13.5.2020

2 Maximalfunktionen & Überdeckungslemmata

Motivation $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

<u>Lebesgue</u> $\lim\limits_{R \to 0} \frac{1}{|B_x(R)|} \int_{B_x(R)} f(y)\,dy = f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$!

Um den Grenzwert untersuchen zu können, ersetzen wir "lim" durch "sup" und studieren das <u>quantitative</u> Analogon, die <u>Hardy-Littlewood-Maximalfunktion</u>

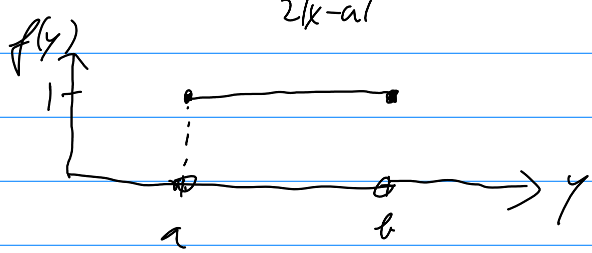
$$(Mf)(x) := \sup_{R>0} \frac{1}{|B_x(R)|} \int_{B_x(R)} |f(y)|\,dy$$

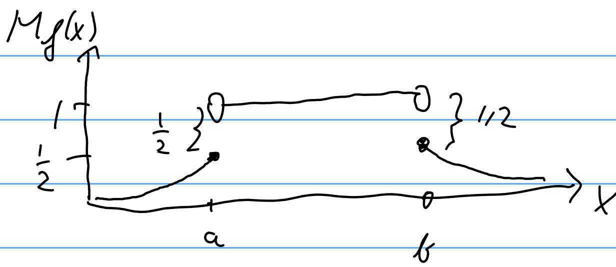
$$= \sup_{R>0} \frac{1}{|B_x(R)|} |f| * \mathbb{1}_{B_x(R)}$$

(Hausaufgabe) $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ mit $-\infty < a < b < \infty$

$$\frac{|B_x(R) \cap [a,b]|}{|B_x(R)|} \qquad (Mf)(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{2|x-b|} & x \leq a \\ 1 & a < x < b \\ \frac{b-a}{2|x-a|} & x \geq b \end{cases}$$

mit $|B_x(R)| = 2R$ hier





Seien (X,μ), (Y,ν) Maßräume $0 < p \leq \infty$, $q \in (0,\infty)$

Sei D eine dichte Teilmenge von $L^p(X,\mu)$ (C_c^∞, $\mathcal{S}$, ..) und T_ϵ ist eine Familie linearer Operatoren die auf L^p definiert sind und Werte in den messbaren Fkten in Y haben

[z.B. $e^{i\epsilon\Delta}$] [$e^{i\epsilon\Delta} f \overset{?}{\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow}} f$]

Sei T_* der zugehörige (sublineare) Maximaloperator

sh Krantz

$$(T_* f)(x) := \sup_{\epsilon>0} |T_\epsilon f)(x)|$$

FAP II: <u>Theorem 2.1</u> Seien $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, T_ϵ, T_* wie oben.

Voraussetzung (1) $\|T_* f\|_{L^{q,\infty}} \leq B \|f\|_{L^p}$ für ein $B>0$ und alle $f \in L^p$.

(2) $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f(x) = Tf(x)$ existiert und ist endlich fast überall für einen Operator T, zunächst auf D definiert, $f \in D$.

$\Rightarrow$ Für alle $f \in L^p(X,\mu)$ existiert der Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f$ fast überall und ist endlich und definiert einen linearen Operator auf L^p (der eindeutig T von D auf L^p fortsetzt) für welche gilt

$$\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f(x) = Tf(x) \text{ und}$$

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}} \leq B \|f\|_{L^p}.$$

<u>Beweis</u> Hausaufgabe (vgl mit Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)

Bemerkung Erinnerung: Das Prinzip der glm Beschränktheit (FAP I) sagt das Folgende.

Sei X Banach und D dichte Teilmenge von X
$T_\epsilon : X \to X$ lineare Operatoren
T linearer Operator, zuerst auf D definiert

Um $T_\epsilon f \xrightarrow[\|\cdot\|]{\epsilon\to 0} Tf$ für alle $f \in X$ zu haben,

ist es notwendig und hinreichend, dass

(1) $\|T_\epsilon f\|_X \lesssim \|f\|_X \quad \forall \epsilon > 0,\ f \in X$
und (2) $T_\epsilon f \to Tf \quad f \in D$.

Thm 2.2 (Steinsches Maximalprinzip)

Sei G eine kompakte Gruppe (zB $SO(2)$), X ein homogener Raum über G mit endlichem Haarmaß μ, $1 \le p \le 2$
$T_\epsilon : L^p(X) \to L^p(X)$ beschränkte lineare Operatoren, die mit Translationen kommutieren sodass $T_\epsilon f$ punktweise fast überall konvergiert für alle $f \in L^p(X)$.
Dann $T_* f \in L^{p,\infty}$

Gegenbsp in $\mathbb{R}$: $(T_n f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x-y) f(y)\,dy$ auf L^1 für Thm 2.1

Dann: $T_n f \to 0$ f.ü. für $f \in L^1$

und $\|T_n f\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{L^1}$ gleichmäßig in n

aber $T_* f \notin L^{1,\infty}$.

