Seminar zu Distributionentheorie

12. Juli 2024

Geplanter Termin: Dienstags um 09.45 Uhr, ab dem 15.10.2024 in UP 2.315.

1 Einführung

Distributionen, manchmal auch verallgemeinerte Funktionen genannt, verallgemeinern den klassischen Begriff von Funktionen in der mathematischen Analysis. Distributionen ermöglichen es bspw. Funktionen zu differenzieren, deren Ableitung im klassischen Sinne nicht existiert, wie bspw. der Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Im Rahmen der Distributionentheorie ist es möglich jeder lokal integrierbaren Funktion eine distributionelle Ableitung zuzuordnen.

Distributionen treten klassischerweise in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (PDG) auf. Im Allgemeinen kann man von einer gegebenen PDG noch nicht sagen, ob (klassische) Lösungen existieren. Oftmals ist es aber so, dass zumindest "distributionelle" oder "schwache" Lösungen existieren, also solche, die man zwar nicht klassisch, aber im Rahmen der Distributionentheorie ableiten kann. Dies erklärt insbesondere die Wichtigkeit von Distributionen in der Physik, Elektrotechnik, Chemie und weiteren angewandten Wissenschaften. So führte beispielsweise der Physiker und Nobelpreisträger Paul Dirac die sogenannte Delta-Distribution ein, um Punktladungen wie Elektronen mathematisch in seiner Quantentheorie [1] beschreiben. Wollte man Diracs Distribution als Funktion darstellen, so wäre diese identisch Null, bis auf in einem Punkt, wo sie den Wert "Unendlich" annimmt, und würde Integral gleich Eins haben.

Diracs formalem Kalkül fehlte jedoch noch mathematisches Fundament, welches erst durch die späteren Arbeiten von Sergei Lwowitsch Sobolew und Laurent Schwartz gelegt wurde. In den 1930er Jahren beschäftigte sich Sobolew mit Anfangswertproblemen bei hyperbolischen PDGs, für die er die heute nach ihm benannten Sobolew-Räume einführte. Um ein griffigeres Kriterium für die Existenz einer Lösung dieser PDGs angeben zu können, erweiterte Sobolew die Fragestellung auf den Raum der Funktionale [13]. Damit war er der erste, der die heutige Definition einer Distribution formulierte. Er entwickelte allerdings noch keine umfassende Theorie aus seinen Definitionen, sondern verwendete sie nur als Hilfsmittel zur Untersuchung partieller Differentialgleichungen.

Laurent Schwartz entwickelte systematisch die Theorie der Distributionen im Winter 1944/45. Zu diesem Zeitpunkt waren ihm Sobolews Arbeiten noch unbekannt, doch stieß auch er genau wie Sobolew durch Fragen im Bereich der partiellen Differentialgleichungen auf spezielle Funktionale, die er nun Distributionen nannte [11]. Im Jahr 1947 hatte Schwartz den Raum der temperierten Distributionen definiert und damit die Fourier-Transformationen in seine Theorie integriert. 1950/51 erschien seine Monographie [10, 12], wodurch seine Theorie weiter gefestigt wurde und für die er 1950 die Fields-Medaille, eine der höchsten Auszeichnungen im Bereich der Mathematik, erhielt.

2 Zusammenfassung

Distributionen sind eine Verallgemeinerung von lokal integrierbaren Funktionen und Radonmaßen auf $\mathbb{R}^d$. Die Theorie der Distributionen ist mittlerweile ein Standardwerkzeug der Analysis, insbesondere für die Untersuchung partieller Differentialgleichungen. Die grundlegende Idee der Definition besteht darin, Maße und Funktionen als Operatoren auf einem Raum glatter Funktionen zu verstehen. Auf natürliche Weise ergeben sich für Distributionen Verallgemeinerungen der klassischen Begriffe der Analysis wie Ableitung und Fouriertransformation.

Das Seminar soll eine Einführung in die Theorie der Distributionen geben. Neben den zentralen Definitionen und Eigenschaften werden Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen diskutiert, wie das Konzept der Fundamentallösung.

