3 Singuläre Integrale

27.5.2020

$$A^s = \int \frac{dt}{t}\, t^{-s} e^{-tA}$$

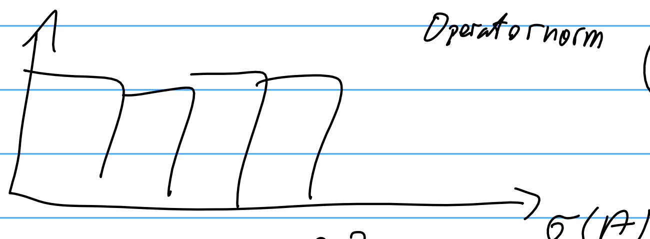
$A : \mathcal{D}(A) \to \mathfrak{h}$, $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathfrak{h}$ dicht definiert, selbstadjungiert

L^2-Funktionalkalkül $f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, dE_A(\lambda)$ f messbar

$f \in L^\infty \Rightarrow \|f(A)\|_{\mathfrak{h}} \lesssim 1$ Spektralsatz

Operatornorm

($A = -i\nabla \to$ Plancherel)



$\to$ Verallgemeinerung auf L^p?

z.B. Hörmander – Mikhlin: Wenn $f \in H^s_{loc}$ mit $s > s(d,A)$

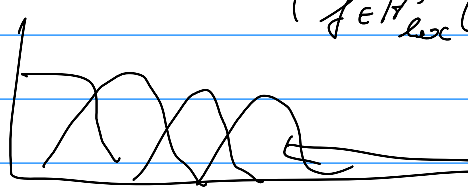
$$\Rightarrow \|f(A)\|_{L^p \to L^p(X)} \lesssim 1$$

Beispiele $-\Delta|_M$ $\quad -\Delta + V$ $\quad \sqrt{-\Delta} + V$

$(-\Delta)^n$

$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$(f \in H^s_{loc}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sup_{t>0} \|f(\cdot)\,\varphi(t\,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})} \lesssim 1$



z.B. für Spektralmultiplikatoren od. ein-dimensionale / radiale Fouriermultiplikatoren

$$\|A^s \varphi\|_{L^p} \sim \underline{\Big\|\Big(\sum_{N \in 2^{\mathbb{Z}}} |N^s P_N \varphi|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p}$$

Bspl $\quad P_N = e^{-A/N} - e^{-A/(N/2)}$

→ scharfe cut-offs → Hilbert-Transf

$\widehat{H\varphi} = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\,\hat{f}(\xi)$ | Proj $\xi_1 \geq 0$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi)$

$$H\varphi(x) = \text{p.v.} \int \frac{\varphi(y)}{x-y}\,dy = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{\varphi(y)}{x-y}\,dy$$

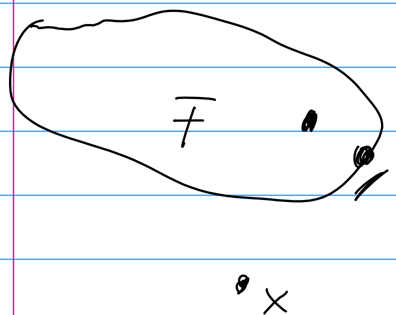
→ <u>Ziel</u> Untersuchung von Operatoren

$$(Tf)(x) = \int K(x-y)\, f(y)\, dy \qquad |K(x)| \lesssim |x|^{-d} \text{ + weitere Annahmen}$$

→ L^p-Beschränktheit? Unter welchen Bedingungen?

3.1 Marcinkiewicz-Integrale

$F \subseteq \mathbb{R}^d$



$$\delta(x) = \mathrm{dist}(x, F), \quad I(x) = \int_{|y|\leq 1} \frac{\delta(x+y)}{|y|^{d+1}}\,dy.$$

<u>Theorem 3.1</u> Sei $F \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen. Dann gilt

a) Falls $x \in F^c$, dann $I(x) = \infty$

b) Für fast alle $x \in F$ ist $I(x) < \infty$.

Aussage a) ist "klar", da F^c offen ist, d.h. $\delta(x+y) \geq c > 0$ für beliebig kleine $|y|$

→ Aussage b) sagt im Wesentlichen $\delta(x+y) = o(|y|)$ für $x \in F$ in einem gewissen gemittelten Sinne.

Lemma 3.2 Sei $F \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen mit $|F^c| < \infty$

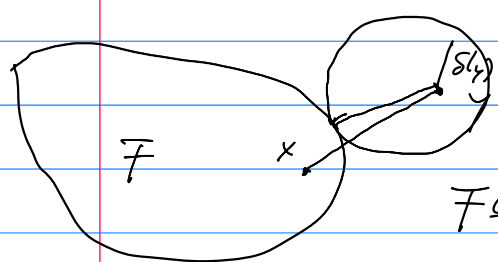
und sei $$I_*(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta(x+y)}{|y|^{d+1}}\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta(y)}{|x-y|^{d+1}}\,dy$$

$\Rightarrow$ $I_*(x) < \infty$ für fast alle $x \in F$ und außerdem

$$\int_F I_*(x)\,dx \lesssim |F^c| \quad (\square)$$

Beweis Da $I_*(x) > 0$, genügt es $(\square)$ zu zeigen

$$\int_F I_*(x)\,dx = \int_{F^c} dy \underbrace{\int_F dx \frac{\delta(y)}{|x-y|^{d+1}}}_{\le \int_{|x-y|>\delta(y)} dx \frac{\delta(y)}{|x-y|^{d+1}} = \text{const}} \le \text{const} \int_{{}^cF} dy = \text{const}\, |{}^cF|$$



$F \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : |x-y| > \delta(y)\}$ für beliebiges $y \in {}^cF$

$\square$

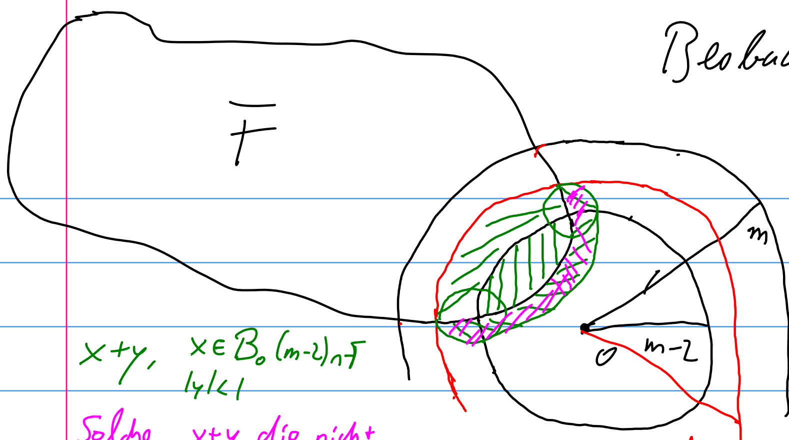
Beweis von Thm 3.1

Sei $F_m = F \cup B_0(m)^c$ wobei $m > 0$ so groß ist, dass $F \cap B_0(m-2) \neq \emptyset$; insbesondere ist

$F_m^c = F^c \cap B_0(m)$, d.h. $|F_m^c| < \infty$, d.h.

mit $\delta_m(x) = \mathrm{dist}(F_m, x)$ ist $\int_{|y|<1} dy \frac{\delta_m(x+y)}{|y|^{d+1}} < \infty$

wenn $x \in F_m$ wg Lemma 3.2.



$x+y$, $x \in B_0(m-2) \cap F$, $|y|<1$

Solche $x+y$, die nicht in F leben $\to$ sind näher an F als an $B_0^c(m)$ (oder gleich nah)

Beobachtung $\delta_m(x+y) = \delta(x+y)$, wenn $|y| \le 1$ und $x \in F \cap B_0(m-2)$

d.h. $\operatorname{dist}(x+y, F)$

$= \operatorname{dist}(x+y, F \cup {}^c B_0(m))$

$\Rightarrow \quad I(x) < \infty$ für fast alle $x \in F \cap B_0(m-2)$ (glm in n)

$\to \quad m \to \infty$ zeigt Behauptung. $\square$

Verallgemeinerung

$$I_\lambda(x) \equiv \int \frac{\delta^\lambda(x+y)}{|y|^{d+\lambda}} \qquad \delta^\lambda(x) = \operatorname{dist}(x, F)^\lambda \quad \forall \lambda > 0$$

28.5.2020

3.2 Hilbert-Transformation

Motivation: $S(\mathbb{T}) \ni f(x) = \sum_j \hat{f}(j)\, e^{2\pi i x \cdot j}$ $\qquad \hat{f}(j) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot j}$

Konvergenz von Fourierreihen? $\overset{?}{\nearrow} f$ L^p

$$\sum \mathbb{1}_{|j|<N} \hat{f}(j)\, e^{2\pi i x j}$$

$$= \sum \operatorname{sgn} \ldots$$

Es gibt mind. 3 verschiedene equivalente Definitionen der Hilberttransformation. Hier mit Cauchyschem Hauptwert.

Sei $W_0 \in S'(\mathbb{R})$ definiert durch

$$\langle W_0, \varphi \rangle = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

($\varphi \in S(\mathbb{R})$)

$1 \qquad \cancel{1} \; x^{-1}$

$$|\langle W_0, \varphi\rangle| \le \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1} \frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{|x|}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{|x|>1} \frac{|\varphi(x)|\,|x|}{|x|^2}$$

$|\varphi(x)-\varphi(0)| \le |x|\,\|\nabla\varphi\|$

$$\le \frac{2}{\pi}\|\nabla\varphi\|_\infty + \frac{2}{\pi}\|x\varphi\|_\infty$$

$\Rightarrow W_0 \in \mathcal{S}'.$

Definition 3.3 Die abgeschnittene Hilberttransformation auf der Höhe $\epsilon>0$ von $f\in L^p$, $1\le p<\infty$ ist definiert durch $(H^{(\epsilon)} f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\epsilon<|y|} \frac{f(x-y)}{y}\,dy$.

Die Hilbert-Transformation von $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist durch $(H\varphi)(x) := (W_0 * \varphi)(x) = \lim_{\epsilon\to 0}(H^{\epsilon}\varphi)(x)$ definiert.

Beobachte, dass $(H^{(\epsilon)} f)(x)$ für festes $\epsilon>0$ und $f\in L^p$ $(1\le p<\infty)$ wg Hölder wohldefiniert ist.

$\int \frac{\varphi(x-y)}{y}\,dy$ konvergiert möglicherweise nicht mal für $\varphi\in\mathcal{S}$ absolut für alle $x\in\mathbb{R}$.

Aus diesem Grund regularisieren wir und definieren die Hilberttransformation als Grenzwert von absolut konvergenten Integralen $\int_{|x-y|>\epsilon} \frac{\varphi(y)}{x-y}$ für $\epsilon\to 0$.