Thm 2.2 schlägt tatsächlich für $p>2$ und nicht-kompakte G fehl
$\rightarrow$ Carbery – Rubio de Francia – Vega (1988) über
pktweise Konvergenz von Bochner – Riesz

Beispiele von Maximaloperatoren
• M Hardy-Littlewood.
$\hookrightarrow$ (Korrelationsungleichungen, DFT) $\langle \Psi, \sum_{1\le i<j\le N} \frac{1}{|x_i - x_j|} \Psi \rangle \geq D[\rho_\Psi]$, $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$

$(\Psi \in L^2_{a,s})$

$\rho_\Psi(x) = N \int |\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N)|^2 dx_2\, dx_3 \ldots dx_N - \text{const} \int \rho_\Psi^{4/3}(x)dx$
ρ_Ψ: 1-Teilchendichte (Lieb)
const hängt von A ab

$(M: L^p \to L^p \quad (p = 4/3))$

$(\|Mf\|_{4/3} \le A \|f\|_{4/3})$

• $e^{-t\sqrt{-\Delta}}$ Poissonkern

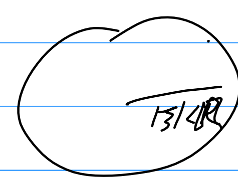
• $\underline{e^{it(-\Delta+V)}}$ Schrödinger ($t \to 0$ pktweise Konv.?)

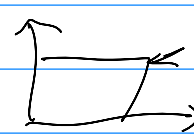
$BR_R \in H^s_{loc}(\mathbb{R})$, $\delta > s - \frac{1}{2}$

• $BR_R\left(1 - \frac{D^2}{R^2}\right)_+^\delta$ Bochner-Riesz
$\delta \ge 0$, $R > 0$ Folgenparameter
$D = -i\nabla$, $D^2 = -\Delta$

$\delta(p)$?
$(\delta(p) = \max\{n \mid \frac{1}{2} - \frac{1}{p}| - \frac{1}{2}, 0\}$

$f(x) = \int e^{ix\cdot\xi} \underline{\hat{f}(\xi)}$





$\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi) \cdot \mathbb{1}_{[0,R]}(|\xi|)\right) \xrightarrow{R\to\infty} f$

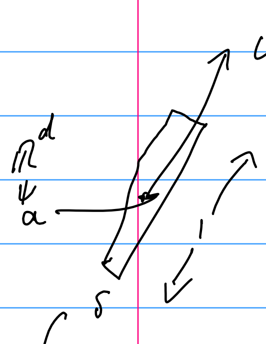
in welchem Sinn?
(pktweise?, L^p)

$\underline{\text{nur}}$ wenn $p = 2$
(Fefferman 1971)

Bochner – Riesz kann auch für allgemeine s.a. Operatoren betrachtet werden (wo ξ (Frequenz) durch den Spektralparameter ersetzt wird)

Mannigfaltigkeit

Beispiele: $-\Delta + V$, $\sqrt{-\Delta} + V$, $-\Delta$ auf M



• Kakeya-Maximalfunktion

Fkt von ω!

$$f^*_\delta(\omega) \equiv \sup_{a\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_\omega^\delta(a)|} \left(\mathbb{1}_{T_\omega^\delta(a)} * |f|\right)(\omega)$$ für festes $\delta > 0$

$\overset{??}{\Longrightarrow} \|f^*_\delta\|_d \lesssim \delta^{-\varepsilon}\|f\|_d$

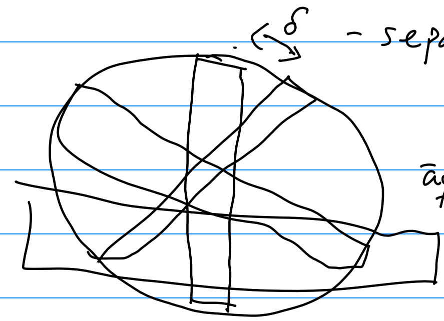
$T_\omega^\delta(a)$ … Tube wie im Bild

($0 < \delta \ll 1$

$\underbrace{\delta \times \delta \times \dots \delta}_{d-1 \text{ mal}} \times 1$ - Tube

$\Omega \subseteq S^{d-1}$

→ δ-separierte Richtungen



(~~dw~~ $\sin\theta \sim \theta \sim \delta^{1/2}$)

äquivalent zu Kakeya-Maximalvermutung

$\Rightarrow \left\| \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{1}_{T_\omega} \right\|_{L^q}^q \lesssim \delta^{d-1} \cdot (\#\text{Tuben})^{q - \frac{1}{d-1}}$

$(q > \frac{d}{d-1})$

→ Frage: „Kann die Dreiecksungleichung geschlagen werden?"

