auch "Umordnungen" absolut konvergieren, und zwar alle gegen denselben Grenzwert.

Definition VI.7. Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ Zahlenfolgen. Die Reihe $\big(\sum_{n=1}^{m} b_n\big)_{m=1}^{\infty}$ heißt **Umordnung der Reihe** $\big(\sum_{n=1}^{m} a_n\big)_{m=1}^{\infty}$ $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, \text{Bijektion } \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad b_n \;=\; a_{\sigma(n)}. \tag{VI.21}$$

Satz VI.8 (Großer Umordnungssatz)**.** *Seien* $\big(\sum_{n=1}^{m} a_n\big)_{m=1}^{\infty}$ *eine Reihe in* $\mathbb{K}$ *und* $\big(\sum_{n=1}^{m} b_n\big)_{m=1}^{\infty}$ *eine Umordnung von* $\big(\sum_{n=1}^{m} a_n\big)_{m=1}^{\infty}$*. Dann gelten*

$$(i) \quad \Big\{ \Big(\sum_{n=1}^{m} a_n \Big)_{m=1}^{\infty} \textit{ist abs. konv.} \Big\} \quad \Leftrightarrow \quad \Big\{ \Big(\sum_{n=1}^{m} b_n \Big) \textit{ist abs. konv.} \Big\}, \tag{VI.22}$$

$$(ii) \quad \Big\{ \Big(\sum_{n=1}^{m} a_n \Big)_{m=1}^{\infty} \textit{ist absolut konvergent} \Big\} \quad \Rightarrow \quad \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Big\}. \tag{VI.23}$$

Beweis. Seien $\sigma, \tau := \sigma^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektionen, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad a_{\sigma(n)} \;=\; b_n, \quad a_n \;=\; b_{\tau(n)}. \tag{VI.24}$$

Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$A(m) \;:=\; \max\big\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(m)\big\}, \tag{VI.25}$$

$$B(m) \;:=\; \max\big\{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(m)\big\}. \tag{VI.26}$$

Zu (i): Wir betrachten nun die monoton steigenden Folgen $(s_m)_{m=1}^\infty, (t_m)_{m=1}^\infty$ in $\mathbb{R}$, wobei

$$s_m := \sum_{n=1}^m |a_n|, \qquad t_m := \sum_{n=1}^m |b_n|. \tag{VI.27}$$

Wir beobachten, dass, für jedes $m \in \mathbb{N}$,

$$t_m := \sum_{n=1}^m |a_{\sigma(n)}| \leq \sum_{n=1}^{A(m)} |a_n| = s_{A(m)}, \tag{VI.28}$$

$$s_m := \sum_{n=1}^m |b_{\tau(n)}| \leq \sum_{n=1}^{B(m)} |b_n| = t_{B(m)}. \tag{VI.29}$$

Somit ist

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\{t_m\} \leq \sup_{m\in\mathbb{N}}\{s_{A(m)}\} \leq \sup_{m\in\mathbb{N}}\{s_m\} \leq \sup_{m\in\mathbb{N}}\{t_{B(m)}\} \leq \sup_{m\in\mathbb{N}}\{t_m\}, \tag{VI.30}$$

also

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\{s_m\} = \sup_{m\in\mathbb{N}}\{t_m\}, \tag{VI.31}$$

und $(s_m)_{m=1}^\infty$ ist genau dann konvergent, wenn $(t_m)_{m=1}^\infty$ konvergent ist, nach Satz V.4 (i).
Zu (ii): Da $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion ist, muss $B(m) \geq m$ und

$$\big\{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(m)\big\} \subseteq \{1, 2, \ldots, B(m)\} \tag{VI.32}$$

gelten, was

$$\begin{aligned}\{1, 2, \ldots, m\} &= \big\{\sigma[\tau(1)], \sigma[\tau(2)], \ldots, \sigma[\tau(m)]\big\} \\ &\subseteq \mathcal{Q}_m := \big\{\sigma[1], \sigma[2], \ldots, \sigma[B(m)]\big\} \subseteq \big\{1, 2, \ldots, A[B(m)]\big\}\end{aligned} \tag{VI.33}$$

impliziert. Also ist

$$\sum_{n=1}^{B(m)} b_n - \sum_{n=1}^m a_n = \sum_{n=1}^{B(m)} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^m a_n = \sum_{k\in\mathcal{Q}_m} a_k - \sum_{k\in\{1,\ldots,m\}} a_k = \sum_{k\in\mathcal{Q}_m\setminus\{1,\ldots,m\}} a_k, \tag{VI.34}$$

und wegen $\mathcal{Q}_m \subseteq \{1, 2, \ldots, A[B(m)]\}$ ist dann

$$\Big|\sum_{n=1}^{B(m)} b_n - \sum_{n=1}^m a_n\Big| \leq \sum_{k\in\mathcal{Q}_m\setminus\{1,\ldots,m\}} |a_k| \leq \sum_{n=m+1}^{A[B(m)]} |a_n| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|. \tag{VI.35}$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, und ist $m_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\forall\, m \geq m_0 : \quad \sum_{n=m_0+1}^m |a_n|, \quad \sum_{n=m_0+1}^m |b_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{VI.36}$$

dann sind, wegen $B(m) \geq m$,

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m_0} a_n \Big|, \quad \Big| \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{B(m_0)} b_n \Big| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3}. \tag{VI.37}$$

Also ist mit (VI.37) und (VI.35))

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big| \;&\leq\; \Big| \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{B(m_0)} b_n \Big| \;+\; \Big| \sum_{n=1}^{B(m_0)} b_n - \sum_{n=1}^{m_0} a_n \Big| \;+\; \Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big| \\ &\leq\; \frac{2\varepsilon}{3} \;+\; \sum_{n=m_0+1}^{\infty} |a_n| \;\leq\; \varepsilon. \end{aligned} \tag{VI.38}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt $\big| \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \big| = 0$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{VI.39}$$

$\square$

Umgekehrt zeigt der nun folgende Satz, dass jede konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ so umgeordnet werden kann, dass sie gegen jeden beliebigen vorgegeben Grenzwert konvergiert.

Satz VI.9. *Sei $\big(\sum_{n=1}^{m} a_n \big)_{m=1}^{\infty}$ eine Reihe in $\mathbb{R}$, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta$, beliebig. Dann gibt es eine Umordnung $\big(\sum_{n=1}^{m} b_n \big)_{m=1}^{\infty}$ von $\big(\sum_{n=1}^{m} a_n \big)_{m=1}^{\infty}$, so dass*

$$\liminf_{m \to \infty} \{t_m\} \;=\; \alpha, \quad \limsup_{m \to \infty} \{t_m\} \;=\; \beta, \tag{VI.40}$$

wobei $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ die Folge in $\mathbb{R}$ mit $t_m := \sum_{n=1}^{m} b_n$ ist.

Eine Anwendung von Satz VI.8 ist das *Cauchy-Produkt.*
Dazu betrachten wir zwei Zahlenfolgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und die zugehörigen Reihen $\big(\sum_{n=0}^{m} a_n \big)_{m=1}^{\infty}$, $\big(\sum_{n=0}^{m} b_n \big)_{m=1}^{\infty}$ in $\mathbb{K}$, die wir als absolut konvergent annehmen. Wir bilden nun

$$c_0 \;:=\; a_0 b_0, \tag{VI.41}$$

$$c_1 \;:=\; a_0 b_1 \;+\; a_1 b_0, \tag{VI.42}$$

$$c_2 \;:=\; a_0 b_2 \;+\; a_1 b_1 \;+\; a_2 b_0, \tag{VI.43}$$

$$\vdots$$

$$c_n \;:=\; a_0 b_n \;+\; a_1 b_{n-1} \;+ \ldots +\; a_n b_0 \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}, \tag{VI.44}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, und betrachten die Reihe $\big(\sum_{n=0}^{m} c_n \big)_{m=1}^{\infty}$, das Cauchy-Produkt der Reihen $\big(\sum_{n=0}^{m} a_n \big)_{m=1}^{\infty}$ und $\big(\sum_{n=0}^{m} b_n \big)_{m=1}^{\infty}$.

Satz VI.10 (Cauchy-Produkt)**.** *Seien* $\big(\sum_{n=0}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$, $\big(\sum_{n=0}^m b_n\big)_{m=1}^\infty$ *zwei absolut konvergente Reihen in* $\mathbb{K}$ *und* $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, *für* $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann ist das* ***Cauchy-Produkt*** $\big(\sum_{n=0}^m c_n\big)_{m=1}^\infty$ *absolut konvergent in* $\mathbb{K}$, *und es gilt*

$$\sum_{n=0}^\infty c_n \;=\; \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \;=\; \Big(\sum_{n=0}^\infty a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big). \tag{VI.45}$$

Beweis. Seien $a := \sum_{n=0}^\infty a_n$, $b := \sum_{n=0}^\infty b_n$, $A := \sum_{n=0}^\infty |a_n|$, $B := \sum_{n=0}^\infty |b_n|$. Sei weiterhin $\varepsilon > 0$. Wegen der absoluten Konvergenz von $\big(\sum_{n=0}^\infty a_n\big)_{m=0}^\infty$ und $\big(\sum_{n=0}^\infty b_n\big)_{m=0}^\infty$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass, für alle $n \geq n_0$,

$$\Big|a - \sum_{k=0}^n a_k\Big| \;\leq \varepsilon, \qquad \Big|b - \sum_{k=0}^n b_k\Big| \;\leq\; \varepsilon, \tag{VI.46}$$

$$\Big|A - \sum_{k=0}^n |a_k|\Big| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{A+B+1}, \qquad \Big|B - \sum_{k=0}^n |b_k|\Big| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{A+B+1}. \tag{VI.47}$$

Wir beobachten nun, dass für $M \geq 2m$, $M, m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=2m}^M |c_n| \;\leq\; \sum_{n=2m}^M \sum_{k=0}^n |a_k|\,|b_{n-k}| \;\leq\; \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=m}^M |a_\alpha|\,|b_\beta| \;+\; \sum_{\alpha=m}^M \sum_{\beta=0}^M |a_\alpha|\,|b_\beta|. \tag{VI.48}$$

Also ist, für $M \geq 2m \geq m \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2m}^M |c_n| \;&\leq\; \underbrace{\Big(\sum_{\alpha=0}^m |a_\alpha|\Big)}_{\leq A} \underbrace{\Big(\sum_{\beta=m}^M |b_\beta|\Big)}_{\leq \varepsilon/(A+B+1)} \;+\; \underbrace{\Big(\sum_{\alpha=m}^M |a_\alpha|\Big)}_{\leq \varepsilon/(A+B+1)} \underbrace{\Big(\sum_{\beta=0}^m |b_\beta|\Big)}_{\leq B} \\ &\leq (A+B) \cdot \Big(\frac{\varepsilon}{A+B+1}\Big) \;\leq\; \varepsilon.\end{aligned} \tag{VI.49}$$

Somit ist $\big(\sum_{n=0}^m c_n\big)_{m=0}^\infty$ absolut konvergent. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\Big|ab - \sum_{n=0}^{2m} c_n\Big| \;&\leq \Big|ab - \Big(\sum_{\alpha=0}^m a_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta=0}^m b_\beta\Big)\Big| \;+\; \Big|\Big(\sum_{\alpha=0}^m a_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta=0}^m b_\beta\Big) \;-\; \sum_{n=0}^{2m} c_n\Big| \\ &\leq \Big|a - \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha\Big| \cdot |b| \;+\; \Big|\sum_{\alpha=0}^m a_\alpha\Big| \cdot \Big|b - \sum_{\beta=0}^m b_\beta\Big| \\ &\quad + \;\Big(\sum_{\alpha=0}^m |a_\alpha|\Big) \Big(\sum_{\beta=m}^{2m} |b_\beta|\Big) \;+\; \Big(\sum_{\alpha=m}^{2m} |a_\alpha|\Big) \Big(\sum_{\beta=0}^m |b_\beta|\Big) \\ &\leq \varepsilon\big(|b| + A + A + B\big) \;\leq\; 2\big(A+B\big)\varepsilon,\end{aligned} \tag{VI.50}$$

also gilt auch (VI.45). ∎

VI.3 Konvergenzkriterien

Für die Überprüfung, ob eine Reihe konvergent oder divergent ist, diskutieren wir drei Konvergenzkriterien: das Majorantenkriterium, das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium.

Satz VI.11 (Majorantenkriterium)**.**

(i) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ *eine Zahlenfolge und ist* $(b_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ *eine Folge nichtnegativer Zahlen, sodass* $\big(\sum_{n=1}^m b_n\big)_{m=1}^\infty$ *(absolut) konvergent ist und* $|a_n| \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, so ist auch* $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ *absolut konvergent in* $\mathbb{K}$*.*

(ii) Sind $(a_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ *und* $(b_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ *zwei Folgen nichtnegativer Zahlen, sodass* $\big(\sum_{n=1}^m b_n\big)_{m=1}^\infty$ *divergent ist und* $a_n \geq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, so ist auch* $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ *divergent.*

Beweis.
(ii) Die Reihen über $(a_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ und $(b_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ sind jeweils genau dann konvergent, wenn $(s_m)_{m=1}^\infty$ bzw. $(t_m)_{m=1}^\infty$ nach oben beschränkt ist, wobei $s_m := \sum_{n=0}^m a_n$ und $t_m := \sum_{n=0}^m b_n$. Wegen der Divergenz von $\big(\sum_{n=1}^m b_n\big)_{m=1}^\infty$ ist $(t_m)_{m=1}^\infty$ unbeschränkt somit auch $(s_m)_{m=1}^\infty$, da $s_m \geq t_m \geq 0$. Also ist auch $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ divergent.
Zu *(i)*: Für $\varepsilon > 0$ gibt es, wegen der Konvergenz von $\big(\sum_{n=1}^m b_n\big)_{m=1}^\infty$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m \geq n \geq n_0: \quad \sum_{k=n}^m |a_k| \;\leq\; \sum_{k=n}^m b_k \;\leq\; \varepsilon. \tag{VI.51}$$

Also ist $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ absolut konvergent und somit auch konvergent, nach Lemma VI.6. □

Satz VI.12 (Wurzelkriterium)**.** *Sei* $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ *eine Zahlenfolge.*

(i) Gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \big\{ \sqrt[n]{|a_n|} \big\} \;<\; 1, \tag{VI.52}$$

so ist die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ *absolut konvergent in* $\mathbb{K}$*.*

(ii) Gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \big\{ \sqrt[n]{|a_n|} \big\} \;>\; 1, \tag{VI.53}$$

so ist die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ *divergent in* $\mathbb{K}$*.*

Beweis.
Zu *(i)* Sei $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \big\{ \sqrt[n]{|a_n|} \big\} < 1$. Für $\varepsilon := \frac{1-\alpha}{2} > 0$ gibt es dann nach Satz V.6 *(ii)* ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0: \quad \sqrt[n]{|a_n|} \;\leq\; \alpha + \varepsilon \;=\; \frac{1+\alpha}{2} \;<\; 1. \tag{VI.54}$$

Also ist, für alle $m \geq n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| = \sum_{k=n}^{m} \big(\sqrt[k]{|a_k|}\big)^k \leq \sum_{k=n}^{m} \Big(\frac{1+\alpha}{2}\Big)^k \leq \Big(\frac{1+\alpha}{2}\Big)^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\frac{1+\alpha}{2}\Big)^j$$
$$= \Big(\frac{1+\alpha}{2}\Big)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{1+\alpha}{2}} = \Big(\frac{1+\alpha}{2}\Big)^n \cdot \Big(\frac{2}{1-\alpha}\Big). \tag{VI.55}$$

Wegen $\frac{1+\alpha}{2} < 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \big\{\big(\frac{1+\alpha}{2}\big)^n\big\} = 0$, und somit ist nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ absolut konvergent.
(Gemäß (VI.54) ist $|a_n| \leq (\frac{1+\alpha}{2})^n$ eine summierbare Majorante und die Behauptung hätte sich nach (VI.54) auch direkt aus Satz VI.11 (i) ergeben.)
Zu *(ii)* Seien $\alpha := \lim_{n\to\infty} \sup \big\{ \sqrt[n]{|a_n|} \big\} > 1$ und $\varepsilon := \frac{\alpha-1}{2} > 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^\infty$ mit

$$\forall\, j \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[n_j]{|a_{n_j}|} > \alpha - \varepsilon = \frac{\alpha+1}{2} > 1. \tag{VI.56}$$

Dann sind

$$\forall\, j \in \mathbb{N}: \quad |a_{n_j}| \geq \Big(\frac{\alpha+1}{2}\Big)^{n_j} \geq 1. \tag{VI.57}$$

Um zu zeigen, dass $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ divergiert, beweisen wir, dass das Cauchy-Kriterium nicht erfüllt ist. Seien nämlich $\delta := \frac{1}{2}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ irgendeine natürliche Zahl. Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$, so dass $n_j \geq n_0$, und

$$\Big| \sum_{k=n_j}^{n_j} a_{n_j} \Big| = |a_{n_j}| \geq 1 > \delta. \tag{VI.58}$$

Für $m := n := n_j \geq n_0$ ergibt sich daraus ein Widerspruch zum Cauchy-Kriterium. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ gibt es keine allgemeine Aussage. Beispielsweise ist $\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} \to 1$, mit $n \to \infty$, für alle $p > 0$, es ist aber $\big(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2}\big)_{m=1}^\infty$ (absolut) konvergent in $\mathbb{R}$ und $\big(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n}\big)_{m=1}^\infty$ divergent in $\mathbb{R}$.

Satz VI.13 (Quotientenkriterium)**.** *Sei* $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \setminus \{0\}$ *eine Zahlenfolge.*

(i) Für

$$\limsup_{n\to\infty} \Big\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \Big\} < 1 \tag{VI.59}$$

ist die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ *absolut konvergent.*

(ii) Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;\geq\; 1, \tag{VI.60}$$

so ist die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ divergent.

Bemerkungen und Beispiele.

- Ein Vergleich mit Bedingung (VI.53) aus dem Wurzelkriterium für die Divergenz einer Reihe würde, übertragen auf das Quotientenkriterium, die Bedingung

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\} \;>\; 1 \tag{VI.61}$$

  für die Divergenz einer Reihe suggerieren. Dies ist jedoch falsch, wie das folgende Gegenbeispiel illustriert.

- Für

$$a_n \;:=\; \begin{cases} 3^{-n}, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 2^{-n+1}, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \end{cases} \tag{VI.62}$$

  ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ sicher konvergent, da $|a_n|$ die summierbare Majorante 2^{-n+1} besitzt, aber

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\} \;\geq\; \limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k}|} \right\} \;=\; \limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{2^{-2k}}{3^{-2k}} \right\} \;=\; \limsup_{k\to\infty} \left\{ \left(\tfrac{3}{2}\right)^{2k} \right\} \;=\; \infty. \tag{VI.63}$$

VI.4 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Eine der wichtigsten Anwendungen der obigen Konvergenzkriterien ist die Darstellung bzw. Definition elementarer Funktionen durch Potenzreihen. Wir beginnen mit der Exponentialfunktion.

- Seien $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a_n := z^n/n!$. Wir beobachten, dass

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;=\; \frac{|z|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot |z|^n} \;=\; \frac{|z|}{(n+1)} \;\to\; 0, \quad n \to \infty. \tag{VI.64}$$

  Also ist

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\} \;=\; \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{|z|}{n+1} \right\} \;=\; \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{|z|}{n+1} \right\} \;=\; 0 \;<\; 1. \tag{VI.65}$$

  Mit Hilfe des Quotientenkriteriums, Satz VI.13, sehen wir also, dass die Reihe $\big(\sum_{n=0}^m \frac{z^n}{n!}\big)_{m=1}^\infty$ absolut konvergiert. Den Limes dieser Reihe nennen wir **Exponentialfunktion**,

$$\exp : \; \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp[z] \;:=\; \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}. \tag{VI.66}$$

  Dabei vereinbaren wir, dass $\exp[0] := 1$, d.h. hier ist Konvention $0^0 = 1$ sinnvoll und die Reihe für $\exp[0]$ besitzt nur einen nicht-verschwindenden Summanden.

- Analog seien $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $c_k := (-1)^k z^{2k}/(2k)!$ sowie $s_k := (-1)^k z^{2k+1}/(2k+1)!$. Dann sind

$$\limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} \right\} = \limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{|z|^2}{(2k+2)(2k+1)} \right\} = 0 < 1, \tag{VI.67}$$

$$\limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{|s_{k+1}|}{|s_k|} \right\} = \limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{|z|^2}{(2k+3)(2k+2)} \right\} = 0 < 1, \tag{VI.68}$$

und die zugehörigen Reihen, die **Kosinusreihe** $\cos[z]$ und die **Sinusreihe** $\sin[z]$,

$$\cos[z] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin[z] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{VI.69}$$

sind absolut konvergent für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $z = 0$ ergibt sich $\cos[0] = 1$ und $\sin[0] = 0$.

- Weiterhin beobachten wir, dass wegen $i^{2k} = (-1)^k$ und wegen des Großen Umordnungssatzes (wo geht er ein?)

$$\begin{aligned} e^{iz} := \exp[iz] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\, z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\, z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}\, z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos[z] + i\, \sin[z] \end{aligned} \tag{VI.70}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

- Insbesondere sind dann

$$\cos[-z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, (-z)^{2k}}{(2k)!}, = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, z^{2k}}{(2k)!} = \cos[z], \tag{VI.71}$$

$$\sin[-z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, (-z)^{2k+1}}{(2k+1)!}, = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, z^{2k+1}}{(2k+1)!}, = -\sin[z], \tag{VI.72}$$

woraus

$$\frac{1}{2}\big(e^{iz} + e^{-iz}\big) = \frac{1}{2}\big(\cos[z] + i\sin[z] + \cos[-z] + i\sin[-z]\big) = \cos[z], \tag{VI.73}$$

$$\frac{1}{2i}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big) = \frac{1}{2i}\big(\cos[z] + i\sin[z] - \cos[-z] - i\sin[-z]\big) = \sin[z] \tag{VI.74}$$

folgen.