Solche Grenzwerte heißen Cauchy-Hauptwerte (p.v.)

$$(H\varphi)(x) := \frac{1}{\pi}\, p.V. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x-y)}{y}\, dy$$

Bemerkungen Tatsächlich genügt Hölderstetigkeit (+ gewisse Abfallbedingungen, z.B. $\varphi \in L^p(|x|>1)$, $p \geq 1$ od. $\varphi \lesssim d(|x|)$. —

$$\left| \int_{|y|<\varepsilon} \frac{\varphi(x-y)-\varphi(x)}{y} \right| \lesssim \|\varphi\|_{C^\alpha} \int_{|y|<\varepsilon} |y|^{\alpha-1}\, dy.$$

Hausaufgabe Berechne $(H \mathbb{1}_{(a,b)})(x) = \frac{1}{\pi}\log \frac{|x-a|}{|x-b|}$

$\Rightarrow$ $H\mathbb{1}_{(a,b)}$ hat logarithmische Singularitäten

und fällt wie $|x|^{-1}$ im ∞

$\Rightarrow$ $H\mathbb{1}_{(a,b)} \notin L^1 \cup L^\infty$

Hoffnung: H ist weak-type $(1,1)$? $\|Hf\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|f\|_1$?

$$P_t(x) = e^{-t|p|}(x) \sim \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{(d+1)/2}} \overset{d=1}{=} \frac{t}{t^2+|x|^2}$$

konjugierter Poissonkern

$$d=1 \quad \underline{Q_t(x)} = (\mathrm{sgn}(p)\, e^{-t|p|})(x) \sim \frac{x}{t^2+x^2} \xrightarrow{t\to 0} \frac{1}{x}$$

Behauptung: $Q_t * \varphi \to H\varphi$ im $\mathcal{S}'$-Sinne (Hausaufgabe)

$$\Rightarrow \widehat{H\varphi}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}\,\xi\; \hat{\varphi}(\xi)$$

Alternativer Beweis: sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dann gilt
(für $\widehat{H\varphi}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}\,\xi\; \hat{\varphi}(\xi)$)

$$\langle \hat{W}_0, \varphi \rangle_{\mathcal{S}} = \langle W_0, \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|\xi|>\varepsilon} \hat{\varphi}(\xi)\, \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\frac{1}{\varepsilon}>|\xi|>\varepsilon} \frac{d\xi}{\xi} \int_{\mathbb{R}} dx\; e^{-2\pi i x\xi}\varphi(x)$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int dx \; \varphi(x) \Big[\frac{-i}{\pi} \int_{1/\epsilon > |\xi| > \epsilon} \frac{d\xi}{\xi} \sin(2\pi \underset{\substack{| \\ x = |x| \operatorname{sgn}(x)}}{x} \xi) \Big]$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int dx \; \varphi(x) \frac{-i}{\pi} \operatorname{sgn}(x) \underbrace{\int_{\frac{1}{2\pi\epsilon} > |\xi| > \frac{\epsilon}{2\pi}} \sin(|x|\xi) \frac{d\xi}{\xi}}_{\xrightarrow{\epsilon \to 0} \pi} \qquad \text{(Hausaufgabe)}$$

$$= \int dx \; \varphi(x) (-i \operatorname{sgn} x)$$

$\Rightarrow \hat{W}_0 = -i \operatorname{sgn} \xi$, d.h. der Fouriermultiplikator von H ist $-i \operatorname{sgn} \xi$.

D.h. $\boxed{(Hf)(x) = \left(\hat{f} \cdot (-i \operatorname{sgn}(\cdot)) \right)^{\vee}(x)}$

$\Rightarrow$ Wg Plancherel ist $\| Hf \|_2 = \| f \|_2$

$$H^2 = H \cdot H = -\mathbb{1} \quad (\text{in } L^2)$$

$$\langle \hat{\varphi}, -i \operatorname{sgn} \hat{\psi} \rangle \qquad H^* = -H$$

3.3 Überblick über bekannte Tatsachen aus Distributionentheorie

<u>Ziel</u> L^p-Beschränktheit von H.

Charakteristische Eigenschaften von H:

H ist "kritisch singulär", insb ist der Kern durch $|x|^{-1}$ beschränkt $\to$ Singularitäten am Ursprung und im Unendlichen.

H hat eine Auslöschungseigenschaft, da wir mit p.v. $\frac{1}{x}$ falten

H erfüllt eine Glattheitsbedingung

$$\left| \nabla \frac{1}{x} \right| \lesssim \frac{1}{|x|^2} \leftarrow \int \frac{f(x-y)-f(x)}{y}\,dy$$

Diese Eigenschaften sind gewissermaßen charakteristisch für die d-dimensionalen singulären Integraloperatoren, die wir hier betrachten

a) L^2-Theorie $\to$ Spektralsatz, Plancherel $\leftrightarrow$ Auslöschungen, Oszillationen

b) L^p-Theorie $\to$ singuläre Integraloperatoren sind L^p-beschränkt für $1<p<\infty$

allerdings: $p=1,\infty \to$ hier bekommen wir nichts.

Ersatz $\longrightarrow$ H^1 statt L^1, BMO statt L^∞

$\hookrightarrow$ Hardyräume $\qquad$ $\hookrightarrow$ bounded mean oscillation

$H^1 \subseteq L^1$ $\qquad$ $\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B|\,dx$

$BMO \supseteq L^\infty$

H^1 und BMO sind dual zueinander (Fefferman-Stein)

$\to$ Stein Harmonic Analysis

Immerhin bekommen wir hier eine $L^{1,\infty}$-Theorie.

c) H ist translationsinvariant, d.h.

$(Tf)(x) = \int K(x-y) f(y)\,dy$

$$(H(f(\cdot - h)))(x) = (Hf)(\cdot - h) \quad h \in \mathbb{R}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y) f(y-h)\,dy = \int K(x-h-y) f(y)$$
$$= (Tf)(x-h)$$

und dilatationsinvariant $\quad K(\sigma(x-y)) = \sigma^{-d} K(x-y)$, $\sigma > 0$

$\frac{1}{\sigma x}$ d.h. die Integralkerne sind homogen vom Grad $-d$
bzw die Fouriermultiplikatoren sind homogen vom Grad 0

Zusammengefasst:
Wir betrachten $(Tf)(x) := \int K(x-y) f(y)\,dy$, wobei

T translationsinvariante (und dilatationsinvariante) Integraloperatoren

sind, deren L^2-Theorie gut verstanden, oder "einfach" etabliert werden kann.

wesentlich, um L^2-Theorie zu bekommen

Annahmen an $K(x-y)$: Singularitäts- Auslöschungs- und Glattheitseigenschaften

Die Struktur von translationsinvarianten Transformationen, die in L^1 oder L^2 beschränkt sind, sind vollständig verstanden (im Gegensatz zu L^p)

$\mathcal{B}$ ... Banachraum aller endlichen Borelmaße $d\mu$ mit Norm $\|d\mu\| = \int_{\mathbb{R}^d} d\mu$

L^1-Theorie **Behauptung 3.5** Sei T ein L^1-beschränkter, translationsinvarianter Operator. Dann gibt es $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, sodass

$(f*\mu)(x) = \int f(x-y)\,d\mu(y)$

$$Tf = f*\mu,\ f \in L^1 \quad \text{und}$$

$$\|T\|_{L^1,L^1} = \|d\mu\|$$

L^2-Theorie Für $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist $\hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\mu(x)$

<u>Behauptung 3.6</u> Sei T ein L^2-beschränkter, translationsinvarianter Operator $\Rightarrow \exists\, m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ (Fouriermultiplikator)

$$(Tf)^\wedge(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi), \quad f \in L^2$$

$$\|T\|_{L^2, L^2} = \|m\|_\infty$$

Umgekehrt: Für $m \in L^\infty$ definiert $(m\hat{f})^\vee$ $(f \in L^2)$ einen translationsinvarianten, L^2-beschr. Operator.

3.4 The heart of the matter

Vorläufiges Resultat $\quad Tf(x) = \int K(x-y)$

<u>Theorem 3.7</u> Sei $K \in L^2(\mathbb{R}^d)$, sodass

werden wir später wesentlich abschwächen

a) $|\hat{K}(\xi)| \leq B$ (Auslöschungseigenschaft)

b) $K \in C^1(\mathbb{R}^d)$ außerhalb des Ursprungs und

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{B}{|x|^{d+1}} \quad \text{(Glattheitsbedingung)}$$

Für $f \in L^1 \cap L^p$ setzen wir $(Tf)(x) = \int K(x-y) f(y)\,dy$

$\Rightarrow$ Dann gibt es $A_p > 0$, sodass $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$

und man kann T zu einem L^p-beschränkten Operator eindeutig fortsetzen (wg. Stetigkeit). Die Konstante $A_p = A(p, d, B)$ und insbesondere nicht von $\|K\|_{L^2}$.

Bemerkung Die Annahme $K \in L^2$ ist nur nötig, um T auf einer dichten Teilmenge (wie $L^1 \cap L^p$) zu definieren und könnte durch $K \in L^1 + L^2$ ersetzt werden.

In der Aussage des Theorems hat die Annahme $K \in L^2$ keine Auswirkungen, da die L^p-Schranke unabhängig von $\|K\|_2$ ist. $\rightarrow$ kann durch Grenzwertargumente entfernt werden $\rightarrow$ Thm 3.8

Beweis Um die L^p-Beschränktheit zu zeigen, genügt es weak-type $(1,1)$ und $(2,2)$-Schranken zu zeigen

Marcinkiewicz $\Rightarrow$ strong-type (p,p) $1<p<2$

$\Rightarrow$ aus Dualität folgt strong-type (p,p) $2 \le p < \infty$

$$\|T\|_{p,p} = \sup_{\varphi \in L^p} \|T\varphi\|_p = \sup_{\substack{\psi \in L^{p'} \\ \varphi \in L^p}} |\langle \psi, T\varphi \rangle|$$

$$= \sup_{\dots} |\langle T^*\psi, \varphi \rangle| = \|T^*\|_{p',p'}$$

$$= \|T\|_{p',p'}$$

Da T strong-type $(2,2)$ ist (da $\|\hat{K}\|_\infty \le B < \infty$), genügt es weak-type $(1,1)$ zu zeigen.

10.06.2020

Wir zeigen $|\{|(Tf)(x)| > \alpha\}| \lesssim \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}$

Mit Calderón-Zygmund $\mathbb{R}^d = F \,\dot\cup\, \Omega$

$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ $\qquad \|f\|_{L^\infty(F)} \le \alpha$

$|\Omega| \lesssim \frac{1}{\alpha} \int |f|$ $\qquad \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f| \lesssim \alpha$

Wir zerlegen $f = g + b$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in F \\ \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f & x \in Q_k \end{cases} \Rightarrow \|g\|_\infty \lesssim \alpha$$

$$b(x) = \begin{cases} 0 & x \in F \\ f(x) - g(x) & x \in \Omega \end{cases}$$ mit $\int_{Q_k} b(x)\,dx = \int_{Q_k} (f-g)\,dx = 0$

$$|\{|(T\underbrace{f}_{g+b})(x)| > \alpha\}| \le |\{|(Tg)(x)| > \tfrac{\alpha}{2}\}| + \underbrace{|\{\underbrace{\ }_{x\in\mathbb{R}^d = F\cup\Omega}|(Tb)(x)| > \tfrac{\alpha}{2}\}|}$$

$$\le \underbrace{|\Omega|}_{\le \frac{\|f\|_1}{\alpha} \,//} + |\{x \in F : |(Tb)(x)| > \tfrac{\alpha}{4}\}|$$

mit $\int |g|^2 \le \alpha \|g\|_1 \le \alpha \|f\|_1$

$$|\{|Tg| > \alpha/2\}| \lesssim \frac{\|Tg\|_2^2}{\alpha^2} \overset{T:L^2\to L^2}{\le} \frac{B\|g\|_2^2}{\alpha^2} \lesssim \frac{\|f\|_1}{\alpha} \,//$$