Zurück zu Hardy-Littlewood!

Theorem 2.3 Sei f eine gegebene Fkt auf $\mathbb{R}^d$

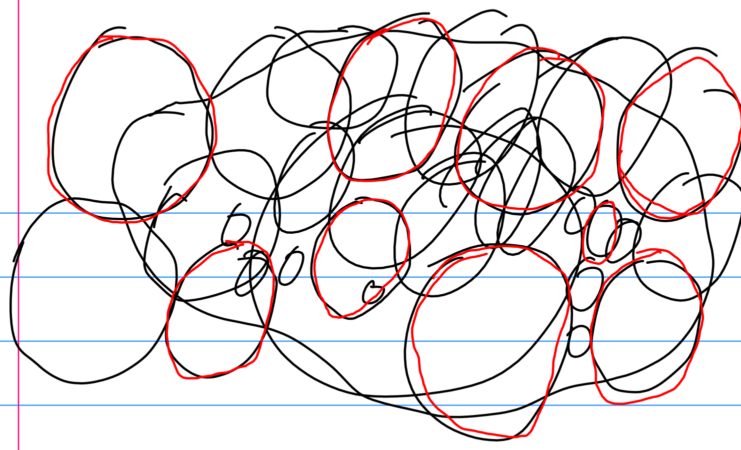
a) Wenn $f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$, dann ist $Mf < \infty$ f.ü.

Konstanten in b), c) hängen von der Konstanten in Vitalis Lemma (unten) ab und wachsen monoton in d →

b) Wenn $f \in L^1$, dann $\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \le c_d \|f\|_{L^1}$

c) Wenn $f \in L^p$, $1 < p \le \infty$ $\|Mf\|_p \le c_d \|f\|_{L^p}$.

Bemerkung/Hausaufgabe: M ist nicht $L^1 \to L^1$-Beschränkt



→ können stark überlappen (im Prinzip)

blase diese Auswahl von Kugeln auf → überdecken E wieder!

Theorem 2.4 (Vitali)

Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ messbar und überdeckt durch eine Familie von Kugeln $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\operatorname{diam} B_j < \infty$.

Dann können wir aus dieser Familie eine disjunkte Teilfolge $\{B_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (endlich oder unendlich), sodass

$$\sum_k |B_{j_k}| \geq c_d |E| \qquad (c_d = 5^{-d} \text{ funktioniert bspw.})$$

Beweis Unter Missbrauch d. Notation nennen wir die gewählte Teilfolge B_k (statt B_{j_k})

k... gewählte Bälle

(Algorithmus nicht eindeutig!)

j... alle Bälle

B_1 wird so gewählt, dass $\operatorname{diam} B_1 \geq \frac{1}{2} \sup_{j \neq 1} \operatorname{diam} B_k$

... angenommen wir hätten die B_k gewählt.
Dann wählen wir B_{k+1} aus der ursprünglichen Familie so, dass $B_{k+1} \cap B_k = \emptyset$ und

$$\operatorname{diam} B_{k+1} > \frac{1}{2} \sup_j \{\operatorname{diam}(B_j) : B_j \text{ disjunkt von gewählten } B_k\}$$

Prinzipiell könnte diese Folge endlich sein und abbrechen, nämlich, wenn keine Kugeln aus der ursprünglichen Familie mehr vorhanden sind, die disjunkt von den gewählten B_k sind.

→ ~~Jetzt~~ stellen sich zwei Fälle

(i) $\sum_k |B_k| = \infty \Rightarrow$ fertig (egal, ob $|E| = \infty$ oder nicht)

(ii) $\sum_k |B_k| < \infty$.

Sei B_k^* der 5-dilatierte von B_k.
($\operatorname{diam} B_k^* = 5 \operatorname{diam} B_k$)

Wir behaupten $E \subseteq \bigcup_k B_k^*$ (∗)

$$\left(\to \text{bemerke } \left|\bigcup B_k^*\right| \leq 5^{-d} \left|\bigcup B_k\right| = 5^{-d} \sum |B_k| \right)$$
→ fertig

Um (∗) zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass jeder B_j aus der ursprünglichen Folge in $\bigcup_k B_k^*$ enthalten. (B_j nicht aus gewählter Teilfolge, denn dieser Fall wäre trivial)

Da $\sum |B_k| < \infty \Rightarrow |B_k| \xrightarrow{k\to\infty} 0$, $\operatorname{diam} B_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Für festes j wählen wir die ersten k Kugeln aus der gewählten Teilfolge so, dass

- $\operatorname{diam} B_j > 2 \operatorname{diam} B_{k+1}$

$\Rightarrow B_j$ schneidet mindestens einen der ersten B_k
z.B. die Kugel B_{j_0}, $j_0 \in \{1, \dots k\}$, d.h.