- So erhalten wir für alle $z \in \mathbb{C}$ die hyperbolischen Funktionen aus den trigonometrischen durch

$$\cosh[z] := \cos[iz] = \frac{1}{2}\big(e^{z} + e^{-z}\big) \quad \textbf{Kosinus Hyperbolicus}, \tag{VI.75}$$

$$\sinh[z] := \frac{1}{i}\,\sin[iz] = \frac{1}{2}\big(e^{z} - e^{-z}\big) \quad \textbf{Sinus Hyperbolicus}. \tag{VI.76}$$

- Definieren wir außerdem die **Binomialkoeffizienten**

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq n : \quad \binom{m}{n} \;:=\; \frac{m!}{n!(m-n)!}, \tag{VI.77}$$

so gilt

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \; z, w \in \mathbb{C} : \quad (z+w)^m \;=\; \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \, z^n \, w^{m-n}. \tag{VI.78}$$

Setzen wir $a_n := \frac{z^n}{n!}$ und $b_n := \frac{w^n}{n!}$, dann erhalten wir also für das Cauchy-Produkt

$$\begin{aligned} c_m \;&:=\; \sum_{n=0}^{m} a_n \, b_{m-n} \;=\; \sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{n!} \, \frac{w^{m-n}}{(m-n)!} \qquad \text{(VI.79)} \\ &=\; \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!} \, z^n \, w^{m-n} \;=\; \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \, z^n \, w^{m-n} \;=\; \frac{(z+w)^m}{m!}. \end{aligned}$$

Also gilt das Additionstheorem für die Exponentialfunktion

$$\forall\, z, w \in \mathbb{C} : \quad \exp[z] \cdot \exp[w] \;=\; \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big) \Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_n \Big) \;=\; \Big(\sum_{m=0}^{\infty} c_m \Big) \;=\; \exp[z+w]. \tag{VI.80}$$

- Schließlich erhalten wir die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen und komplexe Argumente $z, w \in \mathbb{C}$, etwa

$$\begin{aligned} &\cos[z] \cos[w] - \sin[z] \sin[w] \\ &=\; \frac{1}{4} \big(e^{iz} + e^{-iz} \big) \big(e^{iw} + e^{-iw} \big) \;-\; \frac{1}{4i^2} \big(e^{iz} - e^{-iz} \big) \big(e^{iw} - e^{-iw} \big) \\ &=\; \frac{1}{4} \big(e^{iz+iw} + e^{-iz+iw} + e^{iz-iw} + e^{-iz-iw} + e^{iz+iw} - e^{-iz+iw} - e^{iz-iw} + e^{-iz-iw} \big) \\ &=\; \frac{1}{2} \big(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)} \big) \;=\; \cos[z+w], \qquad \text{(VI.81)} \end{aligned}$$

und genauso $\sin[z+w] = \sin[z] \cos[w] + \cos[z] \sin[w]$.

VI.5 Ergänzungen

VI.5.1 Rückführung des Quotientenkriteriums auf das Wurzelkriterium

Beweis von Satz VI.13 [Quotientenkriterium].

Zu (i) Sei $\beta := \limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;\leq\; \beta + \varepsilon, \tag{VI.82}$$

nach Satz V.6 (ii). Also ist,

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0 : \quad |a_n| \;&\leq \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdots \frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} \cdot |a_{n_0}| \\ &\leq (\beta+\varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|,\end{aligned} \tag{VI.83}$$

und daher

$$\sqrt[n]{|a_n|} \;\leq\; (\beta+\varepsilon)\cdot\sqrt[n]{|a_{n_0}|\cdot(\beta+\varepsilon)^{-n_0}} \;\to\; \beta+\varepsilon, \quad \text{für } n\to\infty. \tag{VI.84}$$

Somit erhalten wir, dass

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} \;\leq\; \beta+\varepsilon. \tag{VI.85}$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt damit, dass

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} \;\leq\; \beta \;=\; \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}, \tag{VI.86}$$

und (i) folgt nun aus dem Wurzelkriterium.
Zu (ii) Sind umgekehrt $n_0 \in \mathbb{N}$ und

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;\geq\; \beta - \varepsilon, \tag{VI.87}$$

so ist

$$\begin{aligned}\forall\, n \geq n_0+1 : \quad |a_n| \geq\;& \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdots \frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} \cdot |a_{n_0}| \\ \geq\;& (\beta-\varepsilon)^{n-1-n_0}\cdot|a_{n_0}|.\end{aligned} \tag{VI.88}$$

Also ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} \;\geq\; (\beta-\varepsilon)\cdot\sqrt[n]{|a_{n_0}|\cdot(\beta-\varepsilon)^{-1-n_0}}, \tag{VI.89}$$

und daraus folgt, dass

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} \;\geq\; \lim_{n\to\infty}\left\{(\beta-\varepsilon)\cdot\sqrt[n]{|a_{n_0}|\cdot(\beta-\varepsilon)^{-1-n_0}}\right\} \;=\; \beta-\varepsilon. \tag{VI.90}$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ impliziert dies

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sqrt[n]{|a|}\right\} \;\geq\; \beta, \tag{VI.91}$$

und (ii) folgt abermals aus dem Wurzelkriterium. □

Kapitel VII

Topologische Grundbegriffe

VII.1 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition VII.1.

(i) Für alle $x \in \mathbb{K}$ und $r > 0$ heißt

$$B(x,r) \; := \; \big\{ y \in \mathbb{K} \,:\, |y-x| < r \big\} \tag{VII.1}$$

offene Kugel vom Radius r um x.

(ii) Sei $A \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in A$ heißt **innerer Punkt (I.P.) von A**

$$:\Leftrightarrow \qquad \exists r > 0 : \quad B(x,r) \; \subseteq \; A. \tag{VII.2}$$

(iii) Sei $D \subseteq \mathbb{K}$. Ein Punkt $x \in \mathbb{K}$ heißt **Häufungspunkt (H.P.) von D**

$$\begin{aligned} :\Leftrightarrow \qquad & \forall r > 0 : \qquad B(x,r) \cap \big(D \setminus \{x\}\big) \; \neq \; \emptyset \\ \Leftrightarrow \qquad & \forall r > 0 \; \exists y \in D, \; y \neq x : \quad |y-x| \; < r. \end{aligned} \tag{VII.3}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ ist $B(x,r) = (x-r, x+r)$ das *offene Intervall der Länge $2r$ um x*.
- Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichnet man $B(z,r) \equiv D(z,r) := \{w \in \mathbb{C} :\, |w-z| < r\}$ als *offene Kreisscheibe vom Radius r um z*.
- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$, sind

$$[a,b] \; = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ ist H.P. von } [a,b]\} \; = \; \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ ist H.P. von } (a,b)\}, \tag{VII.4}$$

$$(a,b) \; = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ ist I.P. von } [a,b]\} \; = \; \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ ist I.P. von } (a,b)\}. \tag{VII.5}$$

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ ist die Menge der inneren Punkte leer, und 0 ist der einzige Häufungspunkt von A.

Lemma VII.2. *Ist $A \subseteq \mathbb{K}$, so gilt*

$$\big\{x \text{ ist Häufungspunkt von } A\big\} \;\Leftrightarrow\; \big\{\exists\,(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A \setminus \{x\} : \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x\big\}. \tag{VII.6}$$

Beweis. Sei x ein H.P. von A, dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Schnitt $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$, d.h. es gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in A \setminus \{x\}$ sodass $|x_n - x| < 1/n$, und somit gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Sei umgekehrt $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A \setminus \{x\}$ eine Folge, die gegen $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ konvergiert. Dann gibt es zu jedem $r > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in B(x, r)$, für alle $n \geq n_0$. Damit ist $B(x,r) \cap \big(A \setminus \{x\}\big) \supseteq \{x_{n_0}\} \neq \emptyset$ (und enthält sogar alle, bis auf endlich viele Folgeglieder). □

Definition VII.3.

(i) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{K}$ heißt **offen**

$$\begin{aligned} &:\Leftrightarrow \quad \text{Jeder Punkt in } A \text{ ist ein I.P. oder } A = \emptyset \\ &\;\Leftrightarrow \quad \forall x \in A\ \exists r > 0 : \quad B_{\mathbb{K}}(x, r) \subseteq A. \end{aligned} \tag{VII.7}$$

(ii) Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}$ heißt **abgeschlossen**

$$\begin{aligned} &:\Leftrightarrow \quad D \text{ enthält alle seine H.P. oder } D = \emptyset \\ &\;\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{K} : \quad \big(x \text{ ist H.P. von } D \;\Rightarrow\; x \in D\big). \end{aligned} \tag{VII.8}$$

(iii) Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{K}$ heißt **beschränkt**

$$:\Leftrightarrow \qquad \exists R < \infty : \quad C \subseteq B_{\mathbb{K}}(0, R). \tag{VII.9}$$

(iv) Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}$ heißt **(offene) Umgebung von x** $\in \mathbb{K}$

$$:\Leftrightarrow \qquad D \text{ ist offen und } D \ni x. \tag{VII.10}$$

Satz VII.4. *Für $A \subseteq \mathbb{K}$ sind folgende Aussagen gleichwertig:*

$$\big\{A \text{ ist offen }\big\} \quad \Leftrightarrow \quad \big\{A^c := \mathbb{K} \setminus A \text{ ist abgeschlossen.}\big\} \tag{VII.11}$$

Beweis. Für $A = \mathbb{K}$ oder $A = \emptyset$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Wir können also annehmen, dass $\emptyset \neq A \not\subseteq \mathbb{K}$.
<u>"⇒"</u> : Seien A offen und $x \in \mathbb{K}$ ein H.P. von A^c. Ist $r > 0$, so ist also $B(x, r) \cap (A^c \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Daher kann $B(x, r)$ nicht Teilmenge von A sein und somit ist x auch kein I.P. von A. Da A als offene Menge nur I.P. enthält, folgt, dass $x \notin A$, also $x \in A^c$ gilt. Zusammen erhalten wir damit, dass A^c alle seine H.P. enthält, also abgeschlossen ist.
<u>"⇐"</u> : Seien A^c abgeschlossen und $x \in A$. Weil A^c alle seine H.P. enthält, kann $x \notin A^c$ kein H.P. von A^c sein. Es gibt also ein $r > 0$, sodass $B(x, r) \cap (A^c \setminus \{x\}) = \emptyset$, und wegen $A^c \setminus \{x\} = A^c$ bedeutet dies $B(x, r) \cap A^c = \emptyset$, d.h. $B(x, r) \subseteq A$. Somit ist $x \in A$ ein I.P. von A. Weil x beliebig in A gewählt war, folgt die Offenheit von A. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $x \in \mathbb{K}$ und $r > 0$ ist die offene Kugel $B(x, r) \subseteq \mathbb{K}$ vom Radius r um x offen.
- Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sind (a, b) offen und $[a, b]$ abgeschlossen.
- Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ist $(a, b]$ weder offen noch abgeschlossen. Da $b \in (a, b]$ kein I.P. von $(a, b]$ ist, ist $(a, b]$ nicht offen. Da a ein H.P. von $(a, b]$ ist, der nicht in $(a, b]$ enthalten ist, ist $(a, b]$ nicht abgeschlossen.
- Die Teilmengen $\emptyset, \mathbb{K} \in \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen. Sie sind die einzigen Teilmengen von $\mathbb{K}$, die beide Eigenschaften besitzen.

Lemma VII.5.
(i) Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ eine Familie offener Teilmengen von $\mathbb{K}$, so ist auch deren Vereinigung

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A \quad \textit{offen.} \tag{VII.12}$$

(ii) Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{K}$, so ist auch deren Durchschnitt

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A \quad \textit{abgeschlossen.} \tag{VII.13}$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass (i) und (ii) nach Satz VII.4 äquivalent sind. Gilt z.B. (i) und ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{K}$, so ist $\mathfrak{A}' := \{A^c | A \in \mathfrak{A}\}$ nach Satz VII.4 eine Familie offener Teilmengen von $\mathbb{K}$, und aus (i) folgt, dass

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A^c = \bigcup_{A' \in \mathfrak{A}'} A' \tag{VII.14}$$

offen ist. Abermals nach Satz VII.4 folgt nun, dass

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = \left(\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A^c \right)^c \tag{VII.15}$$

abgeschlossen ist und somit (ii) gilt. Genauso zeigt man umgekehrt $(ii) \Rightarrow (i)$.
Es genügt also $\underline{(i)}$ zu zeigen. Seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ eine Familie offener Teilmengen von $\mathbb{K}$ und $x \in \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$, d.h. $x \in \widehat{A}$, für ein gewisses $\widehat{A} \in \mathfrak{A}$. Weil $\widehat{A}$ offen ist, gibt es ein $\hat{r} > 0$, sodass $B(x, \hat{r}) \subseteq \widehat{A}$. Also ist

$$B(\hat{r}, x) \subseteq \widehat{A} \subseteq \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A, \tag{VII.16}$$

und $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$ ist offen. $\square$

Lemma VII.6. *Sei $K \in \mathbb{N}$.*

(i) Sind $A_1, A_2, \ldots, A_K \subseteq \mathbb{K}$ offene Teilmengen von $\mathbb{K}$, so ist auch

$$\bigcap_{i=1}^{K} A_i \quad \textit{offen}, \tag{VII.17}$$

(ii) Sind $A_1, A_2, \ldots, A_K \subseteq \mathbb{K}$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{K}$, so ist auch

$$\bigcup_{i=1}^{K} A_i \quad \textit{abgeschlossen}. \tag{VII.18}$$

Beweis. Wie in Lemma VII.5 sind (i) und (ii) äquivalent, und es genügt (i) zu zeigen. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_K \subseteq \mathbb{K}$ offen und $x \in A_i$, für alle $i = 1, 2, \ldots, K$, so gibt es $r_1, r_2, \ldots, r_K > 0$, so dass

$$\forall\, i = 1, 2, \ldots, K \ : \quad B(x, r_i) \subseteq A_i. \tag{VII.19}$$

Mit $r := \min\{r_1, r_2, \ldots, r_K\} > 0$ ist dann aber auch

$$B(x, r) \ = \ \bigcap_{i=1}^{K} B(x, r_i) \ \subseteq \ \bigcap_{i=1}^{K} A_i, \tag{VII.20}$$

und $\bigcap_{i=1}^{K} A_i$ ist somit offen. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Glgen. (VII.17) und (VII.18) sind für $K = \infty$ i.A. falsch. So sind z.B. $M_n := (0, 1+1/n) \subseteq \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ offen, aber

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \ = \ (0, 1] \tag{VII.21}$$

  ist weder offen noch abgeschlossen.

VII.2 Inneres und Abschluss

Definition VII.7. Sei $A \subseteq \mathbb{K}$.

(i) Das **Innere von A** ist definiert als

$$A^\circ \ := \ \bigcup \big\{ B \in \mathfrak{P}(\mathbb{K}) \ \big| \ B \subseteq A, \ B \text{ offen} \big\}. \tag{VII.22}$$

(ii) Der **Abschluss von A** ist definiert als

$$\overline{A} \ := \ \bigcap \big\{ C \in \mathfrak{P}(\mathbb{K}) \ \big| \ C \supseteq A, \ C \text{ abgeschlossen} \big\}. \tag{VII.23}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Das System $\{B \in \mathfrak{P}(\mathbb{K}) \mid B \subseteq A,\ B \text{ offen}\}$ enthält zumindest die leere Menge $\emptyset$, denn $\emptyset \subseteq A$ und $\emptyset$ ist offen.
- Das System $\{C \in \mathfrak{P}(\mathbb{K}) \mid C \supseteq A,\ C \text{ abgeschlossen}\}$ enthält zumindest $\mathbb{K}$, denn $\mathbb{K} \supseteq A$ und $\mathbb{K}$ ist abgeschlossen.
- Nach Lemma VII.5 sind A° offen und $\overline{A}$ abgeschlossen.
- A° ist die größte offene Teilmenge von A, die sich auch durch die folgenden drei Eigenschaften charakterisieren lässt:

$$A^\circ \text{ ist offen,} \tag{VII.24}$$
$$A^\circ \subseteq A, \tag{VII.25}$$
$$B \subseteq A, \quad B \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad B \subseteq A^\circ. \tag{VII.26}$$

- Ebenso ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von A und lässt sich charakterisieren durch:

$$\overline{A} \text{ ist abgeschlossen,} \tag{VII.27}$$
$$\overline{A} \supseteq A, \tag{VII.28}$$
$$B \supseteq A, \quad B \text{ abgeschlossen} \quad \Rightarrow \quad B \supseteq \overline{A}. \tag{VII.29}$$

Satz VII.8. *Ist $A \subseteq \mathbb{K}$, so gelten:*

$$(i) \quad A^\circ \ = \ \big\{x \in A \,\big|\, x \text{ ist I.P. von } A\big\}, \tag{VII.30}$$
$$(ii) \quad \overline{A} \ = \ A \cup \big\{x \in \mathbb{K} \,\big|\, x \text{ ist H.P. von } A\big\}, \tag{VII.31}$$
$$(iii) \quad A^\circ \cup \overline{A^c} = \mathbb{K}, \quad A^\circ \cap \overline{A^c} = \emptyset, \tag{VII.32}$$
$$(iv) \quad \big\{A \text{ ist offen}\big\} \quad \Leftrightarrow \quad \big\{A = A^\circ\big\}, \tag{VII.33}$$
$$(v) \quad \big\{A \text{ ist abgeschlossen}\big\} \quad \Leftrightarrow \quad \big\{A = \overline{A}\big\}. \tag{VII.34}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann sind

$$[a,b]^\circ \ = [a,b)^\circ \ = \ (a,b]^\circ \ = \ (a,b)^\circ \ = \ (a,b), \tag{VII.35}$$
$$\overline{[a,b]} \ = \overline{[a,b)} \ = \ \overline{(a,b]} \ = \ \overline{(a,b)} \ = \ [a,b]. \tag{VII.36}$$

- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $r > 0$,

$$A_1 \ := \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < r,\ \mathrm{Re}[z] > 0\big\}, \tag{VII.37}$$
$$A_2 \ := \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| \le r,\ \mathrm{Re}[z] < 0\big\}, \tag{VII.38}$$
$$A \ := A_1 \cup A_2. \tag{VII.39}$$

  Dann sind

$$A^\circ \ = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < r,\ \mathrm{Re}[z] \neq 0\big\}, \tag{VII.40}$$
$$\overline{A} \ = \overline{B(0,r)} \ = \ \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| \le r\big\}. \tag{VII.41}$$

VII.3 Kompakte Mengen

Der Begriff der Kompaktheit spielt eine zentrale Rolle in allen Bereichen der Mathematik.

Definition VII.9. Sei $A \subseteq \mathbb{K}$.

(i) Eine Familie $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ von Teilmengen von $\mathbb{K}$ heißt **offene Überdeckung von A** :⇔

$$\forall\, U \in \mathfrak{U} : U \text{ ist offen} \quad \text{und} \quad A \subseteq \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U. \tag{VII.42}$$

(ii) Sei $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ eine offene Überdeckung von A. Eine endliche Teilfamilie $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subseteq \mathfrak{U}$, mit $n \in \mathbb{N}$, die selbst eine Überdeckung von A ist, d.h. $A \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$, heißt **endliche offene Überdeckung von A**[1]

(iii) A heißt **kompakt** :⇔
Jede offene Überdeckung von A enthält eine endliche offene Überdeckung von A.

Bemerkungen und Beispiele.

- $A := [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht kompakt, denn mit $A_n := \big(n - \frac{4}{3}, n + \frac{1}{3}\big)$ ist $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine offene Überdeckung von A, die keine endliche offene Überdeckung enthält.
- Für jedes $A \subseteq \mathbb{K}$ und jedes $r > 0$ ist $\{B(x, r)\}_{x \in A}$ eine offene Überdeckung von A.

Lemma VII.10. *Ist $A \subseteq \mathbb{K}$ kompakt, so ist A auch abgeschlossen.*

Beweis. Sei $x \in A^c$. Für $y \in A$ setzen wir

$$r_y := \frac{|x - y|}{2} > 0. \tag{VII.43}$$

Dann bildet $\{B(y, r_y)\}_{y \in A}$ eine offene Überdeckung von A, und aus der Kompaktheit von A folgt, dass es $n \in \mathbb{N}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n \in A$ gibt, sodass

$$A \subseteq B(y_1, r_1) \cup B(y_2, r_2) \cup \cdots \cup B(y_n, r_n), \tag{VII.44}$$

wobei $r_j := r_{y_j}$. Setzen wir $r := \min\big\{r_1, r_2, \ldots, r_n\big\} > 0$, so folgt für jedes $j = 1, 2, \ldots n$ aus der Dreiecksungleichung, dass $|x - y_j| \geq r + r_j$ und daher

$$B(x, r) \cap B(y_j, r_j) = \emptyset. \tag{VII.45}$$

Damit erhalten wir

$$A \cap B(x, r) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, r_j) \cap B(x, r) = \emptyset. \tag{VII.46}$$

Also ist $B(x, r) \subseteq A^c$, und x ein I.P. von A^c. Da $x \in A^c$ beliebig gewählt war, ist somit jeder Punkt von A^c ein I.P. Also sind A^c offen und A daher abgeschlossen. □

[1] In Lehrbüchern über Analysis heißen „*endliche offene Überdeckungen von A*“ üblicherweise „*endliche Teilüberdeckungen von A*“. Diese traditionelle Bezeichnungsweise führt bei vielen Studierenden jedoch zu der Fehlinterpretation, dass A nur teilweise überdeckt würde. Die Vorsilbe „*Teil-*“ bezieht sich jedoch auf $\mathfrak{U}$ – und nicht auf A.

Lemma VII.11. *Sei $A \subseteq \mathbb{K}$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge von A auch kompakt.*

Beweis. Seien $B \subseteq A$ eine abgeschlossene Teilmenge von A und $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ eine offene Überdeckung von B. Wir zeigen, dass $\mathfrak{U}$ eine endliche offene Überdeckung von B enthält. Weil B abgeschlossen ist, ist B^c offen, und $\mathfrak{U} \cup \{B^c\}$ ist eine offene Überdeckung von A (sogar von $\mathbb{K}$). Da A kompakt ist, enthält diese eine endliche offene Überdeckung $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ von A, wobei $U_j \in \mathfrak{U}$ oder $U_j = B^c$, für alle $j = 1, 2, \ldots, n$. Dann ist $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \setminus \{B^c\}$ die gesuchte endliche offene Überdeckung von B aus $\mathfrak{U}$, und B ist somit kompakt. □

Korollar VII.12. *Sind $A \subseteq \mathbb{K}$ kompakt und $B \subseteq \mathbb{K}$ abgeschlossen, so ist $A \cap B$ kompakt.*

Beweis. Nach Lemma VII.10 ist A abgeschlossen und somit ist $A \cap B$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Obermenge A. Nach Lemma VII.11 ist $A \cap B$ daher kompakt. □

Lemma VII.13. *Ist $A \subseteq \mathbb{K}$ kompakt, so ist A auch beschränkt.*

Beweis. $\{B(y, 1)\}_{y \in A}$ ist eine offene Überdeckung von A und enthält eine endliche offene Überdeckung, $\big\{B(y_1, 1), B(y_2, 1), \ldots, B(y_n, 1)\big\}$ von A. Dann ist $A \subseteq B(0, R)$ mit

$$R := \max_{1 \le j \le n} \big\{|y_j| + 1\big\} < \infty. \tag{VII.47}$$

□

Definition VII.14. Seien $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$, $\tilde{a} \le \tilde{b}$. Dann heißt die Menge

$$Q \;=\; [a, b] + i[\tilde{a}, \tilde{b}] \;=\; \big\{x + iy \;\big|\, x \in [a, b],\ y \in [\tilde{a}, \tilde{b}]\big\} \;\subseteq\; \mathbb{C} \tag{VII.48}$$

abgeschlossenes Rechteck. Der **Durchmesser** von Q ist definiert als

$$d(Q) \;:=\; \max\big\{b_1 - a_1\ ,\ b_2 - a_2\big\}. \tag{VII.49}$$

Lemma VII.15.