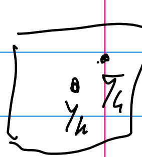
Verbleibt $|\{x \in F : |(Tb)(x)| \ge \alpha/4\}| \le \frac{4}{\alpha}\int_F dx\, \underline{|Tb(x)|}$

$b_k := b\,\mathbb{1}_{Q_k}$

$x \in F$: $$(Tb)(x) = \sum_k (Tb_k)(x) = \sum_k \int_{Q_k} K(x-y)\,b_k(y)\,dy$$

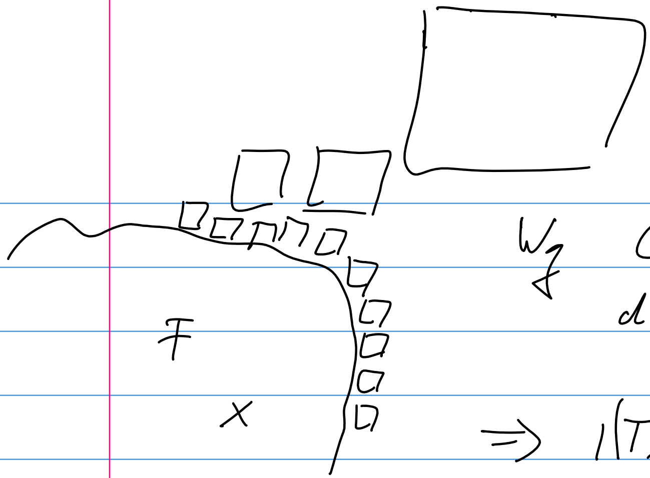
$\bar{y}_k$ variabler Punkt auf der geraden Linie zwischen y_k und $y \in Q_k$

$$= \sum_k \int_{Q_k} \underbrace{\big(K(x-y) - K(x-y_k)\big)}_{\overset{(\circ)}{\le} |\nabla K(x-\bar{y}_k)|\cdot|y-y_k|} b_k(y)\,dy$$



Q_k

y_k ← Zentrum von Q_k



$$\lesssim \frac{\operatorname{diam}(Q_k)}{|x-\tilde{y}_k|^{d+1}} \qquad (\text{mit } |\nabla K| \lesssim |x|^{-d-1})$$

Wg CZ-Lemma wissen wir, dass
$\operatorname{diam}(Q_k) \sim \operatorname{dist}(Q_k, F)$

$$\Rightarrow |(Tb_k)(x)| \lesssim \operatorname{diam}(Q_k) \int_{Q_k} \frac{|b_k(y)|}{|x-\tilde{y}_k|^{d+1}}\, dy$$

$\int |b_k|\, dx \lesssim \alpha |Q_k|$

$$\lesssim \frac{\alpha \operatorname{diam}(Q_k)\, |Q_k|}{\operatorname{dist}(F, Q_k)^{d+1}}$$

$\delta(y) = \operatorname{dist}(y, F)$

$$\lesssim \underbrace{\alpha \int_{Q_k} \frac{\delta(y)}{|x-y|^{d+1}}\, dy}_{\text{kommt bei Marcinkiewicz-Integral vor (sh. Lemma 3.2)}}$$

$$\Rightarrow |\{x \in F : |(Tb)(x)| > \alpha/4\}|$$

$$\leq \frac{4}{\alpha} \int_F dx\, |Tb| \lesssim \int_F dx \int_\Omega dy\, \frac{\delta(y)}{|x-y|^{d+1}}$$

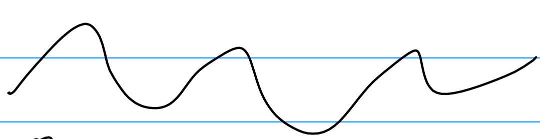
$$\underset{\text{(Marcinkiewicz)}}{\overset{\text{Lemma 3.2}}{\lesssim}} |F^c| = |\Omega| \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}$$

Bemerkungen: • Thm ist unbefriedigend, da

- L^2-Beschränktheit durch $\|\hat{K}\|_\infty \lesssim 1$ vorausgesetzt wurde
  $\to$ Verbesserung in Thm 3.9

$$\text{p.v.} \int \frac{1}{x-y} = 0$$

$$\int_{|x| \in [R_1, R_2]} K(x)\, dx = 0$$



$\to$ Oszillationen führen zu L^2-Beschränktheit...

– Glattheitsbedingung $|\nabla K(x)| \lesssim |x|^{-d-1}$ $(K \in C^1(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}))$

ersetzen durch – Hölder $\int |K(x-y) - K(x-z)|\, dx \lesssim |y-z|^\alpha$

$(\alpha > 0)$

oder – Hörmander $\int\limits_{|x-y|>2|y-z|} |K(x-y) - K(x-z)|\, dx \lesssim 1$

$\Uparrow$

$|\nabla K(x)| \lesssim |x|^{-d-1}$

- CZ-Zerlegung kann besser an den betrachteten Operator angepasst werden

z.B. $b_i = \underbrace{(1-\psi_{k_i})\, b_i}_{\text{Oszillation}} + \underbrace{\psi_{k_i} b_i}_{}$

L^2 – Methode (hier braucht man oft ptweise Schr. an $\psi_{k_i}(T)(x,y)$)

$\psi_{k_i}(T) \sim$ "Approximation der 1"

Bsp $\psi_{k_i}(T) = e^{-2^{\alpha k_i}|p|^\alpha}$

$\hookrightarrow$ später $\to$ Spektralmultiplikatoren, z.B. Hebisch)

Korollar 3.8 Die Ergebnisse von Thm 3.7 gelten auch, wenn $|\nabla K(x)| \lesssim |x|^{-d-1}$ ersetzt wird durch

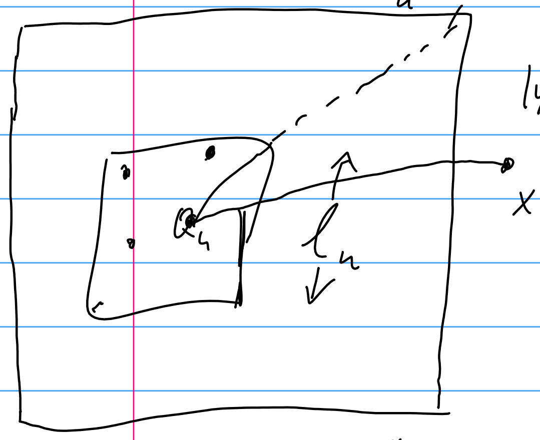
$$\sup_{y,z\in\mathbb{R}^d} \int\limits_{|x-y|>2|y-z|} |K(x-y) - K(x-z)|\, dx \lesssim 1 .$$

Beweis Folgt obigem Beweis bis auf neue

$$|\{x \in F : |(Tb)(x)| > \alpha\}| \lesssim \frac{\|f\|_1}{\alpha} \text{ – Schranke.}$$

[Wir brauchen hier nicht, dass $\operatorname{diam} Q_n \sim \operatorname{dist} F, Q_n$

diam Q_k $= \sqrt{\sum (l_k/2)^2} = \sqrt{d}\, l_k/2$



Im Folgenden betrachten wir $2\sqrt{d}$-dilatierte Würfel Q_k^*, mit gleichem Zentrum wie Q_k aber

$$|y - y_k| = \sqrt{d}\cdot l_k/2 \xrightarrow{\cdot 2\sqrt{d}} l_k$$

(Länge wird um $2\sqrt{d}$ dilatiert)

(i) $Q_k \subseteq Q_k^*$, $|\Omega^*| \leq (2\sqrt{d})^d |\Omega|$

(ii) Wenn $x \notin Q_k^*$ $|x - y_k| \geq 2|y - y_k|$

für alle $y \in Q_k$

$|\{|Tb| > \alpha\}|$

$x \in \Omega^* \cup (\Omega^*)^c$

$|\Omega^*| \lesssim \frac{\|f\|_1}{\alpha}$

$$(Tb_k)(x) = \int_{Q_k} (K(x-y) - K(x-y_k))\, b_k(y)\, dy$$

$F^* = (\Omega^*)^c$

$$\to \int_{F^*} dx\, |(Tb)(x)| \leq \sum_k \int_{\substack{(Q_k^*)^c \\ |x-y_k| > 2|y-y_k|}} dx \int_{Q_k} dy\, |K(x-y) - K(x-y_k)|\, |b(y)|$$

$\int_{|x-y| > 2|y-z|} |K(x-y) - K(x-z)| \lesssim 1$

$$\overset{\text{Hörmander}}{\lesssim} \sum_k \int_{Q_k} dy\, |b(y)| \lesssim \|f\|_1$$ ☒

$|\{x \in F^* : |(Tb)(x)| > \alpha\}|$

$\leq \frac{1}{\alpha} \|Tb\|_{L^1(F^*)}$

Jetzt eliminieren wir die L^2-Bedingung, um p.v.-Typ Integrale (Hilbert-Transf. ...) zu behandeln.

Thm 3.9 Angenommen, der Integralkern $K(x-y)$ erfüllt

$$|K(x)| \leq \frac{B}{|x|^d}, \text{ und } \sup_{y,z} \int_{|x-y| > 2|y-z|} |K(x-y) - K(x-z)|\, dx \leq B$$

sollte die neue Auslöschungseigenschaft

$$\int_{R_1 < |x| < R_2} K(x)\, dx = 0 \quad \text{für alle} \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty$$

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, definiere

$$(T_\epsilon f)(x) := \int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y)\, f(y)\, dy .$$

Dann gilt: $\| T_\epsilon f \|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq A_{p,B} \|f\|_p$

und $T_\epsilon f \xrightarrow[L^p]{\epsilon \to 0} Tf$ und $\|Tf\|_p \leq A_{p,B} \|f\|_p$.
(mit FAP I)

<u>Lemma 3.10</u> Angenommen, K erfüllt die Bedingungen aus Thm 3.9 und setze

$$K_\epsilon(x) = \begin{cases} K(x) & |x| > \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$ Dann ist $K_\epsilon \in L^2$

für alle $\epsilon > 0$ und für den Fouriermultiplikator gilt

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\hat{K}_\epsilon(\xi)| \leq C_d \cdot B \text{ gleichmässig in } \epsilon > 0.$$

<u>Bemerkung</u> Wir zeigen Lemma zunächst für $\epsilon = 1$ und verwenden dann ein Dilatationsargument (hoffnungsvoll in dieser Situation, da K moralisch homogen vom Grad $-d$ ist

$$(|x|^{-\alpha})^\vee(\xi) \sim |\xi|^{-d+\alpha} \quad (\alpha = d)$$

d.h. $\hat{K}$ ist moralisch homogen vom Grad 0, was es mit Dilatationsargumenten behandelbar werden lässt)

Einige Referenzen / Teschl – Mathematical Methods in Quantum Mechanics
2 Kapitel 2–3 ← Spektralsatz / Spektraltheorie

Weidmann – Lineare Operatoren in Hilberträumen I
1 Kapitel 2 (beschränkte Ops)
Kapitel 4 (abgeschlossene Ops)
(Kapitel 5, 8 (Spektraltheorie))

hier Kap 1 Grafakos, Notizen von Tao
Kap. 2 Stein – Singular Integrals (Kap 1, Teil 2, 3)
↳ Krantz, i (Kap. 0)
Panorama of Harmonic Analysis
↳ FA? I, II (Kap. 0)
Kap 3 Stein – Singular Integrals (Kap 2)