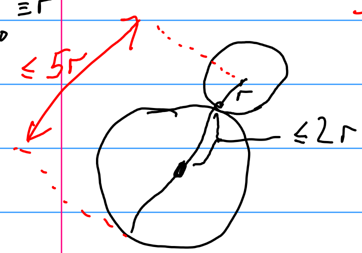
$\operatorname{diam} B_{j_0} \geq \frac{1}{2} \operatorname{diam} B_j$.

Aus der geometrischen Überlegung (Bild), gilt dann sicherlich $B_j \subseteq (B_{j_0})^*$. $\boxtimes$

$2 \operatorname{diam} B_{j_0} \geq \operatorname{diam} B_j \geq 2 \operatorname{diam} B_{k+1}$

$\operatorname{rad} B_{j_0} = r$

5-dilatieren genügt



14.5.2020

Baby-Version von Vitali

Sei $\{B_1, \dots, B_k\}$ eine endliche Familie von Kugeln in $\mathbb{R}^d$. Dann $\exists$ endliche Teilfamilie $\{B_{j_1}, \dots, B_{j_\ell}\}$ von paarweise disjunkten Kugeln, sodass

$$\sum_{r=1}^{\ell} |B_{j_r}| \geq 3^{-d} \left| \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right|$$

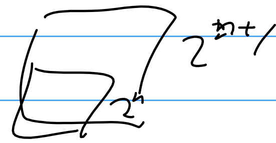
Dyadische Version von Vitali.

$\sim 2^n$

Ein dyadischer Würfel der n-ten Generation ist eine Menge der Form

$$Q_{n,k} := 2^n (k + [0,1)^d) = \{ 2^n (k+x) : x \in [0,1)^d \}$$
$$n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}^d$$

-> Wenn zwei Würfel überlappen, dann enthält einer den anderen (nesting)



Dyadisches Vitali-Lemma: Seien $Q_1, \dots, Q_N$ dyadische Würfel

Dann gibt es eine Teilfamilie $Q_{n_1}, \dots, Q_{n_k}$ von disjunkten dyadischen Würfeln, sodass

$$Q_{n_1} \cup \dots \cup Q_{n_k} = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$$

dyadische Maximalfunktion

$$(M_\Delta f)(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\,dy$$

dyadischer Würfel

$$\Rightarrow \|M_\Delta f\|_{L^{1,\infty}} \le \|f\|_1 , \quad \|M_\Delta f\|_p \le \|f\|_p$$

Konstante=1 ! $\quad p \in (1, \infty]$

Beweis von Thm 2.3

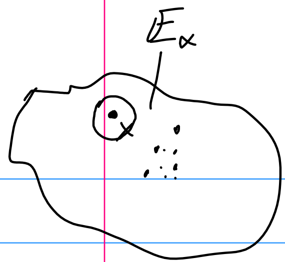
1) (z.z. $\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|f\|_1$ $\quad \alpha\, d_{Mf}(\alpha) \lesssim \|f\|_{L^1}$
$\alpha > 0$

$d_{Mf}(\alpha) = |E_\alpha|$, $\quad E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$

(E_α ist offen.)

$\forall x \in E_\alpha$ finden wir eine Kugel B_x, sodaß

$$\int_{B_x} |f|\,dy \ge \alpha \cdot |B_x| \qquad (*)$$



Aus (*) folgt bereits $\|f\|_{L^1} \geq \alpha |B_x|$, $x \in E_\alpha$, $\alpha > 0$.

Andererseits: wenn x durch E_α läuft, dann überdeckt die Vereinigung der entsprechenden Kugeln (die B_x) ganz E_α (die massiv überlappen)

→ Vitali: erlaubt uns eine Teilfolge $\{B_k\}$ zu extrahieren, disjunkt

$$\sum_k |B_k| \geq 5^{-d} |E_\alpha| = 5^{-d} d_{Mf}(\alpha)$$

⇒ Kombiniere mit (*) (über k summieren)

$$\|f\|_1 \geq \int_{\bigcup_k B_k} |f| \overset{(*)}{\geq} \alpha \sum |B_k| \geq 5^{-d} \alpha \, d_{Mf}(\alpha)$$

✓

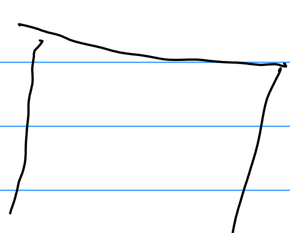
(insbesondere folgt auch (a) für $p=1$)

a) + c) Interpoliere $\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \leq 5^{-d} \|f\|_1$