3 Gliederung

Die Aufteilung der Themen ist bewusst fein gehalten, sodass einzelne Punkte auch kombiniert oder weggelassen werden können. Wir folgen hauptsächlich Duistermaat–Kolk [2]. Siehe auch den Klassiker [8] von Hörmander sowie Gel'fand–Shilov [5] für zahlreiche Beispiele. Weitere empfehlenswerte Lehrbücher sind [14, 4, 6]. Weiter stellt mehr oder weniger jedes aktuelle Lehrbuch zu PDG (siehe z.B. [3, 9]) oder Harmonischer Analysis (siehe z.B. [7]) einen mehr oder weniger vollständigen Anhang zur Distributionentheorie bereit.

1. Testfunktionen [2, Kapitel 2]
2. Definition, Eigenschaften [2, Kapitel 3]
3. Konvergenz, Differentiation [2, Kapitel 4–5]
4. Lokalisierung, Distributionen mit kompaktem Träger [2, Kapitel 7–8]
5. Multiplikation mit Funktionen [2, Kapitel 9]
6. Pushforward und pullback [2, Kapitel 10]
7. Faltung [2, Kapitel 11]

8. Fundamentallösungen [2, Kapitel 12]
9. Fraktionale Differentiation [2, Kapitel 13]
10. Fourier-Transformation [2, Kapitel 14]
11. Distributionen als Integralkern [2, Kapitel 15]
12. Fundamentallösung und Fourier-Transformation [2, Kapitel 17]
13. Träger und Fourier-Transformation [2, Kapitel 18]
14. Sobolew-Räume [2, Kapitel 19]

Literatur

[1] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. 3d ed. Oxford, at the Clarendon Press, 1947, S. xii+311.

[2] J. J. Duistermaat und J. A. C. Kolk. *Distributions*. Cornerstones. Theory and Applications, Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010, S. xvi+445. ISBN: 978-0-8176-4672-1. DOI: 10.1007/978-0-8176-4675-2. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4675-2.

[3] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Second. Bd. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, S. xxii+749. ISBN: 978-0-8218-4974-3.

[4] F. G. Friedlander. *Introduction to the theory of distributions*. Second. With additional material by M. Joshi. Cambridge University Press, Cambridge, 1998, S. x+175. ISBN: 0-521-64015-6; 0-521-64971-4.

[5] I. M. Gel′fand und G. E. Shilov. *Generalized Functions. Vol. 1*. Properties and Operations, Translated from the 1958 Russian original by Eugene Saletan, Reprint of the 1964 English translation. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2016, S. xviii+423. ISBN: 978-1-4704-2658-3.

[6] Svetlin G. Georgiev. *Theory of Distributions*. Second edition [of 3364065]. Springer, Cham, [2021] ©2021, S. xi+262. ISBN: 978-3-030-81264-5; 978-3-030-81265-2. DOI: 10.1007/978-3-030-81265-2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-81265-2.

[7] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Third. Bd. 249. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2014, S. xviii+638. ISBN: 978-1-4939-1193-6; 978-1-4939-1194-3.

[8] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I*. Second. Springer Study Edition. Distribution Theory and Fourier analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1990, S. xii+440. ISBN: 3-540-52343-X.

[9] Jeffrey Rauch. *Partial Differential Equations*. Bd. 128. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991, S. x+263. ISBN: 0-387-97472-5. DOI: 10.1007/978-1-4612-0953-9. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0953-9.

[10] L. Schwartz. *Théorie des distributions. Tome I.* Bd. 9. Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg [Publications of the Mathematical Institute of the University of Strasbourg]. Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics], No. 1091. Hermann & Cie, Paris, 1950, S. 148.

[11] Laurent Schwartz. "Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques". In: *Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.)* 21 (1945), 57–74 (1946).

[12] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions. Tome II.* Bd. 10. Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg [Publications of the Mathematical Institute of the University of Strasbourg]. Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics], No. 1122. Hermann & Cie, Paris, 1951, S. 169.

[13] Sergei Soboleff. "Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales". In: *Математический сборник* 1.1 (1936), S. 39–72.

[14] Robert S. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994, S. x+213. ISBN: 0-8493-8273-4.