11.06.2020

Beweis von Lemma 3.10

Wir beginnen mit $\epsilon = 1$. Wg der Voraussetzungen an K_1 erfüllt K_1 dieselben Schranken wie K $(|K_1(x)| \lesssim |x|^{-d}, \dots)$

$$\hat{K}_1(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} e^{2\pi i x\cdot\xi} K_1(x)\,dx$$

(im Spirit wie $\int e^{2\pi i x\cdot\xi} \underset{C_c^\infty}{\varphi(x)}\,dx \lesssim \langle\xi\rangle^{-N} \|\varphi\|_{C^\infty} \; \forall N$)

$$= \underbrace{\int_{|x|<\frac{1}{|\xi|}} e^{2\pi i x\cdot\xi} K_1(x)\,dx}_{=: I_1} + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\frac{1}{|\xi|}<|x|<R} e^{2\pi i x\cdot\xi} K_1(x)\,dx}_{=: I_2}$$

Wg der Auslöschungseigenschaft

$$\int_{|x|<1/|\xi|} dx\, K_1(x) \underbrace{\left(e^{2\pi i x\cdot\xi} - 1\right)}_{\overset{!}{\lesssim} |x||\xi|} \overset{!!}{\lesssim} |\xi| \int_{|x|<\frac{1}{|\xi|}} dx\, |x|^{1-d} \lesssim 1$$

$\Rightarrow |I_1| \lesssim 1$ ✓

Zu I_2: sei $z(\xi) = z$ so, dass $e^{2\pi i x\cdot\xi}\big|_{x=z(\xi)} = -1$

also z.B. $z(\xi) = \frac{1}{2}\frac{\xi}{|\xi|^2}$, insb. $|z(\xi)| = \frac{1}{2|\xi|}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx\, e^{2\pi i x\cdot\xi} K_1(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} dx\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\big(K_1(x) - K_1(x-z)\big)$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{1/|\xi|<|x|<R} e^{2\pi i x\cdot\xi} K_1(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{1/|\xi|<|x|<R} e^{2\pi i x\cdot\xi}\big(K_1(x) - K_1(x-z)\big) \qquad (*)$$

$$- \frac{1}{2}\int_{\substack{\frac{1}{|\xi|}<|x+z| \\ |x|<|\xi|^{-1}}} dx\, e^{2\pi i x\cdot\xi} K_1(x)$$

Die Region $\{x\in\mathbb{R}^d : |x|<|\xi|^{-1}$ und $\frac{1}{|\xi|}<|x+z|\}$ ist in der Kugelschale $\frac{1}{2|\xi|} < |x| < \frac{1}{|\xi|}$ enthalten

$$\Big(\text{da } |x+z-z| \underset{|z|=\frac{1}{2|\xi|}}{>} \frac{1}{|\xi|} - \frac{1}{2|\xi|} = \frac{1}{2|\xi|}\Big)$$

$$\rightarrow \int_{\substack{\frac{1}{|\xi|}<|x+z| \\ |x|<|\xi|^{-1}}} dx\, |K_1(x)| \lesssim \int_{\frac{1}{2|\xi|}<|x|<\frac{1}{|\xi|}} dx\, |x|^{-d} = \text{const} \log\frac{|\xi|^{-1}}{|\xi|^{-1}/2}$$

$$= \log 2.$$

Dies zeigt, dass der zweite Summand in $(*)$ glm. beschr. ist. Für den ersten Summanden verwenden wir die Hörmander-Bedingung.

1. Integral auf RHS von $(*)$ $\leq \int_{|x|>1/|\xi|} |K(x) - K(x-z)| \lesssim 1$

wg. $|x| > 2|z| = \frac{1}{|\xi|}$ was Hörmander anwendbar machen lässt.

$$\Longrightarrow \|\hat{K}_1\|_\infty \lesssim 1$$

Jetzt zu K_ϵ mittels Dilatationen

Sei τ_ϵ der Dilatationsoperator (definiert auf messbare Fkten), der wie $(\tau_\epsilon f)(x) := f(\epsilon x)$.

Für einen Faltungsoperator T, $Tf = \int K(x-y) f(y)\, dy$ definieren den dilatierten Operator durch $\tau_\epsilon^{-1} T \tau_\epsilon$. Der Integralkern von $\tau_\epsilon^{-1} T \tau_\epsilon$ ist dann durch

$\epsilon^{-d} K(x/\epsilon)$ gegeben. (Hausaufgabe?)

$$|K(x)| \leq |x|^{-d} \longmapsto |\epsilon^{-d} K(x/\epsilon)| \leq |x|^{-d}$$

$$\sup_{y,z} \int_{\frac{|x-y|}{\epsilon} > 2\frac{|y-z|}{\epsilon}} |K_\epsilon(x-y) - K_\epsilon(x-z)|\, dx = \sup_{y,z} \int_{|x-\frac{y}{\epsilon}| > 2|\frac{y-z}{\epsilon}|} |K(x-\tfrac{y}{\epsilon}) - K(x-\tfrac{z}{\epsilon})|$$

$$= \sup_{y,z} \int_{|x-y| > 2|y-z|} |K(x-y) - K(x-z)|\, dx$$

$\Rightarrow$ Sei im Folgenden $\tilde{K} = \epsilon^{d} K(\epsilon x)$. Dann erfüllt $\tilde{K}$ die Bedingungen des Lemmas mit denselben Schranken B

$\Rightarrow$ Für $\tilde{K}_1 = \begin{cases} \tilde{K}(x) & |x| > 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases}$ können wir obigem Beweis folgen und erhalten $\|\widehat{\tilde{K}_1}\|_\infty \lesssim 1$.

Die Fouriertransformation von $\epsilon^{-d} \tilde{K}_1(x/\epsilon)$ ist gerade $\widehat{\tilde{K}_1}(\xi)$, was wieder durch eine Konstante (unabhängig von ϵ!) beschränkt ist.

Aber da $K_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} \tilde{K}_1(x/\epsilon)$ ist das Lemma bewiesen $\boxtimes$

Beweis von Thm 3.9

Da K die Schranken $|K(x)| \lesssim |x|^{-d}$, Hörmanders Bed. und die Auslöschungsbedingung erfüllt, erfüllt auch K_ϵ diese Bedingungen (modulo d-abhängiger Konstanten) glm in ϵ.

$\Rightarrow$ Wg Korollar 3.8 folgt $\|T_\epsilon f\|_p \leq A_{p,B} \|f\|_p$, $1<p<\infty$.

Um $T_\epsilon f \xrightarrow[\epsilon \to 0]{\|\cdot\|_p} Tf$ zu zeigen, verwenden wir FAP I, d.h. es genügt L^p-Konv. auf einer dichten Funktionenklasse von L^p zu zeigen, z.B. C_c^1

$$\left(f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in C_c^1, \quad \|f_2\|_p < \delta \right)$$

Wg Auslöschungs-eigenschaft $(T_\epsilon f_1)(x) = \underbrace{\int_{|y|>1} K(y) f_1(x-y)\, dy}_{\in L^p \text{ wg Young}} + \underbrace{\int_{\epsilon<|y|<1} K(y)\big(f_1(x-y) - f(x)\big)}_{\xrightarrow{\epsilon \to 0} \int_{|y|<1} K(y) f_1(x-y)\, dy}$

$$\|K * f_1\|_p \leq \|K\|_p \|f_1\|_1$$

gleichmäßig in x auf einem Kompaktum

$\Rightarrow$ $T_\epsilon f_1$ konvergiert in L^p für $\epsilon \to 0$

$\|T_\epsilon f_2\| \lesssim \|f_2\|_p < \delta \to 0$, da δ beliebig.

$\Rightarrow$ $\lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f$ existiert in L^p und der Grenzoperator

T erfüllt $\|Tf\|_p \leq A_{p,B} \|f\|_p$. $\boxtimes$

$\to$ Thm 3.9 ist auf Hilberttransformation anwendbar,

da $(Hf)(x) = \text{p.v. } \frac{1}{x} * f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy$

Prüfen der Bedingungen: $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$ ✓

$$\int_{|x|>2|z|} dx \, \frac{1}{x} - \frac{1}{x-z} \underset{z>0}{=} -\int_{|x|>2|z|} dx \, \frac{z}{x^2-xz}$$

$$= -\int_{|x|>2} \frac{dx}{x^2-x} < \infty$$

$$\int_{|x|\in(R_1,R_2)} \frac{dx}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ H ist L^p-beschränkt und $H^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} H$ in L^p

$$H^\varepsilon f = \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

Aber H ist weder L^1- noch L^∞-beschränkt!

3.5 Singuläre Integraloperatoren, die mit Dilatationen kommutieren

$L^2(\mathbb{R}^3) \ni f(x) = \sum_{\ell m} \tilde{f}_{\ell m}(|x|) \, Y_{\ell m}\left(\frac{x}{|x|}\right)$

$$\tilde{f}_{\ell m} \in L^2(\mathbb{R}_+, dr)$$

$\to$ Im Folgenden: $\boxed{K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^d}}$, wobei $\Omega(x)$ homogen vom Grad 0 ist

$\hat{H} \sim \operatorname{sgn} \xi = \frac{\xi}{|\xi|}$ in $\mathbb{R}$

$\to$ natürliches Analogon $\Omega_j(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}$ $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_d)$
(Riesz-Transformation)

$\to$ Versuche, die Bedingungen aus obiger Maschinerie (Thm 3.9) durch Ω auszudrücken

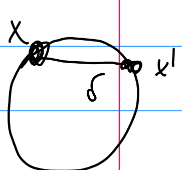
$$\left.\begin{aligned} &|K(x)| \lesssim |x|^{-d} \\ &\int_{|x-y|>2|y-z|} |K(x-y)-K(x-z)|\,dx \lesssim 1 \end{aligned}\right\} \quad K = \frac{\Omega(x)}{|x|^d} \quad \Rightarrow \|\Omega\|_{L^\infty(S^{d-1})} \lesssim 1$$

$$\Rightarrow \int_{S^{d-1}} |\Omega|\, d\omega \lesssim 1$$

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)\,dx = 0 \iff \int_{R_1}^{R_2} dr\; r^{-1} \int_{S^{d-1}} d\omega\; \Omega(\omega) \overset{!}{=} 0$$

$$\iff \int_{S^{d-1}} \Omega \overset{!}{=} 0$$

Die präzise Hörmander-Bedingung lässt sich nur schwer direkt durch Ω ausdrücken
$\Rightarrow$ Ersatz: wir verlangen, dass Ω eine gewisse schwache/gemittelte Glattheitsbedingung erfüllt.



"Dini-Bedingung": Falls $\sup_{\substack{|x-x'|<\delta \\ |x|=|x'|=1}} |\Omega(x)-\Omega(x')| = \omega(\delta)$

dann soll $\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta}\, d\delta \lesssim 1$ sein

<u>Bsp</u> $\Omega \in C^\alpha$ $(\alpha>0)$ erfüllt die Dini-Bedingung.

Hausaufgabe: Dini-Bedingung an Ω $\Rightarrow$ Hörmander-Bedingung an $K = \frac{\Omega}{|x|^d}$

$$\Rightarrow \hat{K}(\xi) = \int_{S^{d-1}} \left(\frac{\pi i}{2} \underline{\operatorname{sgn}(x\cdot\xi)} + \underline{\log \frac{1}{|x\cdot\xi|}} \right) \Omega(x)\, d\omega(x)$$

for $|\xi| = 1$.