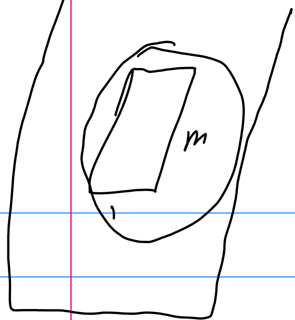
mit $\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_\infty$

$$\Rightarrow \quad \|Mf\|_p \leq \frac{p \cdot 5^{d/p}}{p-1} \|f\|_p$$

Bemerkungen 2.5



Vitalis Lemma kann auf andere geometrische Objekte (wie Würfel, Rechtecke mit fixiertem Länge-/Breitenverhältnis, ..) verallgemeinert werden



B_0 .. Kugel am Ursprung

erlaubt

$\mathcal{V}$ .. Familie von Mengen

mit Eigenschaft (1) dass jedes $U \in \mathcal{V}$ in einer Kugel B_0 enthalten ist, aber es eine Konstante $c > 0$ gilt, sodass

$$|U| > c\,|B_0|$$

und ((2) jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ist in einer beliebig kleinen Menge $U \in \mathcal{V}$ enthalten)

Solche Familien nennt man regulär (im Sinne der Maßtheorie); für diese bekommt man immer noch Vitali

$\Rightarrow$ Maximalungleichungen, Differentiationssätze

$$\frac{1}{|U|}\int_U |f|\,dy \leq \frac{1}{c|B|}\int_B |f|\,dy$$

$\Rightarrow$ Lebesgue kann verstärkt werden

$$\lim_{R\to 0} \frac{1}{|B_x(R)|}\int_{B_x(R)} f(y)\,dy = f(x) \quad \text{f.ü.}$$

$$\lim_{U\to\{x\}} \frac{1}{|U|}\int_U f(y)\,dy = f(x) \quad \text{f.ü.}$$

$\hookrightarrow$ Ausnahmemenge, für die die Konvergenz nicht gilt, hängt von $\mathcal{V}$ ab

Definition $x \in \mathbb{R}^d$ heißt Lebesgue-Punkt $:\Leftrightarrow$

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_x(R)|}\int_{B_x(R)} |f(y) - f(x)|\,dy = 0$$

Mit dieser Definition wird die Ausnahmemenge bei f.ü.-Konvergenz nicht von $\mathcal{V}$ (Familie) abhängen

Verstärktes Lebesgue-Differentiationstheorem

Sei $f \in L^1_{loc}$ $\Rightarrow$ Fast alle x sind Lebesgue-Punkte

$$\lim_{R\to 0} \left| \frac{1}{|B_x(R)|}\int_{B_x(R)} f(y)\,dy - f(x)\cdot\frac{|B_x(R)|}{|B_x(R)|}\right|$$

$$\le \lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_x(R)|}\int_{B_x(R)}|f(y)-f(x)|\,dy$$

verstärkter Lebesgue (für B)

$\Downarrow$

Baby-Lebesgue: (für V)

Da Maximalungleichungen auch für reguläre Familien gelten, bekommen wir verstärkte Lebesgue-Differentiation auch für V

Baby-Lebesgue: (für V)

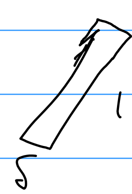
$$\left|\frac{1}{|U|}\int_U (f(y)-f(x))\,dy\right| \le \frac{1}{|U|}\int_U dy\,|f(y)-f(x)|$$

$$\le \frac{1}{c|B|}\int_B dy\,|f(y)-f(x)|$$

Verstärkter Lebesgue für V

$$\frac{1}{|U|}\int_U |f(y)-f(x)|\,dy \le \frac{1}{c|B|}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy$$

Offene Frage: wie sieht es mit nicht-reguläre Familien aus (wo Exzentrizität nicht vorgegeben ist & beliebig klein oder groß sein kann)



$$\|f^*\|_{L^p} \lesssim \underline{\underline{\delta}}^{-\epsilon}\, \|f\|_{L^p}$$

Verallgemeinerung: p-Hardy-Littlewood-Maximalfunktionen

$$(N_{p,r} f)(x) = r^{-d/p} \|f\|_{L^p(B_x(r))}$$

$$(M_p f)(x) = \sup_{r>0} N_{p,r} f$$

$$(N_{p,r} f)(x) \le (N_{q,r} f)(x) \qquad 1 \le p \le q \le \infty$$

$$\|f\|_p \sim \|N_{p,r} f\|_p$$

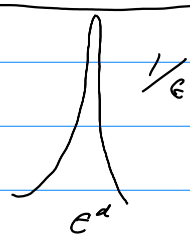
$$(N_{q,s} f)(y) \lesssim \left(\frac{r}{s}\right)^{d/q} (N_{q,r} f)(x) \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