(i) Seien $\{Q^{(n)} = [a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Intervalle mit $Q^{(1)} \supseteq Q^{(2)} \supseteq Q^{(3)} \supseteq \ldots$ und $0 \le b_n - a_n \to 0$, für $n \to \infty$. Dann gibt es genau einen Punkt $x_* \in \mathbb{R}$, so dass

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Q^{(n)} \;=\; \{x_*\}. \tag{VII.50}$$

(ii) Seien $\{Q^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge abgeschlossener Rechtecke in $\mathbb{C}$ mit $Q^{(1)} \supseteq Q^{(2)} \supseteq Q^{(3)} \supseteq \ldots$ und $d\big(Q^{(n)}\big) \to 0$, für $n \to \infty$. Dann gibt es genau einen Punkt $z_* \in \mathbb{C}$, so dass

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Q^{(n)} \;=\; \{z_*\}. \tag{VII.51}$$

Beweis. Wir beweisen nur (i); der Beweis von (ii) ist nur hinsichtlich der Schreibarbeit aufwändiger. Seien also $Q^{(n)} = [a_n, b_n]$ mit $0 \leq b_n - a_n \to 0$, für $n \to \infty$, und

$$M \ := \ \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^{(n)}. \tag{VII.52}$$

Wegen $Q^{(n)} \supseteq Q^{(n+1)}$ sind

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n. \tag{VII.53}$$

Daher sind $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ monoton und beschränkt, also konvergent, nämlich

$$x_* \ := \ \lim_{n\to\infty} a_n \ = \ \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \ \leq \ \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n \ = \ \lim_{n\to\infty} b_n \ =: \ x_*'. \tag{VII.54}$$

Außerdem ist

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad 0 \leq x_* - x_*' \ \leq \ b_n - a_n, \tag{VII.55}$$

und mit $b_n - a_n \to 0$, $n \to \infty$, erhalten wir $x_* := x_*'$. Weiterhin ist

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad x_* \ \in \ [a_n, b_n], \tag{VII.56}$$

also ist auch

$$x_* \ \in \ \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^{(n)} \ = \ M, \tag{VII.57}$$

und $M \neq \emptyset$. Ist $x \in M$, so folgt aus $0 \leq |x - x_*| \leq b_n - a_n \to 0$, $n \to \infty$, wie in (VII.55), dass $x = x_*$. Also enthält M auch nur x_* und keinen weiteren Punkt. □

Lemma VII.16.

(i) Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *ist kompakt.*

(ii) Jedes abgeschlossene Rechteck $[a, b] + i[\tilde{a}, \tilde{b}] \subseteq \mathbb{C}$ *ist kompakt.*

Beweis. Wir beschränken uns wieder auf den Beweis von (i). Wir nehmen an, $\mathfrak{U}$ wäre eine offene Überdeckung $Q = [a, b]$, die keine endliche offene Überdeckung enthält und führen diese Annahme zum Widerspruch.
Wir setzen $R := 2(b - a)$ und $a_1 := a$, $b_1 := b$, so dass

$$0 \ \leq \ b_1 - a_1 \ = \ R \cdot 2^{-1}. \tag{VII.58}$$

Nun teilen wir $[a_1, b_1]$ in seine linke Hälfte $[a_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)]$ und seine rechte Hälfte $[\frac{1}{2}(a_1 + b_1), b_1]$ auf,

$$[a_1, b_1] \ = \ \big[a_1\ ,\ \tfrac{1}{2}(a_1 + b_1)\big] \ \cup \ \big[\tfrac{1}{2}(a_1 + b_1)\ ,\ b_1\big]. \tag{VII.59}$$

$\mathfrak{U}$ kann nicht für beide Hälften je eine endliche offene Überdeckung enthalten – sonst wäre ihre Vereinigung eine endliche offene Überdeckung von $[a_1, b_1]$. Enthält $\mathfrak{U}$ keine endliche offene Überdeckung für $[a_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)]$, so wählen wir

$$a_2 \; := \; a_1, \qquad b_2 \; := \; \tfrac{1}{2}(a_1 + b_1). \tag{VII.60}$$

Enthält $\mathfrak{U}$ eine endliche offene Überdeckung von $[a_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)]$, so kann $\mathfrak{U}$ keine endliche offene Überdeckung von $[\frac{1}{2}(a_1 + b_1), b_1]$ enthalten, und wir wählen

$$a_2 \; := \; \tfrac{1}{2}(a_1 + b_1), \qquad b_2 \; := \; b_1. \tag{VII.61}$$

In jedem Fall enthält $\mathfrak{U}$ keine endliche offene Überdeckung von $[a_2, b_2]$, und es gilt

$$0 \; \le \; b_2 - a_2 \; = \; R \cdot 2^{-2}. \tag{VII.62}$$

Nun teilen wir $[a_2, b_2]$ in seine linke Hälfte $[a_2, \frac{1}{2}(a_2 + b_2)]$ und seine rechte Hälfte $[\frac{1}{2}(a_2 + b_2), b_2]$ auf und wählen

$$[a_3, b_3] \; := \; \big[a_2 \, , \, \tfrac{1}{2}(a_2 + b_2)\big] \quad \text{oder} \quad [a_3, b_3] \; := \; \big[\tfrac{1}{2}(a_2 + b_2) \, , \, b_2\big] \tag{VII.63}$$

so, dass $\mathfrak{U}$ keine endliche offene Überdeckung von $[a_3, b_3]$ enthält und dass

$$0 \; \le \; b_3 - a_3 \; = \; R \cdot 2^{-3}. \tag{VII.64}$$

gilt. Führen wir das in (VII.58)–(VII.64) beschriebene Verfahren so fort, dann erhalten wir eine Folge $\big([a_n, b_n]\big)_{n=1}^{\infty}$, abgeschlossener Intervalle mit $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ und

$$0 \; \le \; b_n - a_n \; \le \; R \cdot 2^{-n} \tag{VII.65}$$

so, dass $\mathfrak{U}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine offene Überdeckung von $[a_n, b_n]$ ist, die keine endliche offene Überdeckung enthält.
Nach Lemma VII.15 gibt es nun ein eindeutiges $x_* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subseteq [a, b]$. Weil $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von $[a, b]$ ist, enthält es ein $U_* \in \mathfrak{U}$, sodass

$$x_* \; \in \; U_*. \tag{VII.66}$$

Nun ist U_* offen, und deshalb gibt es $r_* > 0$, so dass

$$B(x_*, r_*) \; \subseteq \; U_*. \tag{VII.67}$$

Wählen wir nun $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $R \cdot 2^{-n} < \frac{1}{4} r_*$, also $n > \log_2(R/r_*) + 2$, so ist

$$b_n - a_n \; \le \; \frac{1}{4} \, r_*, \tag{VII.68}$$

was wegen $[a_n, b_n] \cap B(x_*, r_*) \ni x_*$ auch

$$[a_n, b_n] \; \subseteq \; (x_* - r_*, x_* + r_*) \; = \; B(x_*, r_*) \tag{VII.69}$$

impliziert. Dann gäbe es jedoch eine endliche offene Überdeckung von $[a_n, b_n]$ aus $\mathfrak{U}$, nämlich

$$[a_n, b_n] \; \subseteq \; U_* \, . \tag{VII.70}$$

Widerspruch. $\square$

Satz VII.17 (Heine-Borel). *Für $A \subseteq \mathbb{K}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

$$(i) \quad A \text{ ist kompakt.} \tag{VII.71}$$

$$\Leftrightarrow (ii) \quad A \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.} \tag{VII.72}$$

$$\Leftrightarrow (iii) \quad \text{Ist } E \subseteq A \text{ und } \#(E) = \infty, \text{ so gibt es einen H.P. } x \in A \text{ von } E. \tag{VII.73}$$

Beweis. (Nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
(i) ⇒ (ii): Sei A kompakt. Nach Lemma VII.10 und Lemma VII.13 ist dann A beschränkt und abgeschlossen.

(ii) ⇒ (i): Sei A beschränkt und abgeschlossen. Weil A beschränkt ist, gibt es ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, das A umfasst,

$$A \subseteq [a, b]. \tag{VII.74}$$

Nach Lemma VII.16 ist $[a, b]$ kompakt, und nach Lemma VII.11 ist deshalb $A \subseteq [a, b]$ als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $[a, b]$ selbst auch kompakt.

(i) ⇒ (iii): Sei A kompakt, und nehmen wir an, dass $E \subseteq A$, mit $\#(E) = \infty$, eine Teilmenge von A ohne H.P. in A wäre. Ist $x \in A$, so ist x also kein H.P. von E, und es gibt ein $r_x > 0$, so dass

$$B(x, r_x) \cap \big(E \setminus \{x\}\big) = \emptyset. \tag{VII.75}$$

Es kann also höchstens x selbst im Schnitt von $B(x, r_x)$ und E liegen, und deshalb ist

$$\forall\, x \in A: \quad \#\big[B(x, r_x) \cap E\big] \leq 1. \tag{VII.76}$$

Betrachten wir nun die offene Überdeckung $\{B(x, r_x)\}_{x \in A}$ von A, die wegen der Kompaktheit von A eine endliche offene Überdeckung $\{B(x_1, r_1), \ldots, B(x_N, r_N)\}$ enthält, wobei $N \in \mathbb{N}$ und $r_j := r_{x_j}$. Dann ist

$$E = A \cap E \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} \big[B(x_n, r_n) \cap E\big], \tag{VII.77}$$

was

$$\#(E) \leq \sum_{n=1}^{N} \#\big[B(x_n, r_n) \cap E\big] \leq N < \infty \tag{VII.78}$$

impliziert. Widerspruch.

(iii) ⇒ (ii): Nehmen wir an, A wäre nicht beschränkt. Dann gäbe es eine Menge von Punkten, $E := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad |x_n| \geq n. \tag{VII.79}$$

Offensichtlich hätte dann E keinen H.P. in $\mathbb{R}$ und somit auch nicht in A. Widerspruch zu (iii). Also ist A beschränkt.
Ist ferner $x \in \mathbb{R}$ ein H.P. von A, so gibt es nach (VII.6) eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \in (A \setminus \{x\})^{\mathbb{N}}$, die gegen $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ konvergiert. Wir setzen nun $E := \{x_1, x_2, x_3, \ldots, \} \subseteq A \setminus \{x\}$ (als Menge). Da $x \notin E$, muss E unendlich viele Elemente enthalten, anderenfalls wäre $B(x,r) \cap E = \emptyset$, für genügend kleine $r > 0$. Ist x' nun (irgend) ein H.P. von E, so gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k=1}^\infty \subseteq E$, die gegen x' konvergiert. Dann ist aber

$$x' \;=\; \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \;=\; \lim_{n\to\infty} x_n \;=\; x, \tag{VII.80}$$

d.h. x ist der einzige H.P. von E. Andererseits besitzt $E \subseteq A$ wegen $\#(E) = \infty$ nach (iii) einen H.P. in A, und deshalb muss $x \in A$ gelten. Somit enthält A alle seine H.P. und ist deswegen abgeschlossen. $\square$

VII.4 Ergänzungen

VII.4.1 Zusammenhang zwischen I.P., H.P., Inneres und Abschluss

Beweis. **(Beweis von Satz VII.8)**
Zunächst setzen wir

$$\mathcal{I}(A) := \big\{x \in A \,|\, x \text{ ist I.P. von } A\big\} = \big\{x \in \mathbb{K} \,|\, \exists\, r > 0 : \; B(x,r) \subseteq A\big\} \qquad \text{(VII.81)}$$

und

$$\mathcal{C}(A) := A \cup \big\{x \in \mathbb{K} \,|\, x \text{ ist H.P. von } A\big\} = \big\{x \in \mathbb{K} \,|\, \forall\, r > 0 : \; B(x,r) \cap A \neq \emptyset\big\}. \qquad \text{(VII.82)}$$

Dabei folgen jeweils die zweiten Gleichungen in (VII.81) bzw. (VII.81) direkt durch Einsetzen der Definition.
Zu Satz VII.8 (i): Sei $x \in \mathcal{I}(A)$. Dann ist x ein I.P. von A, und es existiert ein $r > 0$, so dass

$$B(x,r) \subseteq A. \qquad \text{(VII.83)}$$

Da $B(x,r)$ offen ist, folgt mit (VII.26), dass

$$x \in B(x,r) \subseteq A^\circ. \qquad \text{(VII.84)}$$

Sei umgekehrt $x \in A^\circ$. Dann gibt es eine offene Menge, $\widetilde{A} \subseteq A$, die x enthält, $x \in \widetilde{A}$. Da $\widetilde{A}$ offen ist, gibt es ein $r > 0$, so dass

$$B(x,r) \subseteq \widetilde{A} \subseteq A, \qquad \text{(VII.85)}$$

also ist x ein I.P. von A. Es folgt also

$$A^\circ = \mathcal{I}(A). \qquad \text{(VII.86)}$$

Zu Satz VII.8 (ii): Sei $x \in A^c$ ein H.P. von A, also $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) = B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, für alle $r > 0$. Wegen $\overline{A} \supseteq A$ folgt somit

$$\forall\, r > 0 : \; B(x,r) \cap (\overline{A} \setminus \{x\}) \supseteq B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset, \qquad \text{(VII.87)}$$

und x ist ein H.P. von $\overline{A}$. Weil $\overline{A}$ abgeschlossen ist, erhalten wir $x \in \overline{A}$, also

$$\mathcal{C}(A) \cap A^c = \big\{x \in A^c \,|\, x \text{ ist H.P. von } A\big\} \subseteq \overline{A}. \qquad \text{(VII.88)}$$

Abermals wegen $A \subseteq \overline{A}$ ergibt sich damit, dass

$$\mathcal{C}(A) = A \cup \big\{\mathcal{C}(A) \cap A^c\big\} \subseteq \overline{A}. \qquad \text{(VII.89)}$$

Sei nun andererseits $x \in \mathbb{K}$ ein H.P. von $\mathcal{C}(A)$. Ist $x \in A$, so ist natürlich auch $x \in A \subseteq \mathcal{C}(A)$, und wir können annehmen, dass $x \in A^c$.
Wir zeigen nun, dass

$$B(x,\varepsilon) \cap \big(A \setminus \{x\}\big) = B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \qquad \text{(VII.90)}$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt.
Da x ein H.P. von $\mathcal{C}(A)$ ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$, ein $\vec{y} \in \mathcal{C}(A) \setminus \{x\}$, so dass

$$|x - y| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}. \tag{VII.91}$$

Ist $y \in A$, so ergibt dies direkt (VII.90).
Ist hingegen $y \in \mathcal{C}(A) \cap A^c$, so ist y ein H.P. von A und es gibt ein $z \in A = A \setminus \{y\}$ mit $|z - y| < \varepsilon/2$. Damit ist

$$|x - z| \ < \ |x - y| + |y - z| \ < \ \varepsilon, \tag{VII.92}$$

und auch in diesem Fall (VII.90).
Also gilt (VII.90) für alle $\varepsilon > 0$, und somit ist x ein H.P. von A, d.h. $x \in \mathcal{C}(A)$.
Es folgt, dass $\mathcal{C}(A) \supseteq A$ abgeschlossen ist, und weil $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von A ist, gilt auch

$$\mathcal{C}(A) \ \supseteq \ \overline{A}. \tag{VII.93}$$

Zu Satz VII.8 (iii): Nach (i) und (ii) ist für $x \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} x \in A^\circ \ &\Leftrightarrow \exists\, r > 0 : \ B(x,r) \subseteq A \\ &\Leftrightarrow \exists\, r > 0 : \ B(x,r) \cap A^c = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \neg\big\{\forall\, r > 0 : \ B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset\big\} \\ &\Leftrightarrow x \notin \overline{A^c}, \end{aligned} \tag{VII.94}$$

was sofort die beiden Behauptungen ergibt. $\square$

Kapitel VIII

Stetigkeit

VIII.1 Stetige Abbildungen

Definition VIII.1. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{K}$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) f heißt **stetig in $\mathbf{x_0} \in \mathbf{X}$** $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in B(x_0, \delta) \cap X : \quad f(x) \in B\big(f(x_0), \varepsilon\big). \tag{VIII.1}$$

(ii) f heißt **stetig auf X** $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, x \in X : \quad f \text{ ist stetig in } x_0 \in X. \tag{VIII.2}$$

(iii) Wir schreiben

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \;=\; y \quad :\Leftrightarrow \quad \big\{\forall\, (x_n)_{n=1}^{\infty} \in (X \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}},\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 : \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y\big\}. \tag{VIII.3}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $X = Y = \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen stetig auf X:
  - Polynome $p(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n x^n$,
  - trigonometrische Funktionen $\sin(x), \cos(x)$,
  - die Exponentialfunktion e^x.
- Faustregel: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf (a, b), so kann in (a, b) der Graph "durchgezeichnet" werden.

Satz VIII.2. *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{K}$, $x_0 \in X$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt*

$$\Big[f \text{ ist stetig in } x_0\Big] \;\Leftrightarrow\; \Big[\lim_{x\to x_0}\{f(x)\} = f(x_0)\Big]. \tag{VIII.4}$$

In diesem Fall nennt man $\lim_{x\to x_0}\{f(x)\} = f(x_0)$ ***Folgenstetigkeit von*** $\mathbf{f}$ ***in*** $\mathbf{x_0}$.

Beweis.
"$\Longrightarrow$" : Seien $(x_n)_{n=1}^\infty \in (X \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}}$ eine Folge in $X \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ und $\varepsilon > 0$. Nach (VIII.1) gibt es ein $\delta > 0$, so dass mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Da $x_n \to x_0$ konvergiert, gibt es zu obigem $\delta > 0$ auch ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |x_n - x_0| < \delta\,, \quad \text{also} \;\; x_n \in B(x_0, \delta), \tag{VIII.5}$$

und daher gilt auch

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad f(x_n) \in B\big(f(x_0), \varepsilon\big)\,, \quad \text{also } |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{VIII.6}$$

Zusammenfassend erhalten wir somit

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq n_0 : \quad |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon, \tag{VIII.7}$$

was gerade $f(x_n) \to f(x_0)$, für $n \to \infty$ bedeutet.
"$\Longleftarrow$" : Sei f nicht stetig in x_0, d.h.

$$\exists\, \varepsilon > 0\; \forall\, \delta > 0\; \exists\, x \in B(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\} : \quad f(x) \notin B\big(f(x_0), \varepsilon\big) \cap Y. \tag{VIII.8}$$

Sei $\varepsilon > 0$ nun eine solche Zahl. Setzen wir $\delta := 1/n$, so gibt es gemäß (VIII.8) ein $x_n \in B(x_0, 1/n) \cap X \setminus \{x_0\}$ mit $f(x_n) \notin B\big(f(x_0), \varepsilon\big) \cap Y$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Da ohnehin $f(x_n) \in Y$, muss sogar $f(x_n) \notin B\big(f(x_0), \varepsilon\big)$, für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Damit ist $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Folge in $X \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$, weil $|x_n - x_0| < 1/n$. Andererseits ist aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon > 0$, und $\big(f(x_n)\big)_{n=1}^\infty \in Y^{\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$. □

Satz VIII.3. *Seien $X \subseteq \mathbb{K}$ und $f, g : X \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in X$.*

(i) Für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ ist dann auch $f + \alpha g : X \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x) + \alpha g(x)$ stetig in x_0, und es gilt

$$\lim_{x\to x_0}\big\{f(x) + \alpha g(x)\big\} \;=\; \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\big\{f(x)\big\} + \alpha \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\big\{g(x)\big\} \;=\; f(x_0) + \alpha g(x_0). \tag{VIII.9}$$

(ii) Weiterhin ist $f \cdot g : X \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ stetig in x_0, und es gilt

$$\lim_{x\to x_0}\big\{f(x) \cdot g(x)\big\} \;=\; \lim_{x\to x_0}\big\{f(x)\big\} \cdot \lim_{x\to x_0}\big\{g(x)\big\} \;=\; f(x_0) \cdot g(x_0). \tag{VIII.10}$$

(iii) Ist außerdem $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall\, x \in B(x_0, \delta) \cap X : \quad |g(x)| \;\geq\; \frac{1}{2}|g(x_0)| \;>\; 0. \tag{VIII.11}$$

Ferner ist dann $f/g : X \cap B_\rho(x_0, \delta) \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x)/g(x)$ stetig in x_0, und es gilt

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} \;=\; \frac{\lim_{x\to x_0}\big\{f(x)\big\}}{\lim_{x\to x_0}\big\{g(x)\big\}} \;=\; \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \tag{VIII.12}$$

Beweis. Folgt direkt aus den Sätzen VIII.2 und V.2. □

Satz VIII.4. *Seien $X, Y, Z \subseteq \mathbb{K}$, $g : X \to Y$ stetig in $x_0 \in X$ und $f : Y \to Z$ stetig in $y_0 := f(x_0) \in Y$. Dann ist auch $f \circ g : X \to Z$ stetig in $x_0 \in X$, und es gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \big\{ f\big(g(x)\big) \big\} \ = \ f\big(g(x_0)\big). \tag{VIII.13}$$

Beweis. Auch dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz VIII.2. □

VIII.2 Erhaltung topologischer Eigenschaften durch stetige Funktionen

Die im Kapitel VII vorgestellten Begriffe der offenen, abgeschlossenen oder kompakten Menge sind grundlegend für die Topologie. In der Tat bezeichnet man eine Menge, aus deren Teilmengen man ein System offener Mengen bilden kann, als topologischen Raum. Wie wir im Folgenden sehen werden, erhalten stetige Abbildungen diese topologische Struktur. Daher spielen stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen in der Topologie eine so wichtige Rolle, wie etwa die Homomorphismen zwischen Vektorräumen in der linearen Algebra.

Satz VIII.5. *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{K}$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende drei Aussagen gleichwertig:*

$$(i) \quad f \text{ ist stetig auf } X; \tag{VIII.14}$$

$$\Leftrightarrow (ii) \quad \forall\, V \subseteq \mathbb{K},\ V \text{ offen } \exists\, U \subseteq \mathbb{K},\ U \text{ offen}: \quad f^{-1}[V] = U \cap X; \tag{VIII.15}$$

$$\Leftrightarrow (iii) \quad \forall\, V \subseteq \mathbb{K},\ V \text{ abgeschlossen } \exists\, U \subseteq \mathbb{K},\ U \text{ abgeschlossen}: \quad f^{-1}[V] = U \cap X. \tag{VIII.16}$$

Satz VIII.5 ist etwas sperrig, und wir beweisen die Aussage nur für den Spezialfall $X = Y = \mathbb{K}$, den wir unten formulieren. Wir verwenden aber folgendes Lemma über das Urbild

$$f^{-1}[V] \ = \ \big\{ x \in X \ \big|\ f(x) \in V \big\} \tag{VIII.17}$$

einer Menge $V \subseteq Y$ unter einer Abbildung $f : X \to Y$, wobei $X, Y \neq \emptyset$ nichtleere Mengen sind.