17.06.2020

Theorem 3.11 Sei Ω homogen vom Grad 0, sodass

$\int_{S^{d-1}} \Omega(x)dx = 0$ und die Dini-Bedingung erfüllt ist

$$\left(\sup_{|x-x'|<\delta} |\Omega(x) - \Omega(x')| = \omega(\delta) \Rightarrow \int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty \right)$$

Für $1<p<\infty$ sei $T_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^d} f(y)dy$

$\Rightarrow$ a) $\| T_\epsilon f\|_p \leq A_p \|f\|_p$ glm in $\epsilon>0$

b) $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f = Tf$ existiert in L^p-Norm und

$\| Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$.

c) Wenn $f\in L^2$, dann sind die Fouriertransformationen von f und Tf durch $(Tf)^\wedge(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$ miteinander verbunden, wobei m homogen vom Grad 0 ist und

$$m(\xi) = \int_{S^{d-1}} \left(\frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn}(x\cdot\xi) + \log\left(\frac{1}{|x\cdot\xi|}\right)\right) \Omega(x)\, d\omega(x)$$

Lebesguemaß auf S^{d-1}.

Beweis a), b) folgen aus Thm 3.9, sobald man zeigt, dass Dini-Bedingung an $\Omega \Rightarrow$ Hörmander-Bedingung an $\frac{\Omega(x)}{|x|^d}$.

c) Da T ein L^2-beschränkter Faltungsoperator ist, folgt, dass $m(\xi)$ beschränkt (Plancherel)

Weiter: da $K(x)$ homogen vom Grad $-d$ ist, ist $m(\xi)$ homogen vom Grad 0.

$$m(\xi) = \int \frac{\Omega(x)}{|x|^d} e^{2\pi i x\cdot\xi}\, dx \overset{x \mapsto \epsilon x}{=} m(\epsilon\xi)$$

Zur expliziten Formel von $m(\xi)$.

Definiere $K_{\epsilon,\eta}(x) = \begin{cases} \frac{\Omega(x)}{|x|^d} & \epsilon < |x| < \eta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Insb. $K_{\epsilon,\eta} \in L^1$ und für $f \in L^2$ gilt

$$(K_{\epsilon,\eta} * f)^\wedge(\xi) = \widehat{K_{\epsilon,\eta}}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$$

Zwischenbehauptungen: (i) $|\widehat{K_{\epsilon,\eta}}(\xi)| \lesssim 1$, glm in ϵ, η

(ii) für $\xi \neq 0$ gilt $\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \eta \to \infty}} \widehat{K}_{\epsilon,\eta}(\xi) = m(\xi)$, wobei $m(\xi)$ der Ausdruck in der Aussage des Thms ist.

$\int dx = \int_0^\infty dr\, r^{d-1} \int_{S^{d-1}} d\omega$

$\int \Omega = 0$

$\int_{S^{d-1}} d\omega\, \Omega$

Dazu seien $x = r\omega$, $\xi = h\nu$ und

$$I_{\epsilon,\eta}(\xi, \omega) = \int_\epsilon^\eta \left[e^{2\pi i x\cdot\xi} - \cos(2\pi h r) \right] \frac{dr}{r}$$

$$\operatorname{Im}\left(I_{\epsilon,\eta}(\xi, \omega)\right) = \int_\epsilon^\eta \frac{\sin(2\pi x\cdot\xi)}{r}\, dr$$ ist glm.

beschränkt in ϵ, η und konvergiert gegen $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega\cdot\nu)$

$$\operatorname{Re}\left(I_{\epsilon,\eta}(\xi, \omega)\right) = \int_\epsilon^\eta \frac{\cos(2\pi x\cdot\xi) - \cos(2\pi h r)}{r}\, dr$$ ist

im Absolutbetrag durch

$1 + \log \frac{1}{|w\cdot v|}$ beschränkt (mit partieller Integration)

und konvergiert gegen $\log \frac{1}{|w\cdot v|}$ //

Grund Für entsprechende Funktion h gilt

$$\lim_{\substack{\eta\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \int_\epsilon^\eta \frac{h(\lambda r) - h(\mu r)}{r}\, dr = h(0) \log \mu/\lambda, \quad \mu, \lambda > 0$$

$(h(r) = \cos(2\pi r) \quad \lambda = h\,|w\cdot v|$

$$\int_\epsilon^\eta dr \int_\mu^\lambda dt\; h'(rt) = \underbrace{\int_{\mu\eta}^{\lambda\eta} dt\; t^{-1} h(t)}_{\xrightarrow{\eta\to\infty} 0} - \underbrace{\int_\mu^\lambda \frac{dt}{t} h(\epsilon t)}_{\xrightarrow{\epsilon\to 0} h(0)\log \mu/\lambda}$$

$\int_{S^{d-1}} dw\, \Omega = 0$

$$K_{\epsilon,\eta}(\xi) = \int_{S^{d-1}} dw\, \Omega(w) \underbrace{\int_\epsilon^\eta dr\; r^{-1}\left(e^{2\pi i x\cdot\xi} - \cos 2\pi h r\right)}_{= I_{\epsilon,\eta}(\xi, w)}$$

Da $|I_{\epsilon,\eta}(\xi,w)| \lesssim 1 + \log \frac{1}{|w\cdot v|}$

$$\Rightarrow |K_{\epsilon,\eta}(\xi)| \lesssim \int_{S^{d-1}} dw\, \underbrace{|\Omega(w)|}_{\lesssim 1} \left(1 + \log\frac{1}{|w\cdot v|}\right) \lesssim 1.$$

$\Rightarrow$ das zeigt (i)

Da $\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} I_{\epsilon,\eta}(\xi, w) = \log \frac{1}{|w\cdot v|} + i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(w\cdot v)$

und majorisierte Konvergenz verwenden, folgt (ii),

also $$m(\xi) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} K_{\epsilon,\eta}(\xi) = \int_{S^{d-1}} dw\, \Omega(w)\left(\log\frac{1}{|w\cdot v|} + i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(w\cdot v)\right)$$

Wg Plancherel konvergiert $K_{\epsilon,\eta} * f$ in L^2 für $\eta \to \infty$, $\epsilon \to 0$ für $f \in L^2$ und die Fouriertransformation des Grenzwerts ist gerade $m(\xi)\hat{f}(\xi)$

Wenn wir aber $\epsilon > 0$ festhalten und $\eta \to \infty$ gehen lassen, dann $\int K_{\epsilon,\eta}(x-y) f(y)\,dy \to \int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y) f(y)\,dy$
$= (T_\epsilon f)(x)$

$\to$ Für $\epsilon \to 0$ bekommen wir e) $\square$

Bemerkung 3.12 (Gerade und ungerade Kerne)

Für $\Omega = \underset{\text{ungerade}}{\Omega_u} + \underset{\text{gerade}}{\Omega_g}$ $\quad \Omega_g(x) = \Omega_g(-x)$, $\quad \Omega_u(x) = -\Omega_u(-x)$

haben wir (wg der glm. Beschränktheit des sin-Integrals) $\int_{S^{d-1}} |\Omega_u(w)|\,dw \leq 1$, also $\Omega_u \in L^1(S^{d-1})$ verwendet

Für Ω_g brauchen wir nur $\sup_{v \in S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} \Omega_g(w) \log \frac{1}{|w \cdot v|}\,dw \leq 1$

3.6 Fast-überall-Konvergenz von homogenen singulären Integraloperatoren

Oben: $\lim_{\epsilon \to 0} \int \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^d} f(y)\,dy$ existiert in L^p.

Frage: Konvergenz auch pktweise f.-ü.? $\to$ dazu L^p-Beschränktheit (oder weak-type) von T^* + FAP II

(canc Dini, Homogenität)

Theorem 3.13 Angenommen, Ω erfüllt die Bedingungen aus Thm 3.11. Für $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, sei

$$(T_\epsilon f)(x) := \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^d} f(y)\,dy$$

Dann gilt: a) $\lim_{\epsilon \to 0} (T_\epsilon f)(x)$ existiert für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$.

b) Sei $(T^* f)(x) = \sup_{\epsilon>0} |(T_\epsilon f)(x)|$. Für $f \in L^1$

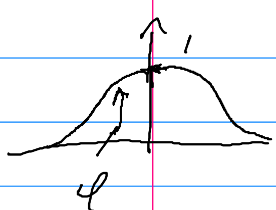
gilt $\|T^* f\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|f\|_{L^1}$.

c) Für $1 < p < \infty$ gilt $\|T^* f\|_p \lesssim \|f\|_p$.

Beweis c) Wg Thm 3.11 b) wissen wir die Existenz von

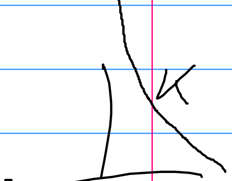
$\lim_{\epsilon \to 0} (T_\epsilon f)(x) = (Tf)(x)$ in L^p-Norm.

Die Behauptung folgt, sobald wir gezeigt haben, dass

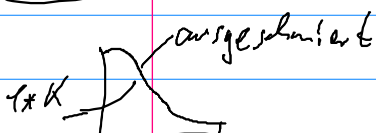


$$(T^* f)(x) \lesssim (M \circ Tf)(x) + (Mf)(x)$$

Sei $0 \le \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ein radial abfallender bump mit $\operatorname{supp} \subset B_0(1)$ und $\int \varphi = 1$.



Sei $K_\epsilon(x) := \begin{cases} K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^d} & |x| > \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$\Phi = \varphi * K - K_1$ ... ausgeschmierte Singularität von K

$\Rightarrow K_\epsilon * f = (\varphi_\epsilon * K - \Phi_\epsilon) * f \overset{\sup_{\epsilon>0}}{\lesssim} M(K * f) + Mf$

wobei $\varphi * K = \lim_{\epsilon \to 0} \varphi * K_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y)\varphi(y)\,dy$

Strategie: Verwende Thm 2.6 ($\sup_{\epsilon>0} |\Psi_\epsilon * f(x)| \lesssim Mf(x)$)

Um Thm 2.6 anzuwenden, brauchen wir, dass die langsamst abfallende radiale Majorante von Φ in L^1 ist.