$y \in B_x(s)$

$r \ge 2s$

<u>Weitere Anwendung</u> <u>von Maximalfunktionen</u> → Approximation der Eins

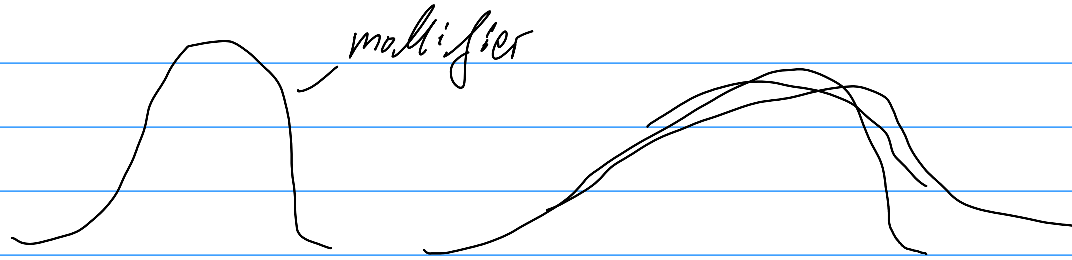
$$f(x) = f * \varphi_\epsilon$$



$\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} \varphi(x/\epsilon)$, $\epsilon > 0$ $\qquad f * \varphi_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{?} f$

$$\sup_{\epsilon > 0} f * \varphi_\epsilon$$



Maximalfunktionen & Approximation der Eins

Theorem 2.6 Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\varphi(x/\epsilon)$, $\epsilon > 0$.

Fkt auf $\mathbb{R}^d$

Sei $\psi(|x|) = \sup_{|y| \geq |x|} |\varphi(y)|$ und sei

langsamst abfallende, radiale Majorante von φ

$$A := \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx$$

Dann gilt mit demselben A, dass

a) $\sup_{\epsilon > 0} |(f * \varphi_\epsilon)(x)| \leq A\,(M f)(x)$ — Hardy-Littlewood

$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $\quad 1 \leq p \leq \infty$

($\sim$ Lebesgue-Differentiation)

b) Wenn zusätzlich $\int \varphi(x)\,dx = 1$, dann gilt
$\lim_{\epsilon \to 0} f * \varphi_\epsilon(x) = f(x)$ fast überall

c) $p < \infty$: $\|f * \varphi_\epsilon - f\|_p \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$

d) $f \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$, dann $f * \varphi_\epsilon \to f(x)$

beschr.

gleichmäßig auf Kompakta in $\mathbb{R}^d$.

Beispiele

$$e^{-t\sqrt{-\Delta}} \quad (\partial_t + \sqrt{-\Delta})f = 0$$

$$\boxed{\varphi_\epsilon^{(\alpha)}(x) = e^{-\epsilon|p|^\alpha}(x)}$$

$$e^{-\epsilon|p|^\alpha}(x) \equiv \int e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-\epsilon|\xi|^\alpha}$$

$\vec{p} \equiv -i\vec{\nabla}$

$|p|^\alpha := (-\Delta)^{\alpha/2}$

↳ definiert über die Fouriertransformation im $L^2(+L^1)$, d.h.
Sei $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbar, dann $\langle f, F(-i\vec{\nabla}) f\rangle$
$= \langle \hat{f}, F(\xi)\hat{f}\rangle$

$$\varphi_\epsilon^{(2)}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\xi} e^{-\epsilon|\xi|^2} d\xi$$

$= \int |\hat{f}(\xi)|^2 F(\xi)$

z.B. $F(\xi) = |\xi|^\alpha$ oder $e^{-t|\xi|^\alpha}$

$\epsilon^{-1/2}$

$$= \frac{e^{-\pi^2|x|^2/\epsilon}}{(\epsilon/\pi)^{d/2}}$$

$\xi \mapsto \frac{\xi}{\sqrt{\epsilon}}$

$|\xi| \sim \epsilon^{-1/2}$

$\Rightarrow e^{-\epsilon|\xi|^2} \sim 1$

$\Rightarrow \mathcal{F}(e^{-\epsilon|\xi|^2})$

lebt auf Skala $\sqrt{\epsilon}$

$$\varphi_\epsilon^{(1)}(x) = \int e^{-2\pi\epsilon|\xi|} e^{2\pi i x\cdot\xi}$$

$$= c_d \cdot \frac{\epsilon}{(\epsilon^2 + |x|^2)^{(d+1)/2}}, \quad c_d = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{(d+1)/2}}$$

aus Subordination mit Subordinator

$\beta = |p|$

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\beta^2/(4u)} du$$

$$\varphi_\epsilon^{(\alpha)}(x) \sim \frac{\epsilon}{(\epsilon^2+|x|^2)^{(d+\alpha)/2}}$$

Blumenthal-Getoor (1960)

Eigenschaften von $e^{-|p|^\alpha}$ (Wärmeleitungskerne)

(i) $e^{-|p|^2}(x) \leq e^{-|p|^2}(y) \qquad |x| > |y|$

($\to e^{-|p|^\alpha}(x) \leq e^{-|p|^\alpha}(y)$)

(ii) $e^{-t|p|^\alpha}(x) > 0$

(iii) $\int e^{-t|p|^\alpha}(x)\,dx = 1, \quad t > 0$

(iv) $e^{-t|p|^\alpha}(x)$ sind homogen vom Grad $-d/\alpha$, d.h.

$$e^{-t|p|^\alpha}(x) = t^{-d/\alpha} e^{-|p|^\alpha}\left(\frac{x}{t^{1/\alpha}}\right)$$

(v) $e^{-t|p|^\alpha}$ lässt sich komplex analytisch fortsetzen auf $\mathbb{C}_+ = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \}$

(vi) Halbgruppeneigenschaft $e^{-(t+s)|p|^\alpha} = e^{-t|p|^\alpha} e^{-s|p|^\alpha}$

Auftreten des Poissonkerns in Spektraltheorie.