Lemma VIII.6. *Seien $X, Y \neq \emptyset$ zwei nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Seien weiterhin $U \subseteq X$ und $V, V' \subseteq Y$ Teilmengen und $\mathcal{W} \subseteq \mathfrak{P}(Y)$ eine Familie von Teilmengen von Y. Dann erhält das Urbild von f mengentheoretische Operationen und genauer gelten*

$$(i) \quad f^{-1}\Big[\bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \Big] \ = \ \bigcup_{W \in \mathcal{W}} f^{-1}[W], \quad f^{-1}\Big[\bigcap_{W \in \mathcal{W}} W \Big] \ = \ \bigcap_{W \in \mathcal{W}} f^{-1}[W], \tag{VIII.18}$$

$$(ii) \quad f^{-1}\big[Y \setminus V\big] \ = \ f^{-1}\big[V^c\big] \ = \ \big(f^{-1}[V]\big)^c \ = \ X \setminus f^{-1}[V], \tag{VIII.19}$$

$$(iii) \quad V \subseteq V' \quad \Rightarrow \quad f^{-1}[V] \subseteq f^{-1}[V'], \tag{VIII.20}$$

$$(iv) \quad U \ \subseteq \ f^{-1}\big[f(U)\big], \tag{VIII.21}$$

$$(v) \quad f\big(f^{-1}[V]\big) \ \subseteq \ V. \tag{VIII.22}$$

Den (leichten) Beweis von *(iv)* und *(v)* findet man in den Ergänzungen (s. Abschnitt VIII.3.2).

Korollar VIII.7. *Sei $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ eine Abbildung. Dann sind folgende drei Aussagen gleichwertig:*

$$(i) \quad f \text{ ist stetig auf } X; \tag{VIII.23}$$

$$\Leftrightarrow (ii) \quad \forall\, V \subseteq \mathbb{K} : \ V \text{ offen} \ \Rightarrow \ f^{-1}[V] \text{ offen}; \tag{VIII.24}$$

$$\Leftrightarrow (iii) \quad \forall\, V \subseteq \mathbb{K} : \ V \text{ abgeschlossen} \ \Rightarrow \ f^{-1}[V] \text{ abgeschlossen}. \tag{VIII.25}$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Stetigkeit (i) von f auf $\mathbb{K}$ äquivalent ist zu

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{K},\ \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 : \quad f\big[B(x_0, \delta)\big] \ \subseteq \ B\big(f(x_0), \varepsilon\big)\,. \tag{VIII.26}$$

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Sei $V \subseteq \mathbb{K}$ offen und gelte (VIII.26). Ist $x_0 \in f^{-1}[V]$, so ist $f(x_0) \in V$ ein innerer Punkt, da V offen ist. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ so, dass $B\big(f(x_0), \varepsilon\big) \subseteq V$. Mit (VIII.26) gibt es dann auch ein $\delta > 0$ so, dass $f\big[B(x_0, \delta)\big] \subseteq B\big(f(x_0), \varepsilon\big)$. Mit Lemma VIII.6 gilt somit

$$B(x_0, \delta) \ \subseteq \ f^{-1}\Big(f\big[B(x_0, \delta)\big]\Big) \subseteq f^{-1}\Big(B\big(f(x_0), \varepsilon\big)\Big) \subseteq f^{-1}[V]\,. \tag{VIII.27}$$

Also ist x_0 ein innerer Punkt von $f^{-1}[V]$ und $f^{-1}[V]$ ist offen.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Für $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ ist $B\big(f(x_0), \varepsilon\big)$ offen. Nach (ii) ist somit auch $U := f^{-1}\big[B\big(f(x_0), \varepsilon\big)\big]$ offen. Außerdem enthält U den Punkt x_0, der wegen der Offenheit von U ein innerer Punkt sein muss. Es gibt also ein $\delta > 0$ so, dass $B(x_0, \delta) \subseteq U$. Mit Lemma VIII.6 gilt dann

$$f\big[B(x_0, \delta)\big] \ \subseteq \ f(U) \ = \ f\Big(f^{-1}\big[B\big(f(x_0), \varepsilon\big)\Big) \ \subseteq \ B\big(f(x_0), \varepsilon\big) \tag{VIII.28}$$

und somit (VIII.26).

$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$: Wegen $\big(f^{-1}[V]\big)^c = f^{-1}\big[V^c\big]$ folgt die Äquivalenz von (ii) und (iii) sofort aus Satz VII.4. □

Satz VIII.8. *Seien $K \subseteq \mathbb{K}$ und $f : K \to \mathbb{K}$ eine auf K stetige Abbildung. Dann gilt*

$$\big\{\ K \text{ ist kompakt}\ \big\} \ \Longrightarrow \ \big\{\ f(K) \text{ ist kompakt}\ \big\}. \tag{VIII.29}$$

Beweis. Wir können o.B.d.A. $K \neq \emptyset$ annehmen. Seien I eine nichtleere Indexmenge und $\{V_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, also $V_i \subseteq Y$ offen, für jedes $i \in I$, und

$$f(K) \ \subseteq \ \bigcup_{i\in I} V_i. \tag{VIII.30}$$

Da f stetig ist, gibt es zu jedem $i \in I$ eine offene Menge $U_i \subseteq \mathbb{K}$,

$$f^{-1}\big[V_i\big] \ = \ U_i \cap K. \tag{VIII.31}$$

Außerdem ist nach Lemma VIII.6

$$K \subseteq f^{-1}[f(K)] \subseteq f^{-1}\Big[\bigcup_{i\in I} V_i\Big] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i, \tag{VIII.32}$$

und somit ist $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ eine offene Überdeckung von K, die wegen dessen Kompaktheit eine endliche offene Überdeckung $\{U_{i_2}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_L}\}$ enthält, wobei $L \in \mathbb{N}$. Also ist

$$K = \bigcup_{\ell=1}^{L} \{U_{i_\ell} \cap K\} = \bigcup_{\ell=1}^{L} f^{-1}\big(V_{i_\ell}\big) = f^{-1}\Big[\bigcup_{\ell=1}^{L} V_{i_\ell}\Big]. \tag{VIII.33}$$

Mit Lemma VIII.6 folgt nun, dass

$$f(K) = f\bigg(f^{-1}\Big[\bigcup_{\ell=1}^{L} V_{i_\ell}\Big]\bigg) \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{L} V_{i_\ell}. \tag{VIII.34}$$

Daher ist $\{V_{i_1}, \ldots, V_{i_L}\}$ eine endliche offene Überdeckung von $f(K)$ und $f(K)$ somit kompakt. □

Korollar VIII.9. *Seien $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig auf K. Dann gibt es $x_{\min}, x_{\max} \in K$, so dass*

$$f\big(x_{\min}\big) = \inf\{f(K)\} \quad \textit{und} \quad f\big(x_{\max}\big) = \sup\{f(K)\}. \tag{VIII.35}$$

Beweis. Nach Satz VIII.8 ist $f(K)$ kompakt, und nach Satz VII.17 von Heine-Borel ist $f(K)$ somit beschränkt und abgeschlossen. Daraus folgt, dass

$$-\infty < \inf\{f(K)\} \in f(K), \tag{VIII.36}$$

$$\infty > \sup\{f(K)\} \in f(K), \tag{VIII.37}$$

was gerade (VIII.35) impliziert. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Für Korollar VIII.9 hat sich auch folgende Sprechweise eingebürgert:
  Eine stetige Funktion auf einem Kompaktum nimmt ihr Maximum und Minimum an.

- Außerdem schreibt man in dem Fall, dass für $A \subseteq \mathbb{R}$ auch $\inf\{A\} \in A$ bzw. $\sup\{A\} \in A$ gilt,

$$\inf\{A\} =: \min\{A\} \quad \text{und} \quad \sup\{A\} =: \max\{A\}. \tag{VIII.38}$$

- Sind $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ stetig auf K, so ist

$$\inf\{f(K)\} = \min\{f(K)\} > 0. \tag{VIII.39}$$

- Für $f : (0, 1] \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x$, ist $U := (0, 1]$ nicht kompakt, und daher überrascht es auch nicht, dass

$$\inf\{f(U)\} = 0 \notin f(U). \tag{VIII.40}$$

- Für $0 < a < 1$ und $f : [a, 1] \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x$, ist $K := [a, 1]$ kompakt, und es gilt

$$\inf\{f(K)\} \;=\; \min\{f(K)\} \;=\; a > 0. \tag{VIII.41}$$

Definition VIII.10. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{K}$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **gleichmäßig**[1] **stetig auf X**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x, x' \in X, |x - x'| < \delta : \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{VIII.42}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Der Begriff "gleichmäßig" bezieht sich hier auf $\delta > 0$. Vergleichen wir nämlich (VIII.42) mit der Definition VIII.1 der Stetigkeit, so gilt

$$\Big[f \text{ ist stetig auf } X \Big] \tag{VIII.43}$$
$$\Leftrightarrow \; \Big[\forall x_0 \in X \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta_{\varepsilon, x_0} > 0 \;\; \forall\, x \in B(x_0, \delta) \cap X : f(x) \;\in\; B\big(f(x_0), \varepsilon\big) \Big].$$

  Man beachte, dass $\delta > 0$ in (VIII.43) möglicherweise von $\varepsilon > 0$ und von $x_0 \in X$ abhängt, während (VIII.42) verlangt, dass dasselbe $\delta > 0$ für alle $x_0 \in X$ funktioniert und nur von $\varepsilon > 0$ abhängt. Es gilt also

$$\Big[f \text{ ist gleichmäßig stetig auf } X \Big] \quad \Rightarrow \quad \Big[f \text{ ist stetig auf } X \Big]. \tag{VIII.44}$$

- $X := (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \delta_\varepsilon := \varepsilon^2 > 0$. Sind nun $x, x' \in X$ und $|x - x'| \leq \delta$, so gilt

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x'}|^2 \;\leq\; |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{x'}| \;=\; |x - x'| \;\leq\; \delta, \tag{VIII.45}$$

  also

$$|f(x) - f(x')| \;=\; |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \;\leq\; \sqrt{\delta} \;=\; \varepsilon, \tag{VIII.46}$$

  und f ist gleichmäßig stetig auf X.

- $X := (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1}{x}$. Für $\varepsilon > 0$ und $x_0 > 0$ wählen wir

$$\delta \;=\; \delta_{\varepsilon, x_0} \;:=\; \min\Big\{ \frac{1}{2}|x_0|, \; \frac{1}{2}|x_0|^2 \cdot \varepsilon \Big\} \;>\; 0. \tag{VIII.47}$$

  Ist nun $x \in B_\delta(x_0)$, also $|x - x_0| < \delta$, so gilt

$$|g(x) - g(x_0)| \;=\; \Big| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \Big| \;=\; \frac{|x - x_0|}{|x| \cdot |x_0|} \;\leq\; \frac{\delta}{\big(|x_0| - \delta\big) \cdot |x_0|} \;\leq\; \varepsilon, \tag{VIII.48}$$

  also ist g stetig in $x_0 \in X$, und weil $x_0 \in X$ beliebig ist, ist g stetig auf X.

[1] engl.: uniformly

- Seien nun $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$, $x > 0$ und $x' := x + \frac{1}{2}\delta$, also $|x - x'| < \delta$. Dann ist
$$|g(x) - g(x')| \;=\; \frac{1}{x} - \frac{1}{x + (\delta/2)} \;=\; \frac{\delta/2}{x\,[x + (\delta/2)]}. \tag{VIII.49}$$
Für $x := \min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\,\delta\right\}$ ist somit $|x - x'| < \delta$, aber
$$|g(x) - g(x')| \;\geq\; \frac{\delta/2}{x \cdot \delta} \;\geq\; \frac{\delta/2}{\delta/2} \;=\; 1 \;>\; \varepsilon. \tag{VIII.50}$$
Also ist g nicht gleichmäßig stetig auf X.

Die Unterscheidung zwischen stetigen und gleichmäßig stetigen Funktionen ist schwierig. Es gibt aber einen wichtigen Spezialfall, für den jede stetige Funktion auch gleichmäßig stetig ist, d.h. für den in (VIII.44) auch die Umkehrung "$\Longleftarrow$" gilt.

Satz VIII.11. *Seien $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{K}$. Dann gilt*
$$\Big[f \text{ ist stetig auf } K\Big] \quad \Longleftrightarrow \quad \Big[f \text{ ist gleichmäßig stetig auf } K\Big]. \tag{VIII.51}$$

Beweis. Die Richtung "$\Longleftarrow$" ist gerade (VIII.44) und gilt trivialerweise.
<u>"$\Longrightarrow$"</u>: Seien $\varepsilon > 0$ und f stetig auf K. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in K$ ein $\delta(x_0) > 0$, so dass
$$\forall\, x \in B[x_0, \delta(x_0)] \cap K : \quad f(x) \;\in\; B\big(f(x_0),\, \tfrac{1}{2}\varepsilon\big). \tag{VIII.52}$$
Die Familie $\big\{B[x_0, \frac{1}{2}\delta(x_0)]\big\}_{x_0 \in K} \subseteq X$ offener Kugeln bildet eine offene Überdeckung von K, und weil K kompakt ist, enthält sie eine endliche offene Überdeckung. D.h. es gibt ein $L \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_L \in K$, so dass
$$K \;\subseteq\; B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_L, \tag{VIII.53}$$
wobei $B_\ell := B[x_\ell, \frac{1}{2}\delta(x_\ell)]$. Wir setzen
$$\delta \;:=\; \frac{1}{2} \min\Big\{\delta(x_1), \delta(x_2), \ldots, \delta(x_L)\Big\}. \tag{VIII.54}$$
Seien nun $x, x' \in K$ mit $|x - x'| < \delta$. Wegen (VIII.53) gibt es ein $\ell \in \mathbb{Z}_1^L$, so dass $x \in B_\ell$, d.h.
$$|x - x_\ell| \;\leq\; \frac{1}{2}\,\delta(x_\ell). \tag{VIII.55}$$
Wegen $\delta \leq \frac{1}{2}\delta(x_\ell)$ folgt außerdem, dass
$$|x' - x_\ell| \;\leq\; |x' - x| + |x - x_\ell| \;<\; \delta + \frac{1}{2}\,\delta(x_\ell) \;\leq\; \delta(x_\ell). \tag{VIII.56}$$
Es liegen also beide Punkte x und x' in $B[x_\ell, \delta(x_\ell)]$,
$$x, x' \;\in\; B[x_\ell,\, \delta(x_\ell)], \tag{VIII.57}$$
was gemäß (VIII.52)
$$f(x), f(x') \;\in\; B\big[f(x_\ell),\, \tfrac{1}{2}\varepsilon\big] \tag{VIII.58}$$
impliziert. Also ist
$$|f(x) - f(x')| \;\leq\; |f(x) - f(x_\ell)| \;+\; |f(x_\ell) - f(x')| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon, \tag{VIII.59}$$
und f ist gleichmäßig stetig auf K. $\square$

VIII.3 Ergänzungen

VIII.3.1 Stetigkeit von Polynomen und der Exponentialfunktion

- Offensichtlich sind $f_0(x) = 1$ und $f_1(x) = x$ stetige Funktionen auf $\mathbb{K}$. Die Stetigkeit eines Polynoms

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_N x^N \\ &= \big(c_0 \cdot f_0 + c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot [f_1]^2 + \ldots + c_N \cdot [f_1]^N\big)[x] \end{aligned} \tag{VIII.60}$$

  folgt nun aus Satz VIII.3.

- Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $z \in D(z_0, 1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \big|e^z - e^{z_0}\big| \;&=\; \big|e^{z-z_0} - 1\big| \cdot \big|e^{z_0}\big| \;=\; \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}\right| \cdot \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{n!}\right| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z-z_0|^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z_0|^n}{n!}\right) \;=\; |z-z_0| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^k}{(k+1)!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z_0|^n}{n!}\right) \\ &\leq |z-z_0| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z_0|^n}{n!}\right) \;\leq\; |z-z_0|\, e^{|z-z_0|}\, e^{|z_0|} \;\leq\; |z-z_0|\, e^{|z_0|+1}. \end{aligned} \tag{VIII.61}$$

  Somit ist $\lim_{z \to z_0}\{e^z\} = e^{z_0}$, für alle $z_0 \in \mathbb{C}$, und $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig auf $\mathbb{C}$.

- Mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $g(z) = -z^2$ und $f(w) = e^w$ folgt aus der Stetigkeit von f und g auf $\mathbb{C}$ folgt mit Satz VIII.4 auch die Stetigkeit von $(f \circ g)[z] = \exp[-z^2]$ auf $\mathbb{C}$.

VIII.3.2 Beweis von Lemma VIII.6

Beweis.
Zu (i): Sei $x \in U$, so ist

$$x \in \big\{\tilde{x} \in X \mid f(\tilde{x}) = f(x)\big\} \;=\; f^{-1}[f(x)] \;\subseteq\; f^{-1}[f(U)]. \tag{VIII.62}$$

Da $x \in U$ beliebig ist, folgt (VIII.21).
Zu (ii): Sei $y \in f\big(f^{-1}[V]\big)$. Dann gibt es ein $x \in f^{-1}(V)$, so dass $y = f(x) \in V$. □

Wir bemerken, dass $U \subseteq f^{-1}[f(U)]$ und $f(f^{-1}[V])$ im Allgemeinen echte Inklusionen sind. Sei beispielsweise $f = \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Für $U := \{\frac{\pi}{2}\}$ sind $f(U) = \{1\}$ und $f^{-1}[f(U)] = 2\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$.
- Für $V := [-2, 2]$ sind $f^{-1}[V] = \mathbb{R}$ und $f(f^{-1}[V]) = [-1, 1]$.

und $U := \{\frac{\pi}{2}\}$ sind $f(U) = \{1\}$ und $f^{-1}[f(U)] = 2\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$.

Kapitel IX

Differentiation

In diesem Kapitel wollen wir den Begriff der Ableitung für reelle Funktionen einer reellen Variablen diskutieren. Der allgemeine Fall einer vektorwertigen Funktion wird später noch ausführlich behandelt.

IX.1 Differenzierbare Funktionen

Definition IX.1. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(i) f ist **bei $\mathbf{x_0 \in U}$ differenzierbar** $:\Leftrightarrow$

$$f'(x_0) \;:=\; \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} \;\in\; \mathbb{R} \tag{IX.1}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ **Ableitung von f bei $\mathbf{x_0}$**, und wir schreiben auch

$$f'(x_0) \;=:\; \frac{df(x_0)}{dx} \;=:\; \left(\frac{d}{dx}\, f \right)(x_0). \tag{IX.2}$$

Der Quotient $\big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0)$, für $x \neq x_0$ heißt **Differenzenquotient**.

(ii) f ist auf U differenzierbar $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, x_0 \in U : \quad f \text{ ist bei } x_0 \text{ differenzierbar.} \tag{IX.3}$$

Lemma IX.2. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann gilt:*

$$\Big\{ f \text{ ist bei } x_0 \in U \text{ differenzierbar} \Big\} \;\Leftrightarrow \tag{IX.4}$$

$$\Big\{ \exists\, c \in \mathbb{R} \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in B(x_0, \delta) : \quad \Big| f(x) - \big[f(x_0) + c \cdot (x - x_0) \big] \Big| \;\leq\; \varepsilon\, |x - x_0| \Big\}.$$

In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz VIII.2 (Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit). $\square$

Bemerkungen und Beispiele.
Glg. (IX.4) sagt, dass $g_*(x) := f(x_0) + f'(x) \cdot (x - x_0)$ die beste lineare Approximation für $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 ist. Ist nämlich $g(x) = mx + b$ eine Gerade, die die Funktion f in der Nähe von x_0 approximiert, so sollten f und g natürlich zumindest in x_0 übereinstimmen, d.h. es sollte $f(x_0) = g(x_0) = mx_0 + b$ und somit $b = f(x_0) - mx_0$ gelten, was auf

$$g(x) \;=\; f(x_0) + m(x - x_0)$$

führt. Sind nun $m \neq f'(x_0)$ und $0 < \tau \ll 1$ genügend klein, so erhalten wir aus (IX.4) mit $\varepsilon := \frac{1}{2}|m - f'(x_0)|\,\tau > 0$ ein $\delta_\tau > 0$ so, dass

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| \;&=\; \Big|[m - f'(x_0)](x - x_0) - \big(f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]\big)\Big| \\ &\geq |m - f'(x_0)|\,|x - x_0| \;-\; \tfrac{1}{2}|m - f'(x_0)|\,\tau\,|x - x_0| \;\geq\; \tfrac{1}{2}|m - f'(x_0)|\,|x - x_0| \end{aligned} \tag{IX.5}$$

und daher auch

$$\left|\frac{g_*(x) - f(x)}{g(x) - f(x)}\right| \;\leq\; \frac{\frac{1}{2}|m - f'(x_0)|\,\tau\,|x - x_0|}{\frac{1}{2}|m - f'(x_0)|\,|x - x_0|} \;=\; \tau \tag{IX.6}$$

für alle $x \in B(x_0, \delta_\tau) \setminus \{x_0\}$ gilt. Da $\tau > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, ist g_* offenbar die bestmögliche Wahl für die approximierende Gerade g.