Dazu: $\underset{\Phi = \varphi * K - K_1}{\Phi}(x) = \varphi * K(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(y)\,\varphi(x-y)\,dy$

$|x|<1$

$\overset{\int \Omega = 0}{=} \int \underbrace{K(y)}_{\lesssim |y|^{-d}} \underbrace{(\varphi(x-y) - \varphi(x))}_{\lesssim \|\nabla\varphi\|_\infty |y| \cdot \mathbb{1}_{\{x-y \in \operatorname{supp}\varphi\}}} dy \overset{|\cdot|}{\lesssim} 1$ insb. für $|x|<1$

$1<|x|<2$

$\Phi(x) = \underbrace{\varphi * K}_{\overset{|\cdot|}{\lesssim} 1 \text{ mit Abschätzung aus } |x|<1\text{-Fall}} - \overbrace{K}^{\in L^\infty} \overset{|\cdot|}{\lesssim} 1 \quad \left(K = \frac{\Omega}{|x|^d},\ \Omega \in L^\infty\right)$

$|x|<2 \Rightarrow |\Phi(x)| \lesssim 1$

$|x|>2$

$\Phi(x) = \int_{|y|<1} K(x-y)\varphi(y)\,dy - \overset{K_1(x)}{K(x)}$

$\overset{\int\varphi = 1}{=} \int_{\substack{|y|<1 \\ |x|>2}} \underbrace{(K(x-y) - K(x))}_{\frac{\Omega(x-y) - \Omega(x)}{|x-y|^d} + \overbrace{\Omega(x)}^{\in L^\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{|x-y|^d} - \frac{1}{|x|^d}\right)}_{\text{MWS}}} \varphi(y)\,dy = (*)$

$|\Omega(x') - \Omega(x)| < \omega(\delta)$

wenn $|x-x'| = \delta$

$(*) \overset{|\cdot|}{\lesssim} \int_{|y|<1} \Big(\underbrace{\omega\left(c\frac{|y|}{|x|}\right)}_{\text{steigende Fkt}} \cdot |x|^{-d} + \|\Omega\|_\infty |y|\,|x|^{-d-1}\Big)\,dy$

$\lesssim \omega\left(\frac{c}{|x|}\right) \cdot |x|^{-d} + |x|^{-d-1}$ } radial, abfallend und integrierbar in $|x|>1$, denn

$$\int_{|x|>1} w\left(\tfrac{c}{|x|}\right) |x|^{-d}\,dx = \int_1^\infty \frac{dr}{r}\, w(c/r)$$

$$\overset{r\mapsto \frac{1}{r}}{=} \int_0^1 \frac{dr}{r}\, w(cr) < \infty$$

wg Dini.

18.06.2020

Da der Integraloperator $\varphi \mapsto \varphi * K$ mit Dilatationen kommutiert,

$$\Phi_\epsilon = \varphi_\epsilon * K - K_\epsilon, \quad \Phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\, \Phi(x/\epsilon)$$

Zwischenbehauptung $\quad (\varphi_\epsilon * K) * f = \varphi_\epsilon * Tf \quad (*)$

Tatsächlich: $\quad ((\varphi_\epsilon * K_\delta) * f)(x) = \underbrace{(T_\delta f)}_{\in L^p} * \underbrace{\varphi_\epsilon}_{\in C_c^\infty \subseteq L^{p'}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$

Da $T_\delta f \xrightarrow{L^p} Tf$, $\quad \varphi_\epsilon * K_\delta \xrightarrow{L^{p'}} \varphi_\epsilon * K \Rightarrow (*)$ mittels Dualität

$\Rightarrow$ Wg der Definition von $\Phi_\epsilon = \varphi_\epsilon * K - K_\epsilon$ gilt $\quad T_\epsilon f = Tf * \varphi_\epsilon - \Phi_\epsilon * f$

$$\underset{\text{Thm } 2.6}{\overset{\sup_{\epsilon>0} |\cdot|}{\lesssim}} MTf + Mf$$

$\Rightarrow$ wg L^p-Beschränktheit von M folgt

$$\|T^* f\|_p \lesssim \|MTf\|_p + \|Mf\|_p \lesssim \|f\|_p .$$

b) $\|T^* f\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|f\|_{L^1}$. Beweis ähnlich zum Beweis von Korollar 3.8

Vg der Argumente im Beweis von Thm 3.7,

sprich: CZ-Lemma $\Rightarrow f = g + b$, $\|g\|_\infty \lesssim \alpha$

$b = \sum_k b_k$, $\operatorname{supp} b_k \subseteq Q_k$

$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |b_k(x)| \lesssim \alpha$

$$|\{x : (T^* f)(x) > \alpha\}|$$

$$\le \underbrace{|\{x : (T^* g)(x) > \tfrac{\alpha}{2}\}|}_{\frac{\|f\|_1}{\alpha}}$$

$$+ \underbrace{|\{x \in F^* \cup \Omega^* : T^* b(x) > \tfrac{\alpha}{2}\}|}$$

$Q_k^* \sim \sqrt{2}\,d$-dilatierten Q_k

$\Omega^* = \bigcup_k Q_k^*$

$F^* = (\Omega^*)^c$

$$\lesssim \underbrace{|\Omega^*|}_{\le \frac{\|f\|_1}{\alpha}} + \boxed{|\{x \in F^* : (T^* b)(x) > \tfrac{\alpha}{4}\}|}$$

Zwischenbehauptung: $(\dagger)$

$$(T^* b)(x) \lesssim \sum_k \int_{Q_k} |K(x-y) - K(x-y_k)|\,|b(y)|\,dy$$

$$+ \underbrace{\sup_{r>0} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} |b(y)|\,dy}_{= Mb}$$

$$\|T^* b\|_{L^{1,\infty}(F^*)} \le \underbrace{\|Mb\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}}_{\|f\|_1} + \underbrace{\int_{F^*} dx \sum_k \int_{Q_k} dy\, |K(x-y) - K(x-y_k)|\,|b(y)|}_{\lesssim \|f\|_1 \text{ (Beweis von Korollar 3.8)}}$$

Δ

Geometrische Beobachtungen zu den Q_k^*:

(i) $Q_k \subseteq Q_k^*$, $|\Omega^*| \le (2\sqrt{d})^d |\Omega|$

(ii) Wenn $x \notin Q_k^* \Rightarrow |x - y_k| > 2|y - y_k|$, $y \in Q_k$

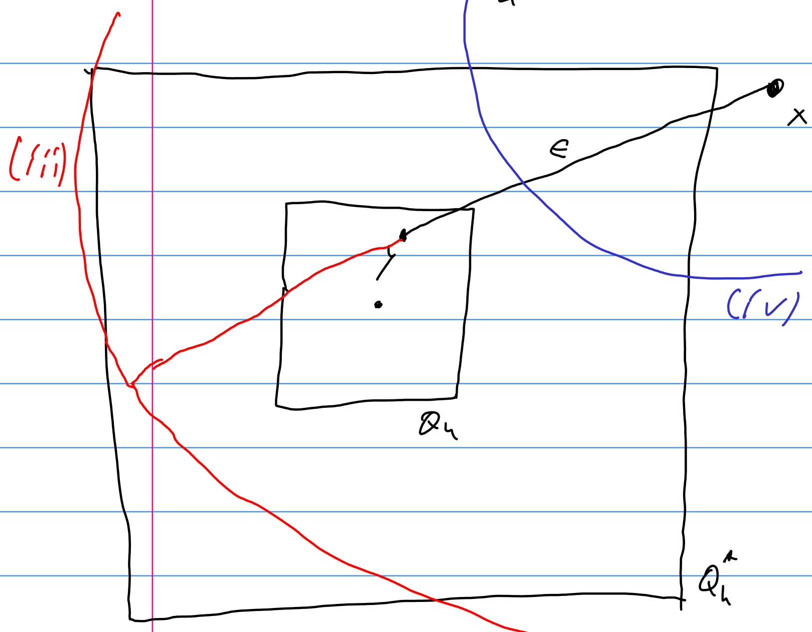
(iii) Angenommen $x \in (Q_n^*)^c$ (also insb. in $F^* = (\Omega^*)^c$)

und angenommen $y \in Q_n$ sodass $|x-y| = \epsilon$ für gegebenes ϵ.

Dann gibt es ein γ_d (unabhängig von ϵ, Q_n), sodass

$$Q_n \subseteq \overline{B_x(\gamma_d \epsilon)}$$

(iv) Unter der Voraussetzung von (iii) gilt auch $|x-y| > \tilde{\gamma}_d \cdot \epsilon$ für ein gewisses $\tilde{\gamma}_d$ (unabhängig von Q_n und ϵ)



(iii) gegeben $x \in (Q_n^*)^c$, $\epsilon > 0$.
Finde y s.d. $|x-y| = \epsilon$
$\Rightarrow$ Finde $\gamma_d > 0$ s.d. $Q_n \subseteq \overline{B_x(\gamma_d \epsilon)}$

$\rightarrow$ „Extremfall" $x \in \partial Q_n^*$, $y \in \partial Q_n$

(iv) Gegeben $\epsilon > 0$ ($x \in (Q_n^*)^c$ ✓): für jedes $\tilde{y} \in Q_n$
$\exists\, \tilde{\gamma}_d$ (unabh. von $\tilde{y}_d$) s.d. $\tilde{y} \in (B_x(\tilde{\gamma}_d \epsilon))^c$,
d.h. $|x - \tilde{y}| > \epsilon \tilde{\gamma}_d$

$\rightarrow$ Jetzt zum Beweis von

$$\sup_{\epsilon > 0} |T_\epsilon f)(x)| \leq \sum_n \int_{Q_n} dy\, |K(x-y) - K(x-y_n)|\, |b(y)| + c \sup_{r > 0} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} |b(y)|\, dy \quad \forall x \in F^*$$

dazu fixiere $x \in F^*$ und $\epsilon > 0$. Dann können drei Fälle eintreten

Fall a) Für alle $y \in Q_h$ ist $|x-y| < \epsilon$

Fall b) Für alle $y \in Q_h$ ist $|x-y| > \epsilon$

Fall c) Es gilt $y \in Q_h$, sodass $|x-y| = \epsilon$

$\rightarrow$ Untersuchung von $(T_\epsilon b)(x) = \sum_h \int_{Q_h} K_\epsilon(x-y)\, b(y)\, dy$

$\rightarrow$ Fall a) $K_\epsilon(x-y) = 0 \rightarrow \int_{Q_h} K_\epsilon(x-y)\, b(y)\, dy = 0$

Fall b) $K_\epsilon(x-y) = K(x-y)$, also

$$\int_{Q_h} K(x-y)\, b_h(y)\, dy \overset{\text{Auslöschungseigenschaft}}{=} \underbrace{\int_{Q_h} \big(K(x-y) - K(x-y_h)\big)\, b_h(y)\, dy}_{\text{taucht in } \Delta \text{ auf S. 30 auf.}}$$

$x \in F^*$, $y \in Q_h$, $|x-y| = \epsilon$

Fall c) $$\left| \int_{Q_h} K_\epsilon(x-y)\, b_h(y)\, dy \right| \le \int_{Q_h \cap B_x(r)} |K_\epsilon(x-y)|\, |b_h(y)|\, dy \overset{(*)}{=}$$

$r = \gamma_d\, \epsilon$ mit geom Beobachtung (iii)

Außerdem: $$|K_\epsilon(x-y)| \overset{\|\Omega\|_\infty \le 1}{\le} \frac{B}{|x-y|^d} \overset{(iv)}{\le} \frac{B}{(\tilde{\gamma}_1 \epsilon)^d}$$

$|x-y| > \tilde{\gamma}_d \cdot \epsilon$

geom. Überlegung

$\gamma_d \sim_d \tilde{\gamma}_d$; $r = \gamma_d \epsilon$

$$\le B \underbrace{\tilde{\gamma}_d^{-d}}_{\left(\frac{\gamma_d}{\tilde{\gamma}_d}\right)^d} \epsilon^{-d} \int_{Q_h \cap B_x(r)} |b(y)|\, dy \le B \left(\frac{\gamma_d}{\tilde{\gamma}_d}\right)^d \cdot r^{-d} \underbrace{\int_{B_x(r)} |b(y)|\, dy}_{\le |S^{d-1}|\, (Mb)(x)}$$

Summation über alle Würfel Q_h und Inbetrachtziehen von der Fälle a) – c) liefert die Behauptung (†) auf S. 30.

c) ✓ b) ✓

a) folgt (mit FAP II) aus (schwachen) L^p-Schranken an T^* sowie

$(T_\epsilon f)(x) \longrightarrow Tf)(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $f \in C_c^1$.