Sei $A : D(A)$ dicht definierter, s.a. Operator in Hilbertraum $\mathfrak{H}$ mit Spektralmaß dE_A, d.h.

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda \, dE_A(\lambda)$$

$E_A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \underbrace{\mathcal{L}(\mathfrak{H})}_{\text{beschr. Operatoren}}$

$E_A(\lambda) = E_A((-\infty, \lambda])$, $\quad d\mu_{\psi\psi}(\lambda) \equiv d\mu_\psi(\lambda) \quad (\psi \in \mathfrak{H})$
$= \langle \psi, dE_A(\lambda) \psi \rangle$

Ziel Charakterisierung des Spektrums $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ (hier ...)
bzw. des Spektralmaßes E_A (enthält $\sigma(A)$ + "Eigenfkten")

Dazu Borel-Stieltjes-Transf $\underline{F_\psi(z)} := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z} \quad z \in \mathbb{C}$

$$= \langle \psi, \underbrace{(A-z)^{-1}}_{\equiv R(z),\ z \in \rho(A)} \psi \rangle$$

Resolventenmenge

$$\Rightarrow \operatorname{Im} F_\psi(z) = \operatorname{Im}(z) \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{|\lambda - z|^2}$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\langle \psi, R(z) \psi \rangle - \langle \psi, R(\bar z) \psi \rangle \right]$$

und insbesondere $\operatorname{Im} F_\psi(\underset{\text{Energie/Spektralparameter}}{E} + i\epsilon) = \int \frac{\epsilon}{(\lambda - E)^2 + \epsilon^2} \, d\mu_\psi(\lambda)$

da Poissonkern eine Approx. der Eins $\Rightarrow$

$$\int \phi(E) \operatorname{Im} F_\psi(E + i\epsilon) \, dE \xrightarrow{\epsilon \to 0} \int \phi(\lambda) \, d\mu_\psi(\lambda), \quad \phi \in C_c(\mathbb{R})$$

und man erhält insbesondere die Stonesche Formel $(2\phi = \mathbb{1}_\Lambda + \mathbb{1}_{\bar\Lambda})$

$$\frac{1}{2} \left(\langle \psi, E(\Lambda) \psi \rangle + \langle \psi, E(\bar\Lambda) \psi \rangle \right) =: \text{(nächste Seite)}$$

$\underset{\text{Intervall}}{\Lambda \subseteq \mathbb{R}}$, $\bar\Lambda$ Abschluß

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Lambda d\lambda \, \langle \psi, (R(\lambda + i\epsilon) - R(\lambda - i\epsilon)) \psi \rangle, \quad \Lambda \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall}$$

Klassische Referenzen: Reed–Simon I, II, IV

Weidmann I (Lineare Operatoren in Hilberträumen)

Teschl – Mathematical Quantum Mechanics

für Borel-Stieltjes insb auch Simon – Trace Ideals (sehr prägnant!)

20.5.2020

Beweis von Thm 2.6

c) $\| \varphi_\epsilon * f - f \|_p \to 0$ ($f \in L^p$, $1 \le p < \infty$)

Zunächst: für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p < \infty$ ist für $\| f(\cdot - y) - f \|_p \equiv \Delta(y)$

$\Delta(y) \to 0$ für $y \to 0$ ($\begin{matrix} \mathbb{R}^d \to L^p(\mathbb{R}^d) \\ y \mapsto f(x-y) \end{matrix}$ stetig)

Dazu Angenommen $f_1 \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$, dann folgt $\Delta_1(y) \to 0$ aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_1(x-y) \to f_1(x)$

Allgemeine f können wir schreiben als $f = f_1 + f_2$

$f_1 \in C_c^0$, $\| f_2 \|_p < \delta$ für vorgegebenes δ;

$$\Rightarrow \Delta(y) \le \underbrace{\Delta_1(y)}_{\xrightarrow[y \to 0]{} 0} + \underbrace{\Delta_2(y)}_{\le 2\delta} \xrightarrow{y \to 0} 0 \text{ für allg. } f \in L^p$$

$$f * \varphi_\epsilon - f = \int dy \, \varphi_\epsilon(y) [f(x-y) - f(x)]$$

$$\Rightarrow \|f * \varphi_\epsilon - f\|_p \le \int dy \, |\varphi_\epsilon(y)| \, \Delta(y)$$

$$= \int dy \, |\varphi(y)| \underbrace{\Delta(\epsilon y)}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

majorisiert

d) $\sup_{\epsilon>0} |(\varphi_\epsilon * f)(x)| \le A \, Mf(x)$, $A = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(|x|) dx$