Lemma IX.3. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ bei $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann ist f in $x_0 \in U$ stetig.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $U \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \big\{f(x_n)\big\} \;&=\; \lim_{n\to\infty} \left\{\Big(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\Big) \cdot (x_n - x_0) \;+\; f(x_0)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right\} \cdot \lim_{n\to\infty} \big\{x_n - x_0\big\} \;+\; f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) \;=\; f(x_0). \end{aligned} \tag{IX.7}$$

∎

Satz IX.4. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in U$. Dann sind $f + \alpha g$, $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei x_0, und es gelten*

*(i) die **Linearität**, d.h. es gilt*

$$\big(f + \alpha g\big)'(x_0) \;=\; f'(x_0) + \alpha \cdot g'(x_0), \tag{IX.8}$$

*(ii) die **Produktregel**,*

$$(f \cdot g)'(x_0) \;=\; f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0), \tag{IX.9}$$

(iii) und, für $g(x_0) \neq 0$, die ***Quotientenregel***

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \;=\; \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \tag{IX.10}$$

Beweis. Gleichung (IX.8) folgt aus

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}\right\} \;=\; \lim_{x\to x_0}\left\{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right\}$$
$$= f'(x_0)+g'(x_0). \tag{IX.11}$$

Für den Beweis von (IX.9) benutzen wir die Stetigkeit von f und g bei x_0, nach Lemma IX.3. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(x_0) \;&=\; \lim_{x\to x_0}\left\{\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\right\} \qquad \text{(IX.12)}\\ &=\; \lim_{x\to x_0}\left\{\frac{f(x)[g(x)-g(x_0)]+[f(x)-f(x_0)]g(x_0)}{x-x_0}\right\}\\ &=\; \lim_{x\to x_0}\{f(x)\}\cdot\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right\}+\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right\}\cdot g(x_0)\\ &=\; f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)\cdot g(x_0).\end{aligned}$$

Für $g(x_0)\neq 0$ ist wegen der Stetigkeit von g in x_0 auch $g(x)\neq 0$ für x genügend nahe bei x_0, und wir erhalten

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\left\{\frac{1}{(x-x_0)}\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}\right)\right\} = \lim_{x\to x_0}\left\{\frac{(-1)}{g(x)g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right\} = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}, \tag{IX.13}$$

was mit Hilfe der Produktregel über $\frac{f}{g} = f\cdot\frac{1}{g}$ sofort die Quotientenregel (IX.10) impliziert. □

Satz IX.5 (Kettenregel)**.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen, $g : U \to V$ differenzierbar bei $x_0 \in U$ und $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $g(x_0) \in V$. Dann ist $[f\circ g] : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in U$, und es gilt*

$$(f\circ g)'(x_0) \;=\; f'\big(g(x_0)\big)\cdot g'(x_0). \tag{IX.14}$$

Beweisidee. Sei $(x_n)_{n=0}^\infty \in (U\setminus\{x_0\})^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x_0$, für die $g(x_n)\neq g(x_0)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt. Da g bei x_0 differenzierbar ist, ist g in x_0 auch stetig, und mit $x_n\to x_0$ konvergiert für $n\to\infty$ auch $g(x_n)\to g(x_0)$. Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f[g(x_n)]-f[g(x_0)]}{x_n-x_0}\right\} \;=\; \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{f[g(x_n)]-f[g(x_0)]}{g(x_n)-g(x_0)}\right)\cdot\left(\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}\right)\right\} \tag{IX.15}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f[g(x_n)]-f[g(x_0)]}{g(x_n)-g(x_0)}\right\}\cdot\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}\right)\right\} \;=\; f'[g(x_0)]\,g'(x_0)\,.$$

Ohne die zusätzliche Bedingung, dass $g(x_n)\neq g(x_0)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gelte, wäre der Beweis vollständig. Das Umgehen dieser Bedingung ist jedoch technisch aufwändig, ohne dass eine neue Idee hinzu käme, deshalb verzichten wir auf die Darstellung hier und verweisen auf die Ergänzungen am Ende des Kapitels. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $U := \mathbb{R}$ und $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist f_n auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f_n'(x) \;=\; n\, x^{n-1}. \tag{IX.16}$$

Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst $n = 0, 1$. $f_0(x) - f_0(x_0) = 1 - 1 = 0$, für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$, also gilt

$$f_0' \;=\; 0 \quad \big(= 0 \cdot x^{-1} \big). \tag{IX.17}$$

Weiterhin ist

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} \right\} \;=\; \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{x - x_0}{x - x_0} \right\} \;=\; 1, \tag{IX.18}$$

also

$$f_1'(x) \;=\; 1 \quad \big(= 1 \cdot x^0 \big). \tag{IX.19}$$

Gelte nun (IX.16) für alle $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Dann ist nach der Produktregel

$$\begin{aligned} f_{N+1}'(x) \;&= (f_1 \cdot f_N)'(x) \;=\; f_1'(x) \cdot f_N(x) + f_1(x) \cdot f_N'(x) \\ &= 1 \cdot x^N + x \cdot N \cdot x^{N-1} \;=\; (N+1) \cdot x^N. \end{aligned} \tag{IX.20}$$

Somit folgt (IX.16) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch Induktion.

- Seien $U := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist auch f_n auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, und es gilt

$$f_n'(x) \;=\; n\, x^{n-1}. \tag{IX.21}$$

Für $n < 0$ folgt dies aus der Quotientenregel,

$$\begin{aligned} f_n'(x) \;&=\; \Big(\frac{f_0}{f_{-n}} \Big)'(x) \;=\; \frac{1}{f_{-n}(x)^2} \Big(f_0'(x) \cdot f_{-n}(x) \;-\; f_0(x) \cdot f_{-n}'(x) \Big) \\ &=\; \frac{1}{x^{-2n}} \cdot \Big(0 \;-\; 1 \cdot (-n) \cdot x^{-n-1} \Big) \;=\; n \cdot x^{n-1}. \end{aligned} \tag{IX.22}$$

- Sei $U = \mathbb{R}$, dann ist die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$\big(e^x \big)' \;=\; e^x. \tag{IX.23}$$

Für $x \neq x_0$ ist nämlich

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - e^{x_0} \;=\; e^{x_0} \Big(\frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \;-\; 1 \Big) \;=\; e^{x_0} \Big(\frac{e^{x-x_0} - 1 - (x - x_0)}{x - x_0} \Big) \tag{IX.24}$$

und

$$\left|e^{x-x_0} - 1 - (x-x_0)\right| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x-x_0|^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-x_0|^{n+2}}{(n+2)!} \tag{IX.25}$$
$$\le |x-x_0|^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-x_0|^n}{n!} = |x-x_0|^2 \cdot e^{|x-x_0|}.$$

Also ist

$$\lim_{x\to x_0} \left| \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} - e^{x_0} \right| = e^{x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \left| \frac{e^{x-x_0} - 1 - (x-x_0)}{x-x_0} \right|$$
$$\le e^{x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \left\{ |x-x_0| \cdot e^{|x-x_0|} \right\} = 0. \tag{IX.26}$$

IX.2 Minima, Maxima und Mittelwertsätze

Definition IX.6. Seien $X \subseteq \mathbb{K}$ eine Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf X.

(i) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **lokales Minimum von f** $:\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in B_{\mathbb{K}}(x_0, \delta) \cap X : \qquad f(x) \ge f(x_0). \tag{IX.27}$$

(ii) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **globales Minimum von f** $:\Leftrightarrow$

$$\forall x \in X : \qquad f(x) \ge f(x_0). \tag{IX.28}$$

(iii) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **lokales Maximum von f** $:\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in B_{\mathbb{K}}(x_0, \delta) \cap X : \qquad f(x) \le f(x_0). \tag{IX.29}$$

(iv) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **globales Maximum von f** $:\Leftrightarrow$

$$\forall x \in X : \qquad f(x) \le f(x_0). \tag{IX.30}$$

Satz IX.7. *Seien $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, x_0 ein I.P. von X und f bei $x_0 \in X$ differenzierbar. Dann gilt:*

$$\Big[x_0 \text{ ist ein lokales Maximum oder Minimum}\Big] \Rightarrow \Big[f'(x_0) = 0\Big]. \tag{IX.31}$$

Beweis. Wir beweisen (IX.31) nur im Fall, dass x_0 ein lokales Minimum ist (die Behandlung des Falls eines lokalen Maximums ist analog). Es gibt also ein $\delta > 0$ so, dass

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \quad f(x) \ge f(x_0). \tag{IX.32}$$

Somit sind

$$\forall\, x_0 - \delta \le x < x_0 : \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \;\le\; 0, \tag{IX.33}$$

$$\forall\, x_0 < x \le x_0 + \delta : \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \;\ge\; 0. \tag{IX.34}$$

Da $f'(x)$ als Grenzwert des Differenzenquotienten nach Voraussetzung existiert und somit auch eindeutig ist, folgt

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} \;=\; 0. \tag{IX.35}$$

□

Eine Anwendung dieses Satzes ist der nun folgende Mittelwertsatz.

Satz IX.8 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a,b]$ *und differenzierbar auf* (a,b)*. Dann gibt es einen Punkt* $x_0 \in (a,b)$ *so, dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \;=\; f'(x_0). \tag{IX.36}$$

Beweis. Wir setzen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\forall\, x \in [a,b] : \quad g(x) \;:=\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x \;-\; f(x). \tag{IX.37}$$

Dann ist auch g stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b).
Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Ist $g(x) \equiv c$ konstant auf $[a,b]$, so gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x) \;=\; g'(x) \;=\; 0, \tag{IX.38}$$

sogar für alle $x \in (a,b)$. (In diesem Fall ist nämlich der Graph von f eine Gerade.)
2. Sei g nicht konstant auf $[a,b]$. Weil $[a,b]$ kompakt und g stetig auf $[a,b]$ sind, nimmt g in $[a,b]$ sein Minimum und Maximum an, d.h. es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$, so dass

$$g(x_{\min}) \;=\; \inf\big\{ g([a,b]) \big\}, \quad g(x_{\max}) \;=\; \sup\big\{ g([a,b]) \big\}, \tag{IX.39}$$

und weil g nicht konstant ist, gilt

$$g(x_{\min}) \;<\; g(x_{\max}). \tag{IX.40}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} g(a) \;&=\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a \;-\; f(a) \;=\; \frac{f(b)a \;-\; bf(a)}{b - a} \\ &=\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b \;-\; f(b) \;=\; g(b). \end{aligned} \tag{IX.41}$$

Daher muss entweder $x_{\max} \in (a,b)$ und

$$g\big(x_{\min}\big) \;=\; g(a) \;=\; g(b) \;<\; g\big(x_{\max}\big) \tag{IX.42}$$

oder $x_{\min} \in (a,b)$ und

$$g\big(x_{\min}\big) \;<\; g(a) \;=\; g(b) \;=\; g\big(x_{\max}\big) \tag{IX.43}$$

oder sogar $x_{\min}, x_{\max} \in (a,b)$ und

$$g\big(x_{\min}\big) \;<\; g(a) \;=\; g(b) \;<\; g\big(x_{\max}\big) \tag{IX.44}$$

gelten.

Gilt etwa (IX.43), so ist $x_{\min}$ ein innerer Punkt von (a,b) und ein lokales Minimum von g und deshalb nach Satz IX.7

$$0 = g'\big(x_{\min}\big) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'\big(x_{\min}\big), \tag{IX.45}$$

und $x_{\min}$ ist der gesuchte Punkt in (IX.36). Analog beweist man (IX.36) für (IX.42) und (IX.44).

□

Als Nächstes zeigen wir, dass die Positivität oder Negativität der Ableitung die Monotonie der Funktion impliziert.

Definition IX.9. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f : U \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ heißt } \left\{ \begin{array}{l} \textbf{monoton steigend} \\ \textbf{streng monoton steigend} \\ \textbf{monoton fallend} \\ \textbf{streng monoton fallend} \end{array} \right\} \text{ in } U$$

$$:\Leftrightarrow \; \forall\, x, x' \in U,\; x < x' : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & \leq & f(x') \\ f(x) & < & f(x') \\ f(x) & \geq & f(x') \\ f(x) & > & f(x') \end{array} \right. . \tag{IX.46}$$

Satz IX.10. *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b). Dann gelten*

$$\left(\forall\, x \in (a,b) : \; f'(x) \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ > \\ \leq \\ < \\ = \end{array} \right\} 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \left(f \textit{ ist} \left\{ \begin{array}{c} \textit{monoton steigend} \\ \textit{streng monoton steigend} \\ \textit{monoton fallend} \\ \textit{streng monoton fallend} \\ \textit{konstant} \end{array} \right\} \textit{in } [a,b] \right) \tag{IX.47}$$

und

$$\left(\forall\, x \in (a,b) : \; f'(x) \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \\ = \end{array} \right\} 0 \right) \quad \Leftarrow \quad \left(f \textit{ ist} \left\{ \begin{array}{c} \textit{monoton steigend} \\ \textit{monoton fallend} \\ \textit{konstant} \end{array} \right\} \textit{in } [a,b] \right). \tag{IX.48}$$

Beweis. Wir zeigen nur (IX.47). Seien $x, x' \in [a, b]$ und $x < x'$. Dann ist die Einschränkung von f auf $[x, x']$ auch stetig auf $[x, x']$ und differenzierbar auf (x, x'). Nach dem Mittelwertsatz IX.5 gibt es also einen Punkt $x_0 \in (x, x')$, so dass

$$f(x') - f(x) \; = \; (x' - x) \cdot f'(x_0). \tag{IX.49}$$

Dies ergibt sofort die Implikation (IX.47) in allen Fällen. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Umkehrung (IX.48) von (IX.47) kann im Allgemeinen nicht mit strikten Ungleichungen formuliert werden, d.h. aus der strikten Monotonie von f folgt nicht die strikte Positivität bzw. Negativität der Ableitung f'. So ist beispielsweise $f(x) := x^3$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend, aber $f'(0) = 0$.

Den Beweis des folgenden Korollars findet man bei den Ergänzungen.

Korollar IX.11. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Ist $f' > 0$ auf (a, b), so ist f streng monoton steigend auf $[a, b]$. In diesem Fall ist $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, und $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ ist eine Bijektion, deren Umkehrfunktion $F := f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ auf $[f(a), f(b)]$ stetig und auf $(f(a), f(b))$ differenzierbar ist, mit*

$$\forall\, y \in \big(f(a), f(b)\big) : \quad F'(y) \; = \; \frac{1}{f'[F(y)]}. \tag{IX.50}$$

IX.3 Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

Definition IX.12. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $n \in \mathbb{N}$.

(i) f ist **bei $\mathbf{x_0} \in \mathbf{U}$ n-mal differenzierbar**.

:⇔ Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in (x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta)$:

$$\begin{aligned}
&f \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f'(x) := \tfrac{df}{dx}\,(x),\\
&f'(x) \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f''(x) := \tfrac{d}{dx}\,[f'](x),\\
&f''(x) \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f'''(x) := \tfrac{d}{dx}\,[f''](x),\\
&\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&f^{(n-2)}(x) \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f^{(n-1)}(x) := \tfrac{d}{dx}\,[f^{(n-2)}](x),\\
&f^{(n-1)}(x) \text{ ist differenzierbar bei } x_0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) := \tfrac{d}{dx}\,[f^{(n-1)}](x_0).
\end{aligned} \tag{IX.51}$$

Wir schreiben die k. Ableitung auch als

$$\frac{d^k f}{dx^k}\,(x) \; := \; f^{(k)}(x). \tag{IX.52}$$

(ii) f ist **auf U n-mal differenzierbar.**

:⇔

$$\forall\, x_0 \in U : \quad f \text{ ist bei } x_0 \text{ n-mal differenzierbar.} \tag{IX.53}$$

Satz IX.13 (Taylor)**.** *Seien $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $a < x_0 < b$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf (a, b) $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ ein $x' \in (x, x_0)$ [falls $x < x_0$] bzw. $x' \in (x_0, x)$ [falls $x > x_0$], sodass*

$$f(x) = T_n[f, x_0; x] + R_{n+1}[f, x_0; x], \tag{IX.54}$$

wobei

$$\begin{aligned} T_n[f, x_0; x] &:= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{(x - x_0)^k}{k!} \, f^{(k)}(x_0) \right\} && \text{(IX.55)} \\ &= f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \, f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \, f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

*das **Taylorpolynom n. Ordnung** und*

$$R_{n+1}[f, x_0; x] := \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \, f^{(n+1)}(x') \tag{IX.56}$$

*das **Taylorsches Restglied $(\mathbf{n+1})$. Ordnung** sind.*

Beweis. Wir können $x > x_0$ annehmen, der Beweis für $x < x_0$ ist analog. Für alle $t \in [x_0, x]$ setzen wir

$$p(t) := \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{(t - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right\}, \tag{IX.57}$$

$$\lambda := \frac{(n+1)!}{(x - x_0)^{n+1}} \big(f(x) - p(x) \big) \tag{IX.58}$$

und

$$g(t) := f(t) - p(t) - \frac{\lambda}{(n+1)!} \, (t - x_0)^{n+1}. \tag{IX.59}$$

Beachte, dass für $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \frac{d^\ell p(t)}{dt^\ell} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \, \frac{d^\ell \big[(t - x_0)^k\big]}{dt^\ell} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot k \cdot \frac{d^{\ell-1} \big[(t - x_0)^{k-1}\big]}{dt^{\ell-1}} \\ &= \ldots = \sum_{k=\ell}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-\ell)!} \, (t - x_0)^{k-\ell}. && \text{(IX.60)} \end{aligned}$$

Somit ist

$$g^{(\ell)}(t) = f^{(\ell)}(t) - \sum_{m=0}^{n-\ell} \frac{f^{(m+\ell)}(x_0)}{m!} \, (t - x_0)^m - \frac{\lambda (t - x_0)^{n+1-\ell}}{(n+1-\ell)!}. \tag{IX.61}$$

Insbesondere sind

$$g(x_0) = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{0!} + 0 - 0 = 0, \tag{IX.62}$$

$$g^{(1)}(x_0) = f'(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!} + 0 - 0 = 0, \tag{IX.63}$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0 \tag{IX.64}$$

und

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \lambda. \tag{IX.65}$$

Nach Wahl von λ in (IX.58) folgt außerdem $g(x) = 0$, also

$$g(x_0) = g(x) = 0. \tag{IX.66}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x_1 \in (x_0, x)$, so dass $g'(x_1) = 0$. Also gilt

$$g'(x_0) = g'(x_1) = 0, \tag{IX.67}$$

und der Mittelwertsatz impliziert abermals die Existenz eines $x_2 \in (x_0, x_1)$ mit $g''(x_2) = 0$, also

$$g''(x_0) = g''(x_2) = 0, \tag{IX.68}$$

und damit wieder $g'''(x_3) = 0$ für ein gewisses $x_3 \in (x_0, x_2)$ u.s.w. Schließlich erhalten wir ein $x_{n+1} \in (x_0, x_n) \subseteq (x_0, x_{n-1}) \subseteq \ldots \subseteq (x_0, x)$ mit

$$0 = g^{(n+1)}\big(x_{n+1}\big) = f^{(n+1)}\big(x_{n+1}\big) - \lambda, \tag{IX.69}$$

also

$$f(x) = p(x) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}\big(x_{n+1}\big), \tag{IX.70}$$

und $x_{n+1} \in (x_0, x)$ ist der gesuchte Punkt x'. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt mit $f(x) := e^x$

  $$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) = \ldots = f'(x) = f(x) = e^x, \tag{IX.71}$$

  und insbesondere

  $$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(n)}(0) = 1. \tag{IX.72}$$

  Also ist

  $$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \left| e^x - \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \right\} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{|x|}, \tag{IX.73}$$

  denn für $x' \in (-x, x)$ ist $e^{x'} \leq e^{|x|}$.

- Für $x = 1$ und $n = 10$ erhält man

$$\left| e - \left\{ 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!} \right\} \right| = \left| e - (2,718281801) \right| \leq \frac{e}{11!} \leq e \cdot 0,000002505, \tag{IX.74}$$

also

$$2,71827 \leq \frac{2,718281801}{1,000002505} \leq e \leq \frac{2,718281801}{0,999997495} \leq 2,71829. \tag{IX.75}$$

- Sei folgende Aufgabe gestellt: *Berechne* $\sin(\frac{1}{10})$ *mit einer Genauigkeit von mindestens* 10^{-6}.

  Dazu wenden wir Satz IX.13 von Taylor auf $f(x) = \sin(x)$ mit $a = -\infty$, $b = \infty$ und $x_0 := 0$ an und berechnen die Ableitungen von f,

$$f^{(0)}(x) = \sin(x), \quad f^{(1)}(x) = \cos(x), \quad f^{(2)}(x) = -\sin(x), \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x), \tag{IX.76}$$

  u.s.w. Insbesondere sind dann

$$f^{(0)}(0) = 0, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1, \ \ldots \tag{IX.77}$$

  und wir erhalten

$$T_6[\sin, 0; x] = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{-1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \tag{IX.78}$$

  sowie

$$R_7[\sin, 0; x] = \frac{-\cos(x')}{7!}x^7. \tag{IX.79}$$

  Wegen $|\cos(x')| \leq 1$ ist nach dem Satz IX.13 von Taylor dann für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$,

$$\left| \sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \right| = |R_7[\sin, 0; x]| \leq \frac{|x|^7}{7!} = \frac{|x|^7}{5040}. \tag{IX.80}$$

  Wählen wir $x = \frac{1}{10}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left| \sin(\tfrac{1}{10}) - \left(0,1 - 0,0001\bar{6} + 0,00000008\bar{3}\right) \right| \\ &= \left| \sin(\tfrac{1}{10}) - (0,09983341\bar{6}) \right| \leq \frac{10^{-7}}{5000} = 2 \cdot 10^{-11}, \end{aligned} \tag{IX.81}$$

  d.h. mit nur drei Termen approximieren wir die Sinusfuktion von $\frac{1}{10}$ sogar mit einer Genauigkeit von $2 \cdot 10^{-11}$!

- Setzen wir in (IX.55) $n = \infty$, so erhalten wir $f(x)$ *formal* aus einer Potenzreihe um x_0, der Taylorreihe,

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k. \tag{IX.82}$$

  Für viele Funktionen kann man die Konvergenz dieser Reihe durch Abschätzung der Taylorschen Restglieder in beliebig hoher Ordnung gewinnen. Aus (IX.73) sieht man, dass dies z.B. für $f(x) = e^x$ gelingt, und in der Tat ist die e^x definierende Potenzreihe VI.7 gerade die Taylorreihe um $x_0 = 0$.

- Es gibt aber auch viele Funktionen, für die (IX.82) falsch ist. Betrachten wir z.B.

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \tag{IX.83}$$

  so ist $f(x) > 0$, für $x \neq 0$, aber

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \quad f^{(n)}(0) \;=\; 0, \tag{IX.84}$$

  d.h. die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \equiv 0, \tag{IX.85}$$

  verschwindet identisch. Damit konvergiert die Taylorreihe von f zwar, hat jedoch mit der Funktion f nichts zu tun!

- Eine Anwendung der Taylorschen Formel (IX.54) ist die Kurvendiskussion.

  Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so verschwindet zwar bei lokalem Maximum oder Minimum die Ableitung f', es ist aber noch nicht klar, wie man entscheiden kann, ob es sich auch wirklich um ein Maximum oder Minimum handelt. Dies lässt sich erst bei Betrachtung der höheren Ableitungen sagen; Darüber gibt Satz IX.14 Auskunft.