$f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$ $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in C_c^1$, $f_2 \in L^p$, $\|f_2\|_p < \delta$

$(\Lambda f)(x) := |\overline{\lim_{\epsilon \to 0}} (T_\epsilon f)(x) - \underline{\lim_{\epsilon \to 0}} (T_\epsilon f)(x)|$

$\left((\Lambda f)(x) \leq 2(T^* f)(x)\right)$

$(\Lambda f)(x) \leq (\Lambda f_1)(x) + (\Lambda f_2)(x) \Rightarrow \|\Lambda f\|_p \leq \|\Lambda f_1\|_p + \underbrace{\|\Lambda f_2\|_p}_{\lesssim \|f_2\|_p \xrightarrow{\delta \to 0} 0}$

$(\Lambda f_1)(x) \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$

(Thm 26 $T_\epsilon f_1(x) \longrightarrow T_\epsilon f_1(x)$ glm. $\Rightarrow \Lambda f_1(x) \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$

$\uparrow$
C_c^1

$\Rightarrow \|\Lambda f_1\|_p \to 0$

$\Rightarrow \Lambda f = 0$ fast überall

$\Rightarrow \lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f$ existiert fast überall. $\square$

$\Rightarrow$ Hilberttransformation: H ist L^p-beschr.

$Hf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y| > \epsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$ existiert punktweise fast überall.

Analog für die Riesztransformation $-i \frac{\xi_j}{|\xi|}$

$L^p(\mathbb{R}^d : \mathbb{C}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^d : \ell^2)$

$\mathbb{C} \to \ell^q \qquad L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{R}^d; \ell^q)$ 24.06.2020

$q = 2$

1) $T : L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{H}) \to L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{H})$

singuläre Integralops Hilbertraum

2) $T: L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \Rightarrow T : L^p(\mathbb{R}^d; \ell^2)$

$\to L^q(\mathbb{R}^d; \ell^2)$

allgemeine lin. Ops

3.7 Vektorwertige Analoga (→ für Details auch Grafakos Abs. 5.6) (hier: Stein)

Die Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich verallgemeinern für Funktionen, die ihre Werte in Hilberträumen ($\mathbb{C}$, ℓ^2, ...) annehmen

Kleiner Überblick über Integrationstheorie

$\mathcal{H}$ ... separabler Hilbertraum

$f : \mathbb{R}^d \to \mathcal{H}$ heißt $\mathcal{H}$-messbar $\Leftrightarrow$ die skalarwertige Funktion

$\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$
$x \mapsto \langle f(x), \varphi \rangle_{\mathcal{H}}$ ist $\mathbb{C}$-messbar (bzgl. Lebesgue-Maß)

für alle $\varphi \in \mathcal{H}$

$f = \mathbb{C}^2 \quad \left\langle \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right\rangle$ φ

$= \varphi_1 f_1(x) + \varphi_2 f_2(x)$

- Für $\mathcal{H}$-messbares f ist $\underbrace{|f(x)|_{\mathcal{H}}}_{:= \langle f(x), f(x) \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2}}$ $\mathbb{C}$-messbar

- $L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{H})$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von $\mathcal{H}$-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft, dass die Norm

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{H})} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} dx \; |f(x)|_{\mathcal{H}}^p \right)^{1/p} < \infty \qquad 1 \le p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess-sup} \, |f(x)|_{\mathcal{H}} < \infty, \qquad p = \infty$$

$\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ... Banachraum aller linearen beschränkten Operatoren zwischen den Hilberträumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$

$f: \mathbb{R}^d \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ heißt messbar, wenn

$f(x)\varphi$ ist $\mathcal{H}_2$-messbar für alle $\varphi \in \mathcal{H}_1$.

In diesem Fall ist $|f(x)|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)}$ $\mathcal{L}$-messbar

und wir können $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2))$ wie zuvor definieren.

- Die üblichen Eigenschaften der Faltung bleiben erhalten.

$\mathcal{H}_2 \Downarrow \angle \mathcal{H}_1$ z.B. $K(x) \in L^q(\mathbb{R}^d : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2))$ und $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^d : \mathcal{H}_1)$

Dann $\overset{\mathcal{H}_2}{\Downarrow}\, g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \overbrace{K(x-y) f(y)}^{\in \mathcal{H}_2} \, dy$ konvergiert in $|\cdot|_{\mathcal{H}_2}$-Norm

für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und

$$|g(x)|_{\mathcal{H}_2} \leq \int_{\mathbb{R}^d} |K(x-y)|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)} |f(y)|_{\mathcal{H}_1} \, dy$$

$$\|g\|_{L^r(\mathbb{R}^d : \mathcal{H}_2)} \leq \|K\|_{L^q(\mathbb{R}^d : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2))} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d : \mathcal{H}_1)}$$

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

- Fouriertransformation $f \in L^1(\mathbb{R}^d : \mathcal{H})$

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) \, dx$$

$\Rightarrow \hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d : \mathcal{H})$

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d; \mathcal{H}) \cap L^2(\mathbb{R}^d; \mathcal{H})$ gilt

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d; \mathcal{H})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d; \mathcal{H})}$$

Mit Stetigkeit kann die FT eindeutig zu einer unitären Abbildung auf $L^2(\mathbb{R}^d; \mathcal{H})$ fortgesetzt werden.

Im Folgende sind $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ zwei gegebene Hilberträume, $f(x)$ eine Funktion mit Werten in $\mathcal{H}_1$ und $K(x)$ nimmt Werte in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ an. Dann nimmt $(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y) f(y)\, dy$, wann immer definiert, Werte in $\mathcal{H}_2$ an.

Thm 3.14 Die Ergebnisse dieses Kapitels, also Thm 3.7, Cor 3.8, Thm 3.9, Thm 3.11, Thm 3.13 behalten ihre Gültigkeit in diesem allgemeineren Kontext, wann immer f seine Werte in $\mathcal{H}_1$, K seine Werte in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ und (Tf) und $(T_\varepsilon f)$ seine Werte in $\mathcal{H}_2$ annehmen und der Absolutbetrag in $\mathbb{C}$, $|\cdot|_{\mathbb{C}}$, ersetzt wird durch die Hilbertraumnorm $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$, $|\cdot|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)}$ oder $|\cdot|_{\mathcal{H}_2}$ ersetzt werden.

Bemerkungen 1) Dieses Thm ist kein Korollar aus den vorigen Thme aber der Beweis verwendet dieselben Argumente wie im skalarwertigen Fall (→ Grafakos Abs 5.6)

2) Die finalen Schranken an $\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{H}_2)}$ hängen, wie im skalarwertigen Fall, nur von B (Schranken an den Integralkern), p und d ab und sind unabhängig von $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$

3) Die meisten Argumente gehen auch für Banachraum-wertige Funktionen durch (wenn geeignet definiert) (z.B. schwache L^1-Beschränktheit von T)

Allerdings hilft die Hilbertraumstruktur, um folgendes Korollar zu erhalten.

<u>Korollar 3.15</u> Seien die Annahmen aus Thm 3.14 erfüllt sowie

$$\|Tf\|_2 = c\|f\|_2, \quad c>0, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d : \mathcal{H}_1).$$

In diesem Fall gilt die umgekehrte L^p-Schranke

$$\|f\|_p \le A_p' \|Tf\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d : \mathcal{H}_1) \quad 1<p<\infty$$

Das Korollar greift insbesondere für Integraloperatoren mit Kern $\frac{\Omega(x)}{|x|^d}$; die Bedingung $\|Tf\|_2 = c\|f\|_2$ bedeutet

dann, dass $m(\xi)$ (der Fouriermultiplikator), konstanten Betrag haben muss. $\|Tf\|_2 = \|m(\xi)\hat{f}\|_{L^2}$

<u>Bsp</u> Hilbert-Transformation $m(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)$
Riesz-Transformation $m(\xi) = -i\,\xi_j / |\xi|$

<u>Beweis</u> (Mittels Dualität)

Zunächst sind $L^2(\mathbb{R}^d : \mathcal{H}_j)$ wieder Hilberträume mit dem inneren Produkt

Skalarprod in $L^2(\mathbb{R}^d : \mathcal{H}_j)$ Skalarprodukt in $\mathcal{H}_j$

$$(f, g)_j := \int_{\mathbb{R}^d} dx \, \langle f(x), g(x) \rangle_{\mathcal{H}_j}$$

$\|Tf\|_2^2$
$= \langle f, \tilde{T}^* T f \rangle$

Da T ein beschränkter linearer Operator zwischen $L^2(\mathbb{R}^d : \mathfrak{h}_1)$ und $L^2(\mathbb{R}^d : \mathfrak{h}_2)$ ist, gibt es genau einen adjungierten Operator $\tilde{T} : L^2(\mathbb{R}^d : \mathfrak{h}_2) \to L^2(\mathbb{R}^d : \mathfrak{h}_1)$, der

$$(f_2, T f_1)_2 = (\tilde{T} f_2, f_1)_1 \qquad f_j \in L^2(\mathbb{R}^d : \mathfrak{h}_j)$$

Bemerke, dass die Annahme $\|Tf\|_2^2 = c^2 \|f\|_2$

äquivalent ist zu (mittels Polarisation)

$$\underset{\|}{(Tf, Tg)_2} = \underline{c^2 (f, g)} \qquad f, g \in L^2(\mathbb{R}^d : \mathfrak{h}_1)$$

$$\underline{(f, \tilde{T} T g)_1}$$

$\|T\| = \|T^*\|$
$= \|TT^*\|^{1/2}$
$= \|T^*T\|^{1/2}$

$$\Rightarrow \quad \tilde{T} T g = c^2 g \qquad \forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^d : \mathfrak{h}_1)$$

Als Nächstes sieht man, dass $\tilde{T}$ wieder ein Integraloperator ist, der $\mathfrak{h}_2$-wertige Funktionen auf $\mathfrak{h}_1$-wertige Funktionen abbildet mit Integralkern

$$\tilde{K}(x) = K^*(-x)$$ wobei $*$ bedeutet Adjungieren

In $\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$

$$\langle \underset{\in \mathfrak{h}_2}{\psi}, \overset{\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) \ni}{S} \underset{\in \mathfrak{h}_1}{\varphi} \rangle_{\mathfrak{h}_2} = \langle \underset{\in \mathcal{B}(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1)}{S^*} \psi, \varphi \rangle_{\mathfrak{h}_1}$$

$$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 = \mathbb{C}: \quad \langle g, Sf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})} = \int \overline{g(x)}\, \underline{k_S(x-y)}\, f(y)\, dy\, dx$$
$$= \langle S^* g, f \rangle \doteq \int \overline{k_S(-(y-x))}\, g(x)\, f(y)\, dy$$

bel. $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$: $(g, Sf)_2 = \int dx\, \langle g(x), (Sf)(x) \rangle_{\mathfrak{h}_2}$

$$= \int dx \int dy\, \langle g(x), K(x-y) f(y) \rangle_{\mathfrak{h}_2}$$

$$= \int dx\, dy\, \langle K^*(-(y-x))\, g(x), f(y) \rangle_{\mathfrak{h}_1}$$

$\|\tilde{T}\| = \|T\|$ $\qquad = \int dy \; \langle S^* g(x), f(x) \rangle_{\mathcal{H}_1} = (\tilde{S} g, f)$

Schließlich beobachtet man, dass $K^*(-x)$ dieselben Bedingungen wie $K(x)$ erfüllt $\Rightarrow$ es gelten dieselben Folgerungen für den zugehörigen Integraloperator $\tilde{T}$, d.h. $\tilde{T}$ ist $L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1))$ - beschränkt;

$\tilde{T} T f = c^2 f$ das heißt

$$c^2 \|f\|_p = \| \tilde{T} T f \|_{L^p(\mathbb{R}^d : \mathcal{H}_1)} \overset{\text{Thm } 3.14}{\leq} A_p \| T f \|_{L^p(\mathbb{R}^d : \mathcal{H}_2)}$$

$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d : \mathcal{H}_1)} \leq A_p' \, \| Tf \|_{L^p(\mathbb{R}^d : \mathcal{H}_2)} \quad \text{mit } A_p' = \frac{A_p}{c^2}$$

$\square$

25.6.2020

3.8 Vektorwertige Ungleichungen - Theorem von Marcinkiewicz - Zygmund

Beispiel $T : L^p(X, \mu) \to$ messbare Funktionen auf (Y, ν)

$$\| (\sum_j |T f_j|^2)^{1/2} \|_{L^p} \leq \| (\sum |f_j|^2)^{1/2} \|_{L^p} \, . \quad (*)$$

$L^p(X, \ell^2)$.

$$\| (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \|_{L^p(X, \ell^2)} = \left(\int \left(\sum_j |f_j(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2} \cdot p} d\mu(x) \right)^{1/p}$$

zugehöriger linearer Operator $\vec{T}$ $\quad (\underline{T})$

$$\vec{T}((f_j)_j) = (T f_j)_{j \in \mathbb{N}}$$

(*) ist äquivalent zu

$$\| \vec{T}(f_j)_j \|_{L^p(X,\ell^2)} \lesssim \| (f_j)_{j\in\mathbb{N}} \|_{L^p(X,\ell^2)}$$

$T: L^p(X:\mathbb{C}) \to L^p(X:\mathbb{C})$ / $\vec{T}: L^p(X,\ell^2) \to L^p(X,\ell^2)$

keine Translationsinvarianz vorausgesetzt

Thm 3.16 (Marcinkiewicz-Zygmund)

Seien $0 < p, q < \infty$ (X,μ), (Y,ν) σ-endliche Maßräume

a) Angenommen $T: L^p(X,\mu) \to L^q(Y,\nu)$ beschränkter, linearer Operator mit Operatornorm $\|T\|_{p,q} = N$

Dann hat T eine ℓ^2-wertige Erweiterung, d.h. für alle komplexwertigen $f_j \in L^p(X)$ gilt

$$\Big\| \Big(\sum_j |(Tf_j)(x)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(Y)} \leq C_{p,q} \cdot N \Big\| \Big(\sum |f_j|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(X)}$$

für gewisses $C_{p,q}$ mit $C_{p,q} = 1$ falls $p \leq q$.

b) Angenommen $T: L^p(X,\mu) \to L^{q,\infty}(Y,\nu)$ beschränkt, linear mit Operatornorm $\|T\|_{L^p \to L^{q,\infty}} = M$. Dann

gilt $\| (\sum |Tf_j|^2)^{1/2} \|_{L^{q,\infty}(Y)} \leq D_{p,q} \cdot M \| (\sum |f_j|^2)^{\frac{1}{p}} \|_{L^p(X)}$

für ein $D_{p,q}$ (→ sh. Beweis)

Für den Beweis brauchen wir eine Verallgemeinerung des Gauß-Integrals

$$\left(\int e^{-\langle x, Ax \rangle} dx \sim \frac{\pi}{\sqrt{\det A}} \right)$$

Lemma 3.17 Für $0<r<\infty$ seien $A_r = \left(\frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\pi^{(r+1)/2}}\right)^{1/r}$

$\int_{\mathbb{R}} F(|t|)\, G(t)\, dt$ $\qquad$ $F(|d_1 x_1 + \dots + d_d x_d|)$ $\qquad$ $\prod_j G(x_j) = G(|x|)$

$\int_{\mathbb{R}} G(t)\, dt$ $\qquad$ $B_r = \left(\frac{\Gamma(\frac{r}{2}+1)}{\pi^{r/2}}\right)^{1/r}$.

mit Eigenschaft, dass Homogenität berücksichtigt wird

Dann gilt $d_1, \dots d_d \in \mathbb{R}$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |d_1 x_1 + \dots + d_d x_d|^r e^{-\pi|x|^2} \underbrace{dx}_{dx_1 \dots dx_d}\right)^{1/r} = A_r \left(d_1^2 + \dots + d_d^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ähnlich gilt für $w_1 \dots w_d \in \mathbb{C}$

$$\left(\int_{\mathbb{C}^d} |w_1 z_1 + \dots + w_d z_d|^r e^{-\pi|z|^2} \underbrace{dz}_{dz_1 \dots dz_d}\right)^{1/r} = B_r \left(|w_1|^2 + \dots + |w_d|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$dz = dx\, dy$

$z = x + iy$.

Beweis Wg Homogenität oBdA $d_1^2 + \dots + d_d^2 = 1$.

Sei $A \in O(d)$ eine orthogonale $d \times d$-Matrix sodass

$$A(d_1, \dots d_d)^t = \hat{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \Rightarrow (Ax)_1 = \langle e_1, Ax\rangle = \langle A^* e_1, x\rangle = d_1 x_1 + \dots + d_d x_d$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |d_1 x_1 + \dots + d_d x_d|^r e^{-\pi|x|^2} dx =$$

$\langle x, x\rangle$

$$\overset{x \mapsto Ax = y}{=} \int_{\mathbb{R}^d} dy\, |y_1|^r \underbrace{e^{-\pi|y|^2}}_{e^{-\pi(|y_1|^2 + \dots + |y_d|^2)}} = 2\int dy_1\, y_1^r\, e^{-\pi y_1^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|y_j|^2} dy_j = 1$$

$$\overset{y \mapsto \sqrt{y}}{=} \int_0^\infty dt\, t^{\frac{r}{2} - \frac{1}{2}} e^{-\pi t} = \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\pi^{\frac{r+1}{2}}} = A_r^r$$

Beweis des zweiten Integrals analog

$$\int_{\mathbb{C}} |y_1|^r e^{-\pi |y_1|^2} dy_1 \underset{\text{Polarkoord}}{=} 2\pi \int_0^\infty t^r e^{-\pi t^2} t\,dt$$

$$\overset{t \mapsto \sqrt{t}}{=} \ldots = \frac{\Gamma(\frac{r}{2}+1)}{\pi^{\frac{r}{2}+1}} = B_r^r .$$

$\boxtimes$

Beweis von Thm 3.16 ($A_r \to T$: nimmt reellwertige Fkten auf reellwertige)

a) Zunächst $p > q$. B_r wie in Lemma 3.16, $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ wie in Annahme. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^n |T f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^q(Y)}^q$$

$$\overset{\text{Lemma 3.16}}{=} (B_q)^{-q} \int_Y d\nu(y) \int_{\mathbb{C}^n} dz \; |z_1 Tf_1 + \ldots + z_n Tf_n|^q \; e^{-\pi |z|^2}$$

$$= (B_q)^{-q} \int_{\mathbb{C}^n} dz \; e^{-\pi|z|^2} \int_Y d\nu(y) \; |T(z_1 f_1 + \ldots + z_d f_d)|^q$$

$e^{-\pi|z|^2} = e^{-\pi|z|^2 (\frac{1}{r} + \frac{1}{r'})}$

$$\overset{T: L^p \to L^q}{\leq} (B_q)^{-q} N^q \int dz \; e^{-\pi|z|^2} \left(\int_X d\mu(x) \; |z_1 f_1 + \ldots + z_d f_d|^p \right)^{q/p}$$

$$\overset{\text{Holder}}{\leq} (B_q)^{-q} N^q \left(\int_{\mathbb{C}^d} dz \int_X d\mu(x) e^{-\pi|z|^2} \; |z_1 f_1 + \ldots + z_d f_d|^p \right)^{q/p}$$

$$\overset{\text{Lemma 3.16}}{=} (B_q)^{-q} N^q \left(B_p^p \int d\mu(x) \left(\sum |f_j(x)|^2 \right)^{p/2} \right)^{q/p}$$

$$= (B_p / B_q)^q N^q \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^q \qquad \text{jetzt } n \to \infty.$$

mit $C_{pq} = B_p / B_q$

Für $p \le q$ verwenden wir Minkowski statt Hölder

$$N_q B_q^{-q} \int_{\mathbb{C}^n} dz\, e^{-\pi|z|^2} \left(\int d\mu(x)\, |z_1 f_1 + \dots + z_n f_n|^p \right)^{q/p}$$

$$= N_q B_q^{-q} \left\| \int d\mu(x)\, |z_1 f_1 + \dots z_n f_n|^p \right\|^{q/p}_{L^{q/p}(\mathbb{C}^n : e^{-\pi|z|^2} dz)}$$

$$\overset{\text{Minkowski}}{\le} N_q B_q^{-q} \left(\int d\mu(x)\, \| |z_1 f_1 + \dots z_n f_n|^p \|_{L^{q/p}(\mathbb{C}^n : e^{-\pi|z|^2} dz)} \right)^{\frac{q}{p}}$$

$$= (N_q / B_q)^q \left(\int d\mu(x) \left(\int_{\mathbb{C}^n} dz\, e^{-\pi|z|^2} |z_1 f_1 + \dots z_n f_n|^q \right)^{p/q} \right)^{q/p}$$

$$\overset{\text{Lemma 3.16}}{=} (N_q / B_q)^q \left(\int d\mu(x)\, (B_q)^p \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{p/2} \right)^{q/p}$$

$$= N_q^q \left\| \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^q, \quad n \to \infty$$

b) Wir verwenden a) und die Abschätzungen aus Thm 1.218

$$\|g\|_{L^{q,\infty}} \le \sup_{\substack{E \subseteq \Omega \\ \text{messbar}, |E| < \infty}} \nu(E)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \left(\int_E |g(x)|^r \right)^{1/r} \le \left(\frac{q}{q-r} \right)^{1/r} \|g\|_{L^{q,\infty}}$$

$0 < r < q$.

$$\Rightarrow \left\| \left(\sum |Tf_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{q,\infty}} \le \sup_E \nu(E)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \left(\int_Y d\nu(y) \left| \sum |\mathbb{1}_E T f_j|^2 \right|^{r/2} \right)^{1/r}$$

$T : L^p \to L^{q,\infty}$

$$\overset{a)}{\le} \sup \nu(E)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \| \mathbb{1}_E T \|_{L^p \to L^r}\, C_{pr} \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

$$\overset{!}{\le} D_{p,q} M \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \quad \text{mit } D_{pq}^{(r)} = C_{pr} \left(\frac{q}{q-r} \right)^{1/r}$$

Für $f \in L^p(X, \mu)$ $\quad \nu(E)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \| \mathbb{1}_E T f \|_{L^r} \le \left(\frac{q}{q-r} \right)^{\frac{1}{r}} \|Tf\|_{L^{q,\infty}}$

$$\le \left(\frac{q}{q-r} \right)^{1/r} M \|f\|_{L^p} \qquad \boxed{\Xi}$$