Satz IX.14. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $f : U \to \mathbb{R}$ eine auf U n-mal differenzierbare Abbildung. Sei weiterhin $x_0 \in U$, und gelte*

$$f'(x_0) \;=\; f''(x_0) \;=\; \ldots \;=\; f^{(n-1)}(x_0) \;=\; 0,\; f^{(n)}(x_0) \neq 0, \tag{IX.86}$$

und sei $f^{(n)}$ stetig in x_0. Dann liegt folgende Situation lokal bei x_0 vor:

- *Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so ist x_0 ein lokales Minimum;*
- *Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist x_0 ein lokales Maximum;*
- *Ist n ungerade, so ist x_0 ein Wendepunkt von f.*

Beweis. Wir zeigen nur, dass für gerades $n = 2k \geq 2$, also $k \in \mathbb{N}$ und $f^{(2k)}(x_0) > 0$ ein lokales Minimum vorliegt. Seien $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ und $0 < \delta \ll 1$. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein x' mit $|x' - x_0| \leq |x - x_0|$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{2k-1}}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(x') \\ &= f(x_0) + \frac{(x - x_0)^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(x'). \end{aligned} \tag{IX.87}$$

Da $f^{(2k)}$ in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta' > 0$, so dass

$$\forall\, |x' - x_0| < \delta' : \quad \left| f^{(2k)}(x') - f^{(2k)}(x_0) \right| \leq \frac{1}{2} f^{(2k)}(x_0), \tag{IX.88}$$

für $|x' - x_0| < \delta'$ also

$$f^{(2k)}(x') \geq f^{(2k)}(x_0) - \left| f^{(2k)}(x) - f^{(2k)}(x_0) \right| \geq \frac{1}{2} f^{(2k)}(x_0) > 0. \tag{IX.89}$$

Somit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x' - x_0| < \min\{\delta, \delta'\}$ auch

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{(x - x_0)^{2k}}{(2k)!} \frac{f^{(2k)}(x_0)}{2} \geq f(x_0). \tag{IX.90}$$

□

IX.4 Ergänzungen

IX.4.1 Beweis der Kettenregel

Beweis. (Beweis von Satz IX.5) Sei $\alpha > 0$. Dann gibt es gemäß Lemma IX.2 ein $\beta > 0$, so dass, für alle $y \in V$ mit $|y - g(x_0)| \leq \beta$ auch

$$\Big| f(y) - \big\{ f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(y - g(x_0)) \big\} \Big| \ \leq \ \alpha_i |y - g(x_0)| \tag{IX.91}$$

gilt. Wir setzen $\gamma := \min\{\beta, \alpha, 1\} > 0$. Weiterhin gibt es zu $\gamma > 0$ ein $\eta > 0$, so dass, für alle $x \in U$ mit $|x - x_0| \leq \eta$ auch

$$\Big| g(x) - \big\{ g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) \big\} \Big| \ \leq \ \gamma |x - x_0| \tag{IX.92}$$

gilt. Wir setzen

$$\kappa \ := \ \min \Big\{ \eta, \frac{\gamma}{|g'(x_0)| + \gamma} \Big\} > 0. \tag{IX.93}$$

Dann gilt für alle $|x - x_0| \leq \kappa$:

$$\Big| g(x) - g(x_0) \Big| \ \leq \ \Big(|g'(x_0)| + \beta \Big) |x - x_0| \ \leq \ \gamma, \tag{IX.94}$$

also auch

$$\begin{aligned} &\Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0) \big\} \Big| \\ &\quad \leq \Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'[g(x_0)] \cdot (g(x_0) - g(x_0)) \big\} \Big| \\ &\qquad + \ \Big| f'[g(x_0)] \Big| \cdot \Big| g(x) - \big\{ g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \big\} \Big|, \end{aligned} \tag{IX.95}$$

und somit

$$\begin{aligned} &\Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'(g(x_0)] g'(x_0)(x - x_0) \big\} \Big| \\ &\quad \leq \alpha |g(x) - g(x_0)| \ + \ \gamma |x - x_0| \ \leq \ \Big[\alpha |g'(x_0)| \ + \ \alpha\gamma + \gamma \Big] \cdot |x - x_0| \\ &\quad \leq \alpha \Big(|g'(x_0)| + 2 \Big) \cdot |x - x_0|, \end{aligned} \tag{IX.96}$$

da $\gamma \leq \min\{1, \alpha\}$.
Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir $\alpha := \varepsilon \cdot \big(|g'(x_0)| + 2 \big)^{-1}$ und anschließend $\beta, \gamma, \eta,$ und $\kappa =: \delta > 0$, wie in (IX.91)–(IX.93). Somit gilt für alle $|x - x_0| \leq \delta$:

$$\Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'[(g(x_0)] \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0) \big\} \Big| \ \leq \ \varepsilon \cdot |x - x_0|. \tag{IX.97}$$

□

IX.4.2 Zwischenwertsatz für die Ableitung

Für eine differenzierbare Funktion f ist die Ableitung f' im Allgemeinen nicht stetig, es gilt aber die folgende Aussage:

Lemma IX.15. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Seien $x, x' \in (a, b)$ mit $x < x'$, und $f'(x) < f'(x')$. Dann gibt es für jedes $f'(x) < \lambda < f'(x')$ ein $x < t < x'$, so dass $f'(t) = \lambda$.*

Beweis. Wir setzen

$$\forall\, x < t < x' : \quad g(t) := f(t) - \lambda \cdot t, \tag{IX.98}$$

so dass,

$$g'(x) \;=\; f'(x) - \lambda < 0, \quad g'(x') \;=\; f'(x') - \lambda > 0. \tag{IX.99}$$

Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall\, t \in (x, x + \delta) : \qquad g(x) > g(t), \tag{IX.100}$$

$$\forall\, t \in (x' - \delta, x') : \qquad g(t) < g(x'). \tag{IX.101}$$

Somit muss g in (x, x') ein lokales Minimum haben, d.h.

$$\exists\, t \in (x, x') : \quad 0 \;=\; g'(t) \;=\; f'(x) - \lambda. \tag{IX.102}$$

□

IX.4.3 0/0 und ∞/∞ – Der Satz von L'Hospital

Satz IX.16 (L'Hospital)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in U$ ein innerer Punkt und $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in U$. Seien weiterhin*

$$f(x_0) = g(x_0) = 0, \quad \forall\, 0 < |x - x_0| \le \delta : \; g(x) \neq 0 \tag{IX.103}$$

für ein gewisses $\delta > 0$, und $g'(x_0) \neq 0$. Dann lässt sich $f(x)/g(x)$ stetig in x_0 fortsetzen mit

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} \;=\; \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{IX.104}$$

Beweis. Für jedes $\alpha > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $0 < |x - x_0| \le \delta$

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \;\le \alpha |x - x_0|, \tag{IX.105}$$

$$|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)| \;\le \alpha |x - x_0|. \tag{IX.106}$$

Ist $0 < \alpha \le \frac{1}{2}|g'(x_0)|$, so gilt auch insbesondere

$$|g(x)| \;\ge\; \big(|g'(x_0)| - \alpha\big)|x - x_0| \;\ge\; \frac{g'(x_0)}{2}\, |x - x_0| \;>\; 0, \tag{IX.107}$$

für alle $0 < |x - x_0| \leq \delta$. Damit erhalten wir

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| \;=\; \left|\frac{\big(f'(x_0) + \alpha_f(x)\big)(x - x_0)}{\big(g'(x_0) + \alpha_g(x)\big)(x - x_0)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right|, \tag{IX.108}$$

wobei $|\alpha_f(x)|,\ |\alpha_g(x)| \leq \alpha$ sind. Also ist, für alle $0 < |x - x_0| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| &= \left|\frac{f'(x_0) + \alpha_f(x)}{g'(x_0) + \alpha_g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| \\ &= \frac{1}{|g'(x_0)| \cdot |g'(x_0) + \alpha_g(x)|} \cdot \big|\alpha_f(x) \cdot g'(x_0) - \alpha_g(x) \cdot f'(x_0)\big| \\ &\leq \frac{2\alpha}{|g'(x_0)|^2}\big(|g'(x_0)| + |f'(x_0)|\big). \end{aligned} \tag{IX.109}$$

Ist nun $\varepsilon < 0$ vorgegeben, so wählen wir

$$\alpha \;:=\; \frac{|g'(x_0)|^2}{2\big(|g'(x_0)| + |f'(x_0)|\big)} \cdot \min\{\varepsilon, 1\} \;>\; 0, \tag{IX.110}$$

und beobachten, dass $\alpha \leq |g'(x_0)|/2$. Also ist,

$$\forall\, 0 < |x - x_0| \leq \delta : \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| \;\leq\; \varepsilon \tag{IX.111}$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} \;=\; \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{IX.112}$$

□

IX.4.4 Beweis von Korollar IX.11 zur Existenz und Ableitung der Umkehrfunktion

Beweis. Seien $x, x' \in [a, b]$ und $x < x'$. Dann ist die Einschränkung von f auf $[x, x']$ auch stetig auf $[x, x']$ und differenzierbar auf (x, x'). Nach dem Mittelwertsatz IX.5 gibt es also einen Punkt $x_0 \in (x, x')$ so, dass

$$f(x') - f(x) \;=\; (x' - x) \cdot f'(x_0). \tag{IX.113}$$

Wegen $x' - x > 0$ folgt dann umgekehrt

$$\Big\{\forall x_0 \in (a, b) :\ f'(x_0) \geq 0\Big\} \;\Rightarrow\; f \text{ ist auf } [a, b] \text{ monoton steigend;} \tag{IX.114}$$

$$\Big\{\forall x_0 \in (a, b) :\ f'(x_0) > 0\Big\} \;\Rightarrow\; f \text{ ist auf } [a, b] \text{ streng monoton steigend.} \tag{IX.115}$$

Sei nun $f' > 0$ auf (a, b) und somit f streng monoton steigend auf $[a, b]$. Dann ist $f(a)$ das Minimum und $f(b)$ das Maximum von f auf $[a, b]$ und $f([a, b]) \subseteq [f(a), f(b)]$. Weiterhin ist

$f([a,b])$ kompakt und deshalb $X := [f(a), f(b)] \setminus f([a,b])$ offen. Wäre $X \neq \emptyset$, so enthielte X ein Intervall (α, β) mit $f(a) < \alpha < \beta < f(b)$. Also müsste f eine Sprungstelle $x_0 \in (a,b)$ besitzen, sodass $\lim_{x \nearrow x_0}\{f(x)\} \leq \alpha$ und $\lim_{x \searrow x_0}\{f(x)\} \geq \beta$. Dies steht jedoch aber in Widersprch zur Stetigkeit von f auf (a,b), also gilt $X = \emptyset$, m.a.W. $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
Somit ist $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ ist eine Bijektion, deren Umkehrfunktion wir mit $F := f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ bezeichnen, und die mit f auch stetig auf $[f(a), f(b)]$ ist.
Sind nun $y, y_0 \in [f(a), f(b)]$ mit $y \neq y_0$ und $x := F(y) \neq F(y_0) =: x_0$, so ist

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \tag{IX.116}$$

Aus $y \to y_0$ folgt $x \to x_0$, und wir erhalten

$$\lim_{y \to y_0}\left\{\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0}\right\} = \lim_{y \to y_0}\left\{\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}\right\} = \frac{1}{f(x_0)} = \frac{1}{f[F(y_0)]}. \tag{IX.117}$$

$\square$

Kapitel X

Integration

In diesem Kapitel führen wir das *Riemann-Integral* für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen ein. Das Lebesgue-Integral wird in einer späteren Vorlesung behandelt.

X.1 Partitionen, Ober- und Untersummen

Definition X.1. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

(i) Eine endliche Teilmenge $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_L\} \subseteq (a, b)$ von (a, b) heißt **Partition von** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Wir wollen stets annehmen, dass die Punkte in P aufsteigend geordnet sind, also

$$a =: x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_L < x_{L+1} := b. \tag{X.1}$$

Die Menge der Partitionen von $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}[a, b]$.

(ii) Seien $P, P' \in \mathcal{P}[a, b]$ zwei Partitionen von $[a, b]$.

$$P \text{ heißt } \textbf{feiner} \text{ als } P' \qquad :\Leftrightarrow \qquad P' \subseteq P. \tag{X.2}$$

Wir sagen auch, dass P eine **Verfeinerung von** $\mathbf{P}'$ ist.

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass zwei Partitionen nicht immer vergleichbar bezüglich ihrer Feinheit sind. Sind nämlich $P \setminus P'$ und $P' \setminus P$ beide nicht leer, so ist weder P feiner als P' noch P' feiner als P. Es lässt sich aber immer eine Partition P'' finden, die sowohl feiner als P als auch feiner als P' ist, nämlich

$$P'' = P \cup P'. \tag{X.3}$$

Eine Ordnungsrelation mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als *partielle Ordnung*.

Definition X.2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, also $f([a, b]) \subseteq [-R, R]$, für genügend großes $R < \infty$. Sei weiterhin $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_L\} \subseteq (a, b)$ eine Partition.

(i) Wir definieren die **Untersumme** $\underline{\mathcal{I}}(f;P)$ und die **Obersumme** $\overline{\mathcal{I}}(f;P)$ durch

$$\underline{\mathcal{I}}(f;P) := \sum_{j=0}^{L} (x_{j+1} - x_j) \cdot \inf\big\{ f(x) \,\big|\, x_j \le x \le x_{j+1} \big\}, \tag{X.4}$$

$$\overline{\mathcal{I}}(f;P) := \sum_{j=0}^{L} (x_{j+1} - x_j) \cdot \sup\big\{ f(x) \,\big|\, x_j \le x \le x_{j+1} \big\}. \tag{X.5}$$

(ii) Wir definieren das **Unterintegral** $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ und das **Oberintegral** $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ von f durch

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\big\{ \underline{\mathcal{I}}(f;P) \,\big|\, P \in \mathcal{P}[a,b] \big\}, \tag{X.6}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\big\{ \overline{\mathcal{I}}(f;P) \,\big|\, P \in \mathcal{P}[a,b] \big\}. \tag{X.7}$$

Lemma X.3. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P, P' \in \mathcal{P}[a,b]$ zwei Partitionen von $[a,b]$. Ist P' feiner als P, so gelten*

$$\underline{\mathcal{I}}(f;P) \le \underline{\mathcal{I}}(f;P') \quad \text{und} \quad \overline{\mathcal{I}}(f;P) \ge \overline{\mathcal{I}}(f;P'). \tag{X.8}$$

Beweis. Wir beweisen nur $\underline{\mathcal{I}}(f;P) \le \underline{\mathcal{I}}(f;P')$. Sind $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_L\}$, $a =: x_0 < x_1 < \ldots < x_L < x_{L+1} := b$, und $y \in (a,b) \setminus P$, dann gibt es ein $k \in \{0, 1, 2, \ldots, L\}$, so dass $x_k < y < x_{k+1}$, und es gilt

$$\begin{aligned}
&(x_{k+1} - x_k) \cdot \inf\big\{ f(x) \,\big|\, x_k \le x \le x_{k+1} \big\} \\
&= \big(x_{k+1} - y\big) \cdot \inf\big\{ f(x) \,\big|\, x_k \le x \le x_{k+1} \big\} + (y - x_k) \cdot \inf\big\{ f(x) \,\big|\, x_k \le x \le x_{k+1} \big\} \\
&\le \big(x_{k+1} - y\big) \cdot \inf\big\{ f(x) \,\big|\, y \le x \le x_{k+1} \big\} + (y - x_k) \cdot \inf\big\{ f(x) \,\big|\, x_k \le x \le y \big\}.
\end{aligned} \tag{X.9}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathcal{I}}(f, P \cup \{y\}) - \underline{\mathcal{I}}(f, P) \\
&\quad = (y - x_k) \cdot \inf\big\{ f(x) \,\big|\, x_k \le x \le y \big\} + (x_k - y) \cdot \inf\big\{ f(x) \,\big|\, y \le x \le x_{k+1} \big\} \\
&\qquad - \big(x_{k+1} - x_k\big) \cdot \inf\big\{ f(x) \,\big|\, x_k \le x \le x_{k+1} \big\} \\
&\quad \ge 0.
\end{aligned} \tag{X.10}$$

Für $P' \setminus P = \{y_1, y_2, \ldots, y_M\}$ erhalten wir also in M Schritten

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{I}}(f;P) &\le \underline{\mathcal{I}}\Big(f; P \cup \{y_1\}\Big) \le \underline{\mathcal{I}}\Big(f; P \cup \{y_1, y_2\}\Big) \\
&\le \ldots \le \underline{\mathcal{I}}\Big(f; P \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_M\}\Big) = \underline{\mathcal{I}}(f, P').
\end{aligned} \tag{X.11}$$

$\square$

Lemma X.4. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;\le\; \overline{\int_a^b} f(x)\,dx. \tag{X.12}$$

Beweis. Nach Lemma X.3 gilt für je zwei Partitionen $P, P' \in \mathcal{P}[a, b]$ von $[a, b]$, dass

$$\underline{\mathcal{I}}(f; P) \;\le\; \underline{\mathcal{I}}(f; P \cup P') \;\le\; \overline{\mathcal{I}}(f; P \cup P') \;\le\; \overline{\mathcal{I}}(f; P'). \tag{X.13}$$

Da P' eine beliebige Partition ist, folgt daraus auch

$$\forall\, P : \quad \underline{\mathcal{I}}(f; P) \;\le\; \inf\big\{\overline{\mathcal{I}}(f; P') \;\big|\; P' \in \mathcal{P}[a, b]\big\}, \tag{X.14}$$

also

$$\sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \big\{\underline{\mathcal{I}}(f, P)\big\} \;\le\; \inf_{P' \in \mathcal{P}[a,b]} \big\{\overline{\mathcal{I}}(f, P')\big\}. \tag{X.15}$$

□

Definition X.5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar auf $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$**: $\Leftrightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\,dx. \tag{X.16}$$

In diesem Fall schreiben wir $f \in \mathcal{R}[a, b]$, und $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt **(Riemann-)Integral von f von a nach b**.

Lemma X.6. *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

$$\Big[f \in \mathcal{R}[a, b]\Big] \;\Leftrightarrow\; \Big[\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, P \in \mathcal{P}[a, b] :\; \overline{\mathcal{I}}(f; P) - \underline{\mathcal{I}}(f; P) \le \varepsilon\Big]. \tag{X.17}$$

Beweis.
" $\Leftarrow$ ": Gemäß der rechten Seite in (X.17) gilt

$$0 \;\le\; \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;\le\; \overline{\mathcal{I}}(f; P) - \underline{\mathcal{I}}(f; P) \;\le\; \varepsilon, \tag{X.18}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Also muss

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \;=\; \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \tag{X.19}$$

und somit $f \in \mathcal{R}[a, b]$ sein.

<u>" $\Rightarrow$ "</u>: Nach Definition von Infimum und Supremum gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Partitionen $P', P'' \in \mathcal{P}[a,b]$ von $[a,b]$, so dass

$$\underline{\mathcal{I}}(f;P') \;\geq\; \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{X.20}$$

$$\overline{\mathcal{I}}(f;P'') \;\leq\; \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{X.21}$$

Da $f \in \mathcal{R}[a,b]$, gilt also für die Partition $P := P' \cup P''$ von $[a,b]$, dass

$$\begin{aligned} 0 \;&\leq \overline{\mathcal{I}}(f;P) - \underline{\mathcal{I}}(f;P) \;\leq\; \overline{\mathcal{I}}(f;P'') - \underline{\mathcal{I}}(f;P') \\ &\leq \left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}\right) \;=\; \varepsilon. \end{aligned} \tag{X.22}$$

$\square$

Satz X.7. *Seien $a, b, \alpha \in \mathbb{R}, a < b$ und $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$.*

(i) Dann ist $(f + \alpha g) \in \mathcal{R}[a,b]$, und es gilt

$$\int_a^b \big(f + \alpha g\big)(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;+\; \alpha \int_a^b g(x)\,dx. \tag{X.23}$$

(ii) Ist $f(x) \leq g(x)$, für alle $x \in [a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\,dx. \tag{X.24}$$

(iii) Mit $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ist auch $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$, und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{X.25}$$

Beweis. Seien $c, d \in [a,b]$ mit $c < d$, sodass $J := [c,d] \subseteq [a,b]$ ein Teilintervall von $[a,b]$ ist. Wir beobachten zunächst, dass für je zwei beschränkte Funktionen $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\sup_J\{f_1 + f_2\} \;\leq\; \sup_J\{f_1\} + \sup_J\{f_2\}, \tag{X.26}$$

$$\inf_J\{f_1 + f_2\} \;\geq\; \inf_J\{f_1\} + \inf_J\{f_2\} \tag{X.27}$$

gilt, wobei wir hier und im Weiteren $\sup_J\{f\} := \sup_{x\in J}\{f(x)\}$ schreiben. Für jede Partition $P \in \mathcal{P}[a,b]$ erhalten wir daraus

$$\overline{\mathcal{I}}(f_1 + f_2;\, P) \;\leq \overline{\mathcal{I}}(f_1;\, P) + \overline{\mathcal{I}}(f_2;\, P), \tag{X.28}$$

$$\underline{\mathcal{I}}(f_1 + f_2;\, P) \;\geq \underline{\mathcal{I}}(f_1;\, P) + \underline{\mathcal{I}}(f_2;\, P). \tag{X.29}$$

Zu (i): Wegen $\underline{\mathcal{I}}(-g, P) = -\overline{\mathcal{I}}(g, P)$ ist mit $g \in \mathcal{R}[a, b]$ auch $-g \in \mathcal{R}[a, b]$, und es gilt

$$\int_a^b -g(x)\, dx \;=\; -\int_a^b g(x)\, dx. \tag{X.30}$$

Daher reicht es, (X.23) für $\alpha > 0$ zu zeigen.
Sind nun $\varepsilon > 0$ und $P', P'' \in \mathcal{P}[a, b]$ so, dass

$$\overline{\mathcal{I}}(f, P') \;\leq\; \int_a^b f(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \overline{\mathcal{I}}(g, P'') \;\leq\; \int_a^b g(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{2(\alpha + 1)}, \tag{X.31}$$

so setzen wir $P := P' \cup P''$ und erhalten aus Lemma X.3 und (X.28), dass

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f(x) + \alpha g(x)\, dx \;&\leq \overline{\mathcal{I}}(f + \alpha g;\, P) \;\leq\; \overline{\mathcal{I}}(f;\, P) + \overline{\mathcal{I}}(\alpha g;\, P) \;=\; \overline{\mathcal{I}}(f;\, P) + \alpha \overline{\mathcal{I}}(g;\, P) \\ &\leq \overline{\mathcal{I}}(f;\, P') + \alpha\, \overline{\mathcal{I}}(g;\, P'') \;\leq\; \int_a^b f(x)\, dx + \alpha \int_a^b g(x)\, dx + \varepsilon, \end{aligned} \tag{X.32}$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt

$$\overline{\int_a^b} f(x) + \alpha g(x)\, dx \;\leq\; \int_a^b f(x)\, dx + \alpha \int_a^b g(x)\, dx. \tag{X.33}$$

Analog erhält man

$$\underline{\int_a^b} f(x) + \alpha g(x)\, dx \;\geq\; \int_a^b f(x)\, dx + \alpha \int_a^b g(x)\, dx, \tag{X.34}$$

und somit (i).

Zu (ii) Glg. (X.24) ergibt sich aus (X.23) und der Tatsache, dass offensichtlich, für $h \in \mathcal{R}[a, b]$ mit $h(x) \geq 0$, für $x \in [a, b]$, auch

$$\int_a^b h(x)\, dx \;\geq\; 0, \tag{X.35}$$

da $\underline{\mathcal{I}}(h; P) \geq 0$, für alle $P \in \mathcal{P}[a, b]$. Mit (X.23) und (X.35) erhalten wir nämlich

$$\int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \;=\; \int_a^b (g - f)(x)\, dx \;\geq\; 0. \tag{X.36}$$

Zu (iii) Sei $J := [c, d] \subseteq [a, b]$ ein Teilintervall von $[a, b]$ wie oben. Wir zeigen zunächst, dass

$$\sup_J \{f\} \;-\; \inf_J \{f\} \;\geq\; \sup_J \{|f|\} \;-\; \inf_J \{|f|\} \tag{X.37}$$

gilt. Für $f \geq 0$ und somit $|f| \equiv f$ auf J ist dies offensichtlich, ebenso für $f \leq 0$, d.h. $|f| \equiv -f$ auf J. Sind hingegen $\inf_J\{f\} < 0 < \sup_J\{f\}$, so folgt mit $f_\pm := \pm f \cdot \mathbb{1}[\pm f > 0] \geq 0$ und

$$f \;=\; f_+ - f_- \quad \text{und} \quad |f| \;=\; f_+ + f_-, \tag{X.38}$$

dass $\sup_J\{f\} = \sup_J\{f_+\}$, $\inf_J\{f\} = -\sup_J\{f_-\}$ und deshalb

$$\begin{aligned}\sup_J\{f\} - \inf_J\{f\} &= \sup_J\{f_+\} + \sup_J\{f_-\} \;\geq\; \sup_J\{f_+ + f_-\} \;=\; \sup_J\{|f|\} \\ &\geq \sup_J\{|f|\} - \inf_J\{|f|\}. \end{aligned} \tag{X.39}$$

Somit gilt (X.37) allgemein für alle $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Aus (X.37) folgt jedoch unmittelbar für jede Partition $P \in \mathcal{P}[a,b]$, dass

$$0 \;\leq\; \overline{\mathcal{I}}(|f|;P) - \underline{\mathcal{I}}(|f|;P) \;\leq\; \overline{\mathcal{I}}(f;P) - \underline{\mathcal{I}}(f;P), \tag{X.40}$$

und Lemma X.6 impliziert sofort, dass auch $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$. Die Ungleichung (X.25) ist nun eine unmittelbare Konsequenz aus (ii) und $|f| \geq \pm f$. □

X.2 Riemann-integrierbare Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir eine (möglichst große) Familie Riemann-integrierbarer Funktionen identifizieren. Dafür stellen wir zunächst fest, dass stetige Funktionen auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar sind.

Satz X.8. *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$. Dann ist $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Beweis. Da $[a,b]$ kompakt ist, nimmt nach Korollar VIII.9 f auf $[a,b]$ ein Minimum und Maximum an. Mit $M := \max\big\{|\sup f([a,b])|, |\inf f([a,b])|\big\} < \infty$ gilt also

$$\forall\, x \in [a,b] : \quad f(x) \in [-M, M], \tag{X.41}$$

und f ist beschränkt. Außerdem ist f sogar *gleichmäßig stetig* auf $[a,b]$, das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall\, x, x' \in [a,b],\ |x - x'| \leq \delta : \quad |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon. \tag{X.42}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ wie oben und ohne Einschränkung nehmen wir $\delta \leq b - a$. Dann setzen wir

$$x_0 := a,\ x_1 := a + \delta,\ x_2 := a + 2\delta, \ldots, x_L := a + L\delta,\ x_{L+1} := b, \tag{X.43}$$

wobei $L \in \mathbb{N}$ so gewählt wird, dass

$$a + L\delta < b \leq a + (L+1)\,\delta. \tag{X.44}$$

Weiterhin ist $f : I_k := [x_k, x_{k+1}] \to \mathbb{R}$ stetig, für jedes $k = 0, 1, 2, \ldots, L$, und aus der Kompaktheit von I_k folgt die Existenz von $x_k^{\min}, x_k^{\max} \in I_k$, sodass

$$f(x_k^{\min}) \;=\; \inf_{x \in I_k}\{f(x)\}, \qquad f(x_k^{\max}) \;=\; \sup_{x \in I_k}\{f(x)\}. \tag{X.45}$$

Dann ist $|x_k^{\min} - x_k^{\max}| \leq \delta$ und nach (X.42)

$$0 \;\leq\; \sup_{x \in I_k}\{f(x)\} - \inf_{x \in I_k}\{f(x)\} \;=\; f(x_k^{\max}) - f(x_k^{\min}) \;\leq\; \varepsilon. \tag{X.46}$$

Definieren wir durch $P := \{x_1, x_2, \ldots, x_L\} \in \mathcal{P}[a,b]$ eine Partition, so erhalten wir damit

$$\begin{aligned} 0 &\le \overline{\mathcal{I}}(f;P) - \underline{\mathcal{I}}(f;P) = \sum_{k=0}^{L} (x_{k+1} - x_k) \cdot \underbrace{\big(\sup_{x \in I_k}\{f(x)\} - \inf_{x \in I_k}\{f(x)\}\big)}_{\le \varepsilon} \\ &\le \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{L} (x_{k+1} - x_k) = \varepsilon \cdot (b-a). \end{aligned} \tag{X.47}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt nun $f \in \mathcal{R}[a,b]$ aus Lemma X.6. □

Weiterhin beobachten wir, dass ein "Ausreißer" als Funktionswert das Integral nicht verändert.

Satz X.9. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}, a < c < b$ und $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann ist $f \in \mathcal{R}[a,c] \cap \mathcal{R}[c,b]$, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{X.48}$$

Sind umgekehrt $f_{ac} \in \mathcal{R}[a,c]$ und $f_{cb} \in \mathcal{R}[c,b]$, dann ist mit

$$f(x) := \begin{cases} f_{ac}(x) & \text{für } x \in [a,c), \\ \text{beliebig}, \in \mathbb{R} & \text{für } x = c, \\ f_{cb}(x) & \text{für } x \in (c,b] \end{cases} \tag{X.49}$$

auch $f \in \mathcal{R}[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f_{ac}(x)\,dx + \int_c^b f_{cb}(x)\,dx. \tag{X.50}$$

Aus den Sätzen X.8 und X.9 ergibt sich durch eine einfache Induktion sofort folgendes Korollar.

Korollar X.10. *Seien $a_0, a_1, \ldots, a_M \in \mathbb{R}$, $a_j < a_{j+1}$, und $f : [a_0, a_M] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, d.h. f ist stetig auf (a_j, a_{j+1}) und die Grenzwerte $\lim_{x \searrow a_j} f(x)$ und $\lim_{x \nearrow a_j} f(x)$ existieren für $j = 0, 1, 2, \ldots, M-1$. Dann ist $f \in \mathcal{R}[a_0, a_M]$.*

Bemerkungen und Beispiele.

- Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap (0,1)$.
- Seien $M \in \mathbb{N}$ und $f_M : [0,1] \to \{0,1\}$,

$$f_M(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \{0, a_1, a_2, \ldots, a_M, 1\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{X.51}$$

  Mit einer geeigneten Umordnung ist dann $0 < a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_M} < 1$, und f_M ist stückweise stetig. Nach Korollar X.10 ist also $f_M \in \mathcal{R}[0,1]$ und

$$\int_0^1 f_M(x)\,dx = 0. \tag{X.52}$$

- Die **Dirichlet-Funktion** $f_\infty : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f_\infty(x) \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{X.53}$$

Seien $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_L\} \subseteq (0,1)$, $x_0 := 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_L < x_{L+1} := 1$, eine Partition von $[0,1]$. Zu jedem $k \in \{0, 1, \ldots, L\}$ gibt es zwei Zahlen,

$$\alpha \in \mathbb{Q} \cap (x_k, x_{k+1}), \quad \beta \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x_k, x_{k+1}). \tag{X.54}$$

Dies hat zur Folge, dass

$$0 \;\le\; \inf_{x \in I_k} \{f_\infty(x)\} \;\le\; f_\infty(\beta) \;=\; 0, \tag{X.55}$$

$$1 \;\ge\; \sup_{x \in I_k} \{f_\infty(x)\} \;\ge\; f_\infty(\alpha) \;=\; 1. \tag{X.56}$$

Somit ist, für alle $P \in \mathcal{P}[0,1]$,

$$\overline{\mathcal{I}}(f_\infty; P) \;=\; \underbrace{\sum_{k=0}^{L} (x_{k+1} - x_k)}_{=1} \cdot \underbrace{\sup_{x \in I_k} \{f_\infty(x)\}}_{=1} \;=\; 1, \tag{X.57}$$

$$\underline{\mathcal{I}}(f_\infty; P) \;=\; \underbrace{\sum_{k=0}^{L} (x_{k+1} - x_k)}_{=1} \cdot \underbrace{\inf_{x \in I_k} \{f_\infty(x)\}}_{=0} \;=\; 0, \tag{X.58}$$

also

$$\underline{\int_0^1} f_\infty(x)\, dx \;=\; 0 \neq 1 \;=\; \overline{\int_0^1} f_\infty(x)\, dx. \tag{X.59}$$

Die Dirichlet-Funktion ist also *nicht* Riemann-integrierbar.

- In der Dirichlet-Funktion manifestiert sich die Schwäche des Riemann-Integralbegriffs. Nicht, dass der Wert des Integrals dieser pathologischen Funktion irgend eine Bedeutung hätte. Vielmehr ist f_∞ als Limes von f_M anzusehen:

Für festes $x \in [0,1]$ betrachten wir die Folge $(f_M(x))_{M=1}^\infty$ in $\{0,1\}$.

(i) Ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann ist $f_M(x) = 0 = f_\infty(x)$, $\forall\, M \in \mathbb{N}$.

(ii) Ist umgekehrt $x \in \mathbb{Q}$, dann gibt es ein $K(x) \in \mathbb{N}$, so dass $x = a_{K(x)}$. Für alle $M \ge K(x)$ ist dann $f_M(x) = 1 = f_\infty(x)$.

Zusammenfassend erhalten wir, dass f_M *punktweise* gegen f_∞ konvergiert, d.h.

$$\forall\, x \in [0,1] : \quad \lim_{M \to \infty} \{f_M(x)\} \;=\; f_\infty(x). \tag{X.60}$$

Die Folge $(f_M)_{M=1}^\infty$ und ihr Limes f_∞ bilden also ein *Gegenbeispiel* für die Vermutung, dass

$$\Big[f_M \overset{pktw.}{\to} f_\infty \Big] \;\Rightarrow\; \Big[\lim_{M\to\infty} \int_0^1 f_M(x)\,dx = \int_0^1 f_\infty(x)\,dx \Big], \tag{X.61}$$

ja sogar, dass

$$\Big[f_M \overset{pktw.}{\to} f_\infty,\ f_M \in \mathcal{R}[0,1] \Big] \;\Rightarrow\; \Big[f_\infty \in \mathcal{R}[0,1] \Big], \tag{X.62}$$

d.h. Aussagen (X.61) und (X.62) sind i.A. beide falsch! Aus diesem Grund wurden vor über 100 Jahren die Maßtheorie und das Lebesgue-Integral entwickelt – eine sehr fruchtbare Entwicklung, wie sich später gezeigt hat.

- Schließlich beobachten wir, dass sich aus der Dirichlet-Funktion leicht ein Gegenbeispiel für die Umkehrung von Satz X.7 (iii) konstruieren lässt: Setzen wir $f := f_\infty - \frac{1}{2}$, so ist $|f| \equiv \frac{1}{2} \in \mathcal{R}[0,1]$ aber $f \notin \mathcal{R}[0,1]$.

X.3 Integration und Differentiation

Satz X.11. *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\forall\, x \in (a,b] : \qquad F(x) \;:=\; \int_a^x f(t)\,dt, \quad F(a) \;:=\; 0. \tag{X.63}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(i) F ist stetig auf $[a,b]$.

(ii) Ist f stetig in $x_0 \in (a,b)$, dann ist F differenzierbar bei x_0, und es gilt

$$F'(x_0) \;=\; f(x_0). \tag{X.64}$$

Beweis.
Zu *(i)*: Aus der Riemann-Integrierbarkeit von f folgt auch dessen Beschränktheit,

$$\exists\, M \in \mathbb{R}^+ \;\; \forall\, x \in [a,b] : \quad |f(x)| \le M. \tag{X.65}$$

Damit ist aber nach Satz X.7

$$\forall\, a \le y < x \le b : \quad |F(x) - F(y)| \;=\; \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \;\le\; M(x-y), \tag{X.66}$$

und F ist (sogar gleichmäßig) stetig auf $[a,b]$.
Zu *(ii)*: Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig in $x_0 \in (a,b)$ ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall\, t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] : \quad |f(t) - f(x_0)| \;\le\; \varepsilon. \tag{X.67}$$

Für $x_0 < x \leq x_0 + \delta$ gilt also nach Satz X.7 (iii)

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \;&=\; \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \big| F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \cdot f(x_0) \big| \\
=\; \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \Big| \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} f(x_0)\, dt \Big| \;&=\; \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \Big| \int_{x_0}^{x} \big(f(t) - f(x_0) \big)\, dt \Big| \\
\leq\; \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\, dt \;&\leq\; \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \varepsilon \cdot \int_{x_0}^{x} dt \;=\; \varepsilon.
\end{aligned} \tag{X.68}$$

Analog zu (X.68) erhält man dieselbe Ungleichung, falls $x_0 - \delta \leq x < x_0$ und somit insgesamt

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \right\} \;=\; f(x_0). \tag{X.69}$$

□

Satz X.12 (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung[1]). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und derart, dass*

$$\forall\, x \in (a, b) : \quad F'(x) \;=\; f(x). \tag{X.70}$$

Dann heißt F ***Stammfunktion von*** $\mathbf{f}$[2]*, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a). \tag{X.71}$$

Beweis. Sei $P = \{x_1, \ldots, x_L\} \in \mathcal{P}[a, b]$ eine Partition mit $x_0 := a < x_1 < x_2 < \ldots < x_L < x_{L+1} := b$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Satz IX.8, gibt es zu jedem $k \in \{0, 1, 2, \ldots, L\}$ ein $y_k \in (x_k,\ x_{k+1})$, so dass

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) \;=\; (x_{k+1} - x_k) \cdot f(y_k). \tag{X.72}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) \;&=\; F(x_{L+1}) - F(x_0) \\
=\; [F(x_{L+1}) - F(x_L)] &+ [F(x_L) - F(x_{L-1})] + \ldots + [F(x_1) - F(x_0)] \\
=\; \sum_{k=0}^{L} \{F(x_{k+1}) - F(x_k)\} \;&=\; \sum_{k=0}^{L} (x_{k+1} - x_k) \cdot f(y_k).
\end{aligned} \tag{X.73}$$

Da

$$\inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} \{f(x)\} \;\leq\; f(y_k) \;\leq\; \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} \{f(x)\}, \tag{X.74}$$

[1]engl.: "fundamental theorem of calculus"
[2]engl.: "integral of f".

folgt aus (X.73), dass

$$\underline{\mathcal{I}}(f;P) \;\leq\; F(b)-F(a) \;\leq\; \overline{\mathcal{I}}(f;P). \tag{X.75}$$

Also ist

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]}\left\{\underline{\mathcal{I}}(f;P)\right\} \;\leq\; F(b)-F(a) \;\leq\; \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]}\left\{\overline{\mathcal{I}}(f;P)\right\} \;=\; \int_a^b f(x)\,dx. \tag{X.76}$$

□

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir berechnen $I=\int_1^2 x^2\,dx$. Für $F,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mit $F(x):=\frac{1}{3}x^3$ und $f(x):=x^2$ sind F und f stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}$, deswegen ist auch $f\in\mathcal{R}[1,2]$, und weiterhin gilt $F'=f$ auf $\mathbb{R}$. Daher ist

$$\int_1^2 x^2\,dx \;=\; \int_1^2 f(x)\,dx \;=\; F(2)-F(1) \;=\; \frac{2^3-1^3}{3} \;=\; \frac{7}{3}. \tag{X.77}$$

- Wir berechnen $J=\int_0^5 \cos(x)\,dx$. Für $F,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mit $F(x):=\sin(x)$ und $f(x):=\cos(x)$ sind F und f stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}$, deswegen ist auch $f\in\mathcal{R}[0,5]$, und es gilt $F'=f$ auf $\mathbb{R}$. Daher ist

$$\int_0^5 \cos(x)\,dx \;=\; \int_0^5 f(x)\,dx \;=\; F(5)-F(0) \;=\; \sin(5)-\sin(0) \;=\; \sin(5). \tag{X.78}$$

Satz X.13 (Partielle Integration). [3] *Seien $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ und $F,G:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf (a,b) und $F',G'\in\mathcal{R}[a,b]$. Dann sind $F'G,G'F\in\mathcal{R}[a,b]$, und es gilt*

$$\int_a^b F'(x)G(x)\,dx \;=\; F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b F(x)G'(x)\,dx. \tag{X.79}$$

Beweis. Man sieht leicht, dass mit $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$ auch $f\cdot g\in\mathcal{R}[a,b]$. Da F und G stetig auf $[a,b]$ sind, gilt insbesondere $F,G\in\mathcal{R}[a,b]$. Demnach sind also auch $F'G,G'F\in\mathcal{R}[a,b]$. Setzen wir

$$\forall\, x\in[a,b]: \quad H(x) \;:=\; F(x)\cdot G(x), \tag{X.80}$$

so folgt (X.79) direkt aus Satz X.12 und der Produktregel, Satz IX.4. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir wollen $I=\int_1^2 x^2\,\sin(x)\,dx$ mit Hilfe der partiellen Integration berechnen. Dabei stellt sich zunächst die Frage, welche Wahl wir für F und G treffen. Definieren wir $F'(x):=x^2$ und $G(x):=\sin(x)$, so sind $F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ und $G'(x)=\cos(x)$, wobei $C\in\mathbb{R}$ eine

[3] engl.: "integration by parts" und <u>nicht</u> "partial integration"

frei wählbare Konstante ist, die wir gleich Null wählen, also $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Damit sind F, F', G, G' alle integrabel auf $[1, 2]$, und

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 F'(x)\, G(x)\, dx = \Big[F(x)G(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 F(x)\, G'(x)\, dx \\ &= \Big[\tfrac{1}{3}x^3 \sin(x)\Big]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^3 \cos(x)\, dx, \end{aligned} \tag{X.81}$$

wobei wir wie üblich $\big[h(x)\big]_a^b := h(b) - h(a)$ notieren. Nun ist jedoch das ursprünglich zu berechnende Integral I in ein komplizierteres umgewandelt worden. Die obige Wahl von F und G ist also offensichtlich ungeeignet.

- Wir machen einen zweiten Versuch zur Berechnung von $I = \int_1^2 x^2 \sin(x)\, dx$ mit Hilfe der partiellen Integration. Diesmal setzen wir $F_1'(x) := \sin(x)$ und $G_1(x) := x^2$, sodass $F_1(x) = -\cos(x) + C$ und $G_1'(x) = 2x$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine frei wählbare Konstante ist, die wir gleich Null wählen, also $F_1(x) = -\cos(x)$. Damit sind F_1, F_1', G_1, G_1' alle integrabel auf $[1, 2]$, und

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 F_1'(x)\, G_1(x)\, dx = \Big[F_1(x)G_1(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 F_1(x)\, G_1'(x)\, dx \\ &= \Big[-\cos(x)\, x^2\Big]_1^2 + 2\int_1^2 x \cos(x)\, dx. \end{aligned} \tag{X.82}$$

Der Grad des Monoms ist also um eins reduziert worden. Wir wenden nochmals partielle Integration an, und zwar mit $F_2'(x) := \cos(x)$ und $G_2(x) := x$, sodass $F_2(x) = \sin(x)$ und $G_2'(x) = 1$. Damit wird

$$\begin{aligned} I &= \Big[-x^2 \cos(x)\Big]_1^2 + 2\int_1^2 x \cos(x)\, dx \\ &= \Big[-x^2 \cos(x)\Big]_1^2 + 2\Big[x \sin(x)\Big]_1^2 - 2\int_1^2 \sin(x)\, dx \\ &= \Big[-x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2\cos(x)\Big]_1^2 \\ &= -2\cos(2) + 4\sin(2) - \cos(1) - 2\sin(1). \end{aligned} \tag{X.83}$$

Satz X.14 (Variablensubstitution)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und strikt monoton steigend, $\varphi'(t) > 0$, $\forall\, t \in (a, b)$. Sei weiterhin $f \in \mathcal{R}[\varphi_a, \varphi_b]$, wobei $\varphi_a := \varphi(a), \varphi_b := \varphi(b)$. Dann ist $(t \mapsto (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)) \in \mathcal{R}[a, b]$, und es gilt*

$$\int_a^b f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\; dt = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(s)\, ds. \tag{X.84}$$

Beweis. Hat f eine Stammfunktion F (d.h. es gilt $F' = f$), dann folgt die Aussage direkt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel. Einerseits gilt nach dem Hauptsatz

$$\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(s)\; ds = F(\varphi_b) - F(\varphi_a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Andererseits ist

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

und daher

$$\int_a^b f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)\, dt = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)),$$

was die Behauptung zeigt.
Den ausführlichen Beweis im allgemeinen Fall findet man im Anhang. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass es einen Satz X.14 entsprechenden Satz für strikt monoton fallendes φ gibt.
- Merkregel: Substituiere $s := \varphi(t)$ und "erweitere" mit dt:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\, ds \;=\; \int_a^b f[\varphi(t)]\, \frac{d\varphi(t)}{dt}\, dt. \tag{X.85}$$

  Wir bemerken, dass (X.85) auch im Prinzip für nicht-monotone $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt. Allerdings sind die Voraussetzungen stärker, und man muss auf formale Manipulation achten.
- Wir berechnen $J = \int_0^5 \frac{ds}{1+s^2}$. Dazu definieren wir $\varphi : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) := \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ und beobachten, dass

$$\varphi'(t) \;=\; \frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{\cos^2(t)} \;=\; 1 + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} \;=\; 1 + \tan^2(t) \;=\; 1 + \varphi^2(t). \tag{X.86}$$

  Nach Satz X.14 ist damit

$$J \;=\; \int_{\arctan(0)}^{\arctan(5)} \frac{\varphi'(t)\, dt}{1 + \varphi^2(t)} \;=\; \int_0^{\arctan(5)} dt \;=\; \arctan(5). \tag{X.87}$$

Satz X.15 (Taylor)**.** *Seien $a, b, x_0 \in \mathbb{R}, a < x_0 < b, n \in \mathbb{N}$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf (a, b) $(n+1)$-mal differenzierbar und $f^{(n+1)}$ stetig auf (a, b). Dann ist, für alle $x \in (a, b)$*

$$f(x) \;= T_n[f, x_0; x] \;+\; \widetilde{R}_{n+1}[f, x_0; x] \tag{X.88}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, (x - x_0)^k \right\} \;+\; \widetilde{R}_{n+1}[f, x_0; x], \tag{X.89}$$

*wobei das **Taylorsche Integralrestglied** $(\mathbf{n+1})$**. Ordnung** durch*

$$\widetilde{R}_{n+1}[f, x_0; x] \;:=\; \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt, \qquad \textit{falls } x \geq x_0,\ \textit{bzw.} \tag{X.90}$$

$$\widetilde{R}_{n+1}[f, x_0; x] \;:=\; \int_{x}^{x_0} \frac{(t-x)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt, \qquad \textit{falls } x < x_0, \tag{X.91}$$

gegeben ist.

Beweis. Wir beweisen durch Induktion, dass für alle $m = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{m} \left\{ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \right\} \;+\; \widetilde{R}_{m+1}(x), \tag{X.92}$$

gilt, wobei wir der Einfachheit halber $x > x_0$ annehmen wollen. (Der Fall $x < x_0$ ist analog, und $x = x_0$ ist trivial.) Für $m = 0$ ergibt sich (X.92) aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,

$$f(x) \;=\; f(x_0) + f(x) - f(x_0) \;=\; f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \;=\; f(x_0) + \widetilde{R}_1(x). \tag{X.93}$$

Gilt nun (X.92) für $\tilde{m} = m - 1 \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(x) - \sum_{k=0}^{m}&\left\{ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \right\} \\
&= \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \right\} \right) - \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\,(x-x_0)^m \\
&= \widetilde{R}_m(x) - \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\,(x-x_0)^m \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}\,\big(f^{(m)}(t) - f^{(m)}(x_0)\big)\,dt,
\end{aligned} \tag{X.94}$$

da $\int_{x_0}^{x} (x-t)^{m-1}\,dt = \frac{(x-x_0)^m}{m}$ ist. Durch abermalige Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir also, dass

$$f(x) - \sum_{k=0}^{m} \left\{ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \right\} \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \Big(\int_{x_0}^{t} f^{(m+1)}(s)\,ds \Big)\,dt. \tag{X.95}$$

Setzen wir nun

$$F(t) \;:=\; \int_{x_0}^{t} f^{(m+1)}(s)\,ds \qquad \text{und} \qquad G(t) \;:=\; \frac{-(x-t)^m}{m!}, \tag{X.96}$$

so folgt dass

$$F'(t) \;=\; f^{(m+1)}(t) \qquad \text{und} \qquad G'(t) \;=\; \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}, \tag{X.97}$$

und erhalten wir durch partielle Integration, dass

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \Big(\int_{x_0}^{t} f^{(m+1)}(s)\,ds \Big)\,dt \;&=\; \int_{x_0}^{x} F(t)\,G'(t)\,dt \\
&= F(x)\,\underbrace{G(x)}_{=0} - \underbrace{F(x_0)}_{=0}\,G(x_0) - \int_{x_0}^{x} F'(t)\,G(t)\,dt \\
&= \int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)\,\frac{(x-t)^m}{m!}\,dt.
\end{aligned} \tag{X.98}$$

□

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass Satz X.15 eine Form des Satzes IX.13 von Taylor ist. Satz X.15 hat gegenüber Satz IX.13 den Vorteil, dass das Restglied genau quantifiziert ist.

- Allerdings sind in Satz X.15 die Voraussetzungen etwas stärker als in Satz X.14, denn zusätzlich zur $(n+1)$-maligen Differenzierbarkeit von f wird die Stetigkeit der $(n+1)$. Ableitung $f^{(n+1)}$ gefordert.

X.4 Absolute Integrabilität und uneigentliche Integrale

In Kapitel VI.2 haben wir gesehen, dass der Begriff der *absoluten Konvergenz* von Reihen eine zentrale Bedeutung besitzt; unter anderem wegen des großen Umordnungsatzes, Satz VI.8. Wir bauen nun analog den entsprechenden Begriff der *absolut integrierbaren Funktionen* auf. Dazu verwenden wir folgende Notation: Sind $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\lambda > 0$, so definieren wir $f_\lambda : [-\lambda, \lambda] \to [-\lambda, \lambda]$ durch

$$f_\lambda(x) \ := \ \mathbb{1}_{\{x \, : \, |f(x)| \leq \lambda\}}(x)\, f(x) \ - \ \lambda\, \mathbb{1}_{\{x \, : \, f(x) < -\lambda\}}(x) \ + \ \lambda\, \mathbb{1}_{\{x \, : \, f(x) > \lambda\}}(x), \tag{X.99}$$

d.h. anschaulich gesprochen setzen wir einen quadratischen, um den Ursprung zentrierten Rahmen der Kantenlänge 2λ auf den Graphen von f und schneiden alles außerhalb des Rahmens ab. Analog zu (X.37) sieht man, dass für jedes Intervall $J \subseteq [-\lambda, \lambda]$

$$\sup_J \{f_\lambda\} \ - \ \inf_J \{f_\lambda\} \ \leq \ \sup_J \{f\} \ - \ \inf_J \{f\} \tag{X.100}$$

gilt, woraus wiederum

$$0 \ \leq \ \overline{\mathcal{I}}(f_\lambda; P) - \underline{\mathcal{I}}(f_\lambda; P) \ \leq \ \overline{\mathcal{I}}(f; P) - \underline{\mathcal{I}}(f; P) \tag{X.101}$$

für jede Partition $P \in \mathcal{P}[-\lambda, \lambda]$ folgt. Nach Lemma X.6 ist also $f_\lambda \in \mathcal{R}[-\lambda, \lambda]$, falls $f \in \mathcal{R}[-\lambda, \lambda]$.

Definition X.16. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **absolut (Riemann-)integrabel**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall \lambda > 0 : \quad f_\lambda \in \mathcal{R}[-\lambda, \lambda], \tag{X.102}$$

$$\sup_{\lambda > 0} \left\{ \int_{-\lambda}^{\lambda} \big| f_\lambda(x) \big| \, dx \right\} \ < \ \infty. \tag{X.103}$$

In diesem Fall heißt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \ := \ \lim_{\lambda \to \infty} \left\{ \int_{-\lambda}^{\lambda} f_\lambda(x)\, dx \right\} \tag{X.104}$$

uneigentliches Integral von f über $\mathbb{R}$.

Satz X.17. *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolut integrabel und $\alpha, a \in \mathbb{R}$ Dann ist auch $f + \alpha g$ absolut integrabel und es gelten*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(f + \alpha g\big)(x)\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \;+\; \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx, \tag{X.105}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \;=\; \lim_{m\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{m} f(x)\, dx \right\} \;=\; \lim_{n\to\infty} \left\{ \lim_{m\to\infty} \int_{-n}^{m} f(x)\, dx \right\}, \tag{X.106}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx \;+\; \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx. \tag{X.107}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) \;:=\; \frac{\mathbb{1}_{(0,1)}(x)}{\sqrt{x}} \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{X.108}$$

$$g(x) \;:=\; \frac{1}{1 + x^2}, \tag{X.109}$$

$$h(x) \;:=\; \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x)}{\sqrt{|x|} + x^2} \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}+x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{X.110}$$

gegeben sind, sind alle absolut integrabel.

Für f gilt

$$f_\lambda(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \frac{1}{\lambda^2} < x < 1, \\ \lambda, & 0 < x \leq \frac{1}{\lambda^2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{X.111}$$

Also ist für $\lambda > 1$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f_\lambda(x)\, dx \;=\; \int_0^{1/\lambda^2} \lambda\, dx + \int_{1/\lambda^2}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx. \tag{X.112}$$

Es ist

$$\int_0^{1/\lambda^2} \lambda\, dx + \int_{1/\lambda^2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \;=\; \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \Big[2\sqrt{x}\Big]_{1/\lambda^2}^{1} \;=\; \frac{1}{\lambda} + 2\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) \;\to\; 2, \tag{X.113}$$

im Limes $\lambda \to \infty$.

Zur Untersuchung von g bemerken wir, dass $g_\lambda(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für $\lambda > 1$ und daher

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} g_\lambda(x)\, dx \;=\; \arctan(\lambda) - \arctan(-\lambda) \;\to\; \tfrac{\pi}{2} - (-\tfrac{\pi}{2}) \;=\; \pi. \tag{X.114}$$

im Limes $\lambda \to \infty$ gilt.

Für h ist das Argument etwas aufwändiger: Für $|x| < 1$ mit $x \neq 0$ gilt $h(x) \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, und für $|x| \geq 1$ gilt $h(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$. Insgesamt ist also

$$0 \;\leq\; h(x) \;\leq\; \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & 0 < |x| < 1, \\ \frac{1}{1+x^2}, & |x| \geq 1. \end{cases} \tag{X.115}$$

Für $|x| < 1$ argumentieren wir wie für f, und für $|x| \geq 1$ argumentieren wir wie bei der Untersuchung von g. Ingesamt sehen wir, dass für $\lambda > 1$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} |h_\lambda(x)|\, dx \;\leq\; \int_{-\lambda}^{-1} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-1}^{-1/\lambda^2} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{1/\lambda^2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{1}^{\lambda} \frac{dx}{1+x^2}, \tag{X.116}$$

wobei wir $\int_a^b \frac{dx}{q(x)} := \int_a^b \frac{1}{q(x)}\, dx$ schreiben. Aus den vorigen Beispielen wissen wir, dass alle vier Integrale für $\lambda > 0$ beschränkt sind und daher folgt die absolute Integrabilität von h. (Beachte: Den Wert des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dx$ haben wir nicht berechnet, aber wir wissen, dass er existiert und eindeutig ist.)

- Es ist zwar für alle $\lambda > 0$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sin(x)\, dx \;=\; 0, \tag{X.117}$$

da $\sin(-x) = -\sin(x)$, und daher ist auch

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \sin(x)\, dx \;=\; 0, \tag{X.118}$$

aber dennoch ist $x \mapsto \sin(x)$ nicht absolut integrabel, denn für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|\, dx \;=\; 2 \tag{X.119}$$

und daher

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} |\sin(x)|\, dx \;\geq\; 2k, \tag{X.120}$$

für $\lambda \geq k\pi$. Also ist

$$\sup_{\lambda>0} \int_{-\lambda}^{\lambda} |\sin(x)|\, dx \;\geq\; \sup_{\lambda>0} \left\{ \frac{2(\lambda-1)}{\pi} \right\} \;=\; \infty. \tag{X.121}$$

Wir bemerken, dass in diesem Fall auch die beiden Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{m} \sin(x)\, dx$ und $\lim_{m\to\infty} \int_{-n}^{m} \sin(x)\, dx$ nicht existieren.

X.5 Ergänzungen

X.5.1 Beweis von Satz X.9

Beweis von Satz X.9. Für den Beweis führen wir etwas neue Notation ein. Ist $P \in \mathcal{P}[a,b]$ eine Partition, $P = \{x_1, \ldots, x_L\} \subseteq (a,b)$, $x_0 := a < x_1, x_2, \ldots < x_L < x_{L+1} := b$, und ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so schreiben wir

$$\overline{\mathcal{I}}\,_a^b(f;P) := \sum_{j=0}^{L} (x_{j+1} - x_j) \cdot \sup_{x_j \le x \le x_{j+1}} \{f(x)\}, \tag{X.122}$$

$$\underline{\mathcal{I}}\,_a^b(f;P) := \sum_{j=0}^{L} (x_{j+1} - x_j) \cdot \inf_{x_j \le x \le x_{j+1}} \{f(x)\}. \tag{X.123}$$

Seien $\varepsilon > 0$ und $P \in \mathcal{P}[a,b]$ eine Partition derart, dass

$$\overline{\mathcal{I}}\,_a^b(f;P) - \underline{\mathcal{I}}\,_a^b(f;P) \le \varepsilon. \tag{X.124}$$

Dann ist $P \cap (a,c) \in \mathcal{P}[a,c]$ eine Partition von $[a,c]$, und es gilt

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{I}}\,_a^c\big[f;P\cap(a,c)\big] - \underline{\mathcal{I}}\,_a^c\big[f;P\cap(a,c)\big] \\ &\quad \le \overline{\mathcal{I}}\,_a^c\big[f;P\cap(a,c)\big] - \underline{\mathcal{I}}\,_a^c\big[f;P\cap(a,c)\big] + \overline{\mathcal{I}}\,_c^b\big[f;P\cap(c,b)\big] - \overline{\mathcal{I}}\,_c^b\big[f;P\cap(c,b)\big] \\ &\quad = \overline{\mathcal{I}}\,_a^b\big[f;P\cup\{c\}\big] - \underline{\mathcal{I}}\,_a^b\big[f;P\cup\{c\}\big] \\ &\quad \le \overline{\mathcal{I}}\,_a^b(f;P) - \underline{\mathcal{I}}\,_a^b(f;P) \;\le\; \varepsilon, \end{aligned} \tag{X.125}$$

wobei wir

$$\overline{\underline{\mathcal{I}}}\,_a^b\big[f;P\cup\{c\}\big] \;=\; \overline{\underline{\mathcal{I}}}\,_a^c\big[f;P\cap(a,c)\big] \;+\; \overline{\underline{\mathcal{I}}}\,_c^b\big[f;P\cap(c,b)\big] \tag{X.126}$$

benutzen. Aus (X.125) folgt aber nach Definition X.5, dass $f \in \mathcal{R}[a,c]$. Analog zeigt man, dass $f \in \mathcal{R}[c,b]$. Aus (X.126) erhalten wir außerdem, dass

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} \big\{\overline{\mathcal{I}}\,_a^b(f;P)\big\} \;=\; \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} \big\{\overline{\mathcal{I}}\,_a^b(f;P\cup\{c\})\big\} \\ &= \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} \big\{\overline{\mathcal{I}}\,_a^c(f;P\cap(a,c)) \;+\; \overline{\mathcal{I}}\,_c^b(f;P\cap(c,b))\big\} \\ &= \inf_{P\in\mathcal{P}[a,c]} \big\{\overline{\mathcal{I}}\,_a^c(f;P)\big\} \;+\; \inf_{P\in\mathcal{P}[c,b]} \big\{\overline{\mathcal{I}}\,_c^b(f;P)\big\} \\ &= \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx, \end{aligned} \tag{X.127}$$

und analog zeigt man die Gleichheit der Unterintegrale.
Für den Beweis von (X.50) bemerken wir zunächst, dass mit f_{ac}, f_{cb} und $f(c) \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in (X.49) beschränkt ist, also $|f(x)| \le M$, für ein gewisses $M < \infty$ und alle $x \in [a,b]$ gilt.

Seien $\varepsilon > 0$ und $P' \in \mathcal{P}[a,c]$, $P'' \in \mathcal{P}[c,b]$ so, dass

$$\overline{\mathcal{I}}_a^c(f_{ac}, P') - \int_a^c f_{ac}(x)\,dx \;\le\; \frac{\varepsilon}{4}, \tag{X.128}$$

$$\overline{\mathcal{I}}_c^b(f_{cb}, P'') - \int_c^b f_{cb}(x)\,dx \;\le\; \frac{\varepsilon}{4}. \tag{X.129}$$

Wählen wir nun $\delta > 0$ so klein, dass

$$P' \cap (a, c-\delta) \;=\; P'' \cap (c+\delta, b) \;=\; \emptyset, \tag{X.130}$$

so folgt mit (X.127) und

$$P := P' \cup \{c-\delta, c+\delta\} \cup P'', \tag{X.131}$$

dass

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{I}}_a^b(f;P) &= \overline{\mathcal{I}}_a^{c-\delta}(f;P') \;+\; \overline{\mathcal{I}}_{c-\delta}^{c+\delta}(f;\emptyset) \;+\; \overline{\mathcal{I}}_{c+\delta}^b(f;P'') \\
&= \overline{\mathcal{I}}_a^{c-\delta}(f_{ac};P') \;+\; \overline{\mathcal{I}}_{c-\delta}^{c+\delta}(f;\emptyset) \;+\; \overline{\mathcal{I}}_{c+\delta}^b(f_{cb};P'') \\
&\le \overline{\mathcal{I}}_a^c(f_{ac};P') \;+\; 6\delta M \;+\; \overline{\mathcal{I}}_a^b(f_{cb};P'') \\
&\le \int_a^c f_{ac}(x)\,dx \;+ \int_c^b f_{cb}(x)\,dx \;+\; \frac{\varepsilon}{2} \;+\; 6\delta M.
\end{aligned} \tag{X.132}$$

Wählen wir nun $\delta \le \varepsilon/12M$, so folgt aus (X.132), dass

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \;\le\; \overline{\mathcal{I}}_a^b(f;P) \;\le\; \int_a^c f_{ac}(x)\,dx \;+ \int_c^b f_{cb}(x)\,dx + \varepsilon, \tag{X.133}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Also ist

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \;\le\; \int_a^c f_{ac}(x)\,dx \;+\; \int_c^b f_{cb}(x)\,dx. \tag{X.134}$$

Genauso zeigt man, dass

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;\ge\; \int_a^c f_{ac}(x)\,dx \;+\; \int_c^b f_{cb}(x)\,dx, \tag{X.135}$$

und daraus folgt die Behauptung, denn das Unterintegral ist stets kleiner als das Oberintegral. □

X.5.2 Variablensubstitution – Beweis von Satz X.14

Beweis.
<u>*(i)*</u>: Wir nehmen zunächst an, f wäre konstant auf $[\varphi_a, \varphi_b]$, also

$$\forall\, \varphi_a \le s \le \varphi_b : \quad f(s) \;=\; \lambda, \tag{X.136}$$

für eine geeignete Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist die Behauptung sicher richtig, denn nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int_a^b f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \;=\; \lambda\int_a^b \varphi'(t)\,dt \;=\; \lambda[\varphi(b)-\varphi(a)] \;=\; \lambda\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} ds \;=\; \lambda\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(s)\,ds. \tag{X.137}$$

$\underline{(ii)}$: Als Nächstes beobachten wir, dass sich diese Aussage nach Korollar X.10 auf stückweise konstante Funktionen überträgt. Sind nämlich $P = \{y_1, y_2, \ldots, y_L\} \in \mathcal{P}[\varphi_a, \varphi_b]$, mit $y_0 := \varphi(a) < y_1 < y_2 < \ldots < y_{L+1} := \varphi(b)$, und

$$f(s) \;:=\; \begin{cases} \lambda_k, & \text{falls } \; s \in (y_k, y_{k+1}), \\ \mu_k, & \text{falls } \; s = y_k, \end{cases} \tag{X.138}$$

mit $\lambda_0, \lambda_2, \ldots, \lambda_L,\ \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{L+1} \in \mathbb{R}$, so gilt nach (X.137))

$$\begin{aligned} \int_a^b f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \;&=\; \sum_{k=0}^{L} \lambda_k \int_{\varphi^{-1}(y_k)}^{\varphi^{-1}(y_{k+1})} \varphi'(t)\,dt \\ =\; \sum_{k=0}^{L} \lambda_k\Big[\varphi\big(\varphi^{-1}(y_{k+1})\big) - \varphi\big(\varphi^{-1}(y_k)\big)\Big] \;&=\; \sum_{k=0}^{L} \lambda_k(y_{k+1}-y_k) \\ =\; \sum_{k=0}^{L} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(s)\,ds \;&=\; \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(s)\,ds. \end{aligned} \tag{X.139}$$

$\underline{(iii)}$: Seien nun $f \in \mathcal{R}[\varphi_a, \varphi_b]$ ohne weitere Zusatzannahmen, $\varepsilon > 0$ und $P \in \mathcal{P}[\varphi_a, \varphi_b]$, mit $P = \{y_1, \ldots, y_L\}$ so, dass $y_0 := \varphi_a < y_1 < y_2 < \ldots < y_L < y_{L+1} = \varphi_b$ und

$$\overline{\mathcal{I}}_{\varphi_a}^{\varphi_b}(f;P) \;-\; \underline{\mathcal{I}}_{\varphi_a}^{\varphi_b}(f;P) \;\le\; \varepsilon. \tag{X.140}$$

Wir definieren nun $f_{gr}, f_{kl} \in \mathcal{R}[a,b]$ durch $\bar\lambda_0 := \bar\lambda_{L+1} := -\infty$, $\underline{\lambda}_0 := \underline{\lambda}_{L+1} := \infty$,

$$f_{gr}(s) \;:=\; \begin{cases} \bar\lambda_k \;:=\; \sup_{y_k \le s \le y_{k+1}}\{f(s)\}, & \text{falls } \; s \in (y_k, y_{k+1}) \\ \max\{\bar\lambda_{k-1}, \bar\lambda_k\}, & \text{falls } \; s = y_k, \end{cases} \tag{X.141}$$

und

$$f_{kl}(s) \;:=\; \begin{cases} \underline{\lambda}_k \;:=\; \inf_{y_k \le s \le y_{k+1}}\{f(s)\}, & \text{falls } \; s \in (y_k, y_{k+1}) \\ \min\{\bar\lambda_{k-1}, \bar\lambda_k\}, & \text{falls } \; s = y_k, \end{cases} \tag{X.142}$$

Damit sind

$$\forall\, s \in [\varphi_a, \varphi_0]: \quad f_{kl}(s) \le f(s) \le f_{gr}(s). \tag{X.143}$$

Außerdem sind

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{I}}_{\varphi_a}^{\varphi_b}(f;P) \;&= \overline{\mathcal{I}}_{\varphi_a}^{\varphi_b}(f_{gr};P) \\ &= \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f_{gr}(s)\,ds \;=\; \int_a^b f_{gr}(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \;\ge\; \overline{\int_a^b} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \end{aligned} \tag{X.144}$$

und analog

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{I}}_{\varphi_a}^{\varphi_b}(f;P) &= \underline{\mathcal{I}}_{\varphi_a}^{\varphi_b}(f_{kl};P) \\ &= \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f_{kl}(s)\,ds \;=\; \int_a^b \big(f_{kl}\circ\varphi\big)(t)\,\varphi'(t)\,dt \;\le\; \underline{\int_a^b} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \end{aligned} \tag{X.145}$$

Also ist

$$\overline{\int_a^b} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \;\le\; \overline{\mathcal{I}}_{\varphi_a}^{\varphi_b}(f;P) \;\le\; \underline{\mathcal{I}}_{\varphi_a}^{\varphi_b}(f;P) + \varepsilon \;\le\; \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(s)\,ds + \varepsilon \tag{X.146}$$

und genauso

$$\underline{\int_a^b} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \;\ge\; \underline{\mathcal{I}}_{\varphi_a}^{\varphi_b}(f;P) \;\ge\; \overline{\mathcal{I}}_{\varphi_a}^{\varphi_b}(f;P) - \varepsilon \;\ge\; \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(s)\,ds - \varepsilon, \tag{X.147}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Mit $\varepsilon \to 0$ erhalten wir also

$$\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(s)\,ds \;\le\; \underline{\int_a^b} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \;\le\; \overline{\int_a^b} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \;\le\; \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(s)\,ds, \tag{X.148}$$

was die Behauptung ergibt. □