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} |f|$$

Vorläufige Bemerkung:

$\int_{\frac{r}{2} \le |x| \le r} \psi(x) \geq c \, \psi(r) \cdot r^d$. Daraus, und $\psi \in L^1$

und, dass ψ monoton fällt, folgt

$$r^d \psi(r) \longrightarrow 0 \quad \text{für } r \to 0 \text{ und } r \to \infty$$

$\varphi_\epsilon * f$

Mf

Da die Aussage translationsinvariant (bzgl f) und dilatationsinvariant (bzgl. ψ) ist, können wir wlog $\epsilon = 1$, $x = 0$ annehmen. Weiter sei wlog $f \geq 0$

$\Rightarrow$ Genügt zu zeigen $\psi * f(0) \le A(Mf)(0)$ (mit $(Mf)(0) < \infty$)

Notation: $\lambda(r) = \int_{S^{d-1}} f(r\omega) \, d\omega \qquad \Lambda(r) = \int_{|x|<r} dx \, f(x)$

$$\Lambda(r) = \int_0^r dt \, t^{d-1} \lambda(t)$$

$$\Rightarrow (\psi * f)(0) = \int f(x) \psi(x) dx = \int dr \, r^{d-1} \lambda(r) \psi(r)$$

$(\psi(r) = \psi(|x|))$

$$\Lambda(r) = \int_0^r dt\, t^{d-1} \lambda(t) \qquad = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_\epsilon^N dr\, \underbrace{r^{d-1}\lambda(r)}_{\Lambda'(r)} \Psi(r)$$

$$r^d \underbrace{\frac{1}{r^d} \int_0^r dt\, t^{d-1}\lambda(t)}_{\leq Mf(0)} \qquad = -\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_\epsilon^N \Lambda(r)\, d\Psi(r)$$

denn $\Lambda(N)\Psi(N) + \Lambda(\epsilon)\Psi(\epsilon)$

$$\leq (Mf)(0) \underbrace{[N^d \Psi(N) + \epsilon^d \Psi(\epsilon)]}_{\substack{N\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \to 0 \quad \text{(aus Bemerkung oben)}$$

Zusammengefaßt $(\Psi * f)(0) = \int_0^\infty \overbrace{\Lambda(r)}^{\leq r^d |S^{d-1}|\, (Mf)(0)} d(-\Psi(r))$

$$\leq (Mf)(0)\, |S^{d-1}| \int_0^\infty r^d\, d(-\Psi(r))$$

$$= (Mf)(0) \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)\, dx = A\,(Mf)(0)$$

b), d) $\to$ Hausaufgabe.

b) pktweise f.ü. $\varphi_\epsilon * f(x) \to f(x)$ für $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$

d) $f \in C_c^0 \to \|f * \varphi_\epsilon - f\|_p \to 0$

(z.B. d) $\Rightarrow$ b) mittels C_c^0 dicht in L^p $1 \leq p < \infty$ und FAP II

$\left(\sup |\varphi_\epsilon * f| = T^* f \text{ mit } \|T^*\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} \lesssim 1\right)\Big)$

$$\sup_{\epsilon>0} |\varphi_\epsilon * f|(x) \leq A (Mf)(x) \qquad \Psi(x) = \sup_{|y|\geq|x|} |\varphi(y)|$$

$$L^1 \ni \varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} \varphi(x/\epsilon) \qquad \int \varphi_\epsilon = 1 \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x) = A$$

Zu b) und d) aus Thm 2.6 (Hausaufgabe 5.1)

b) $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty \Rightarrow \varphi_\epsilon * f \to f$ f.ü.

d) $f \in C_b^0 \to \varphi_\epsilon * f \to f$ glm. auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{R}^d$

C_c^0
$\cap$
L^p

zu d) Da f glm stetig auf $K \subset\subset \mathbb{R}^d$, gibt es $\delta > 0$ und eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^d$ um den Ursprung, sodass für

$(\varphi_\epsilon * f - f)(x)$

$\int \varphi_\epsilon(y)(f(x-y) - f(y))\,dy$

$V \cup V^c$

$x \in K$, $y \in V$, $|f(x+y) - f(x)| \leq \frac{\delta}{2A}$

$$\text{Da } \int_{V^c} |\varphi_\epsilon(x)|\,dx \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

$\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\varphi(x/\epsilon)$

$$\sim \int_{|x| \geq 1/\epsilon} |\varphi(x)|\,dx \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

$\Rightarrow$ d.h. $\exists\ \epsilon_0 > 0$, sodaß $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ $(\epsilon_0 = \epsilon_0(\|f\|_\infty))$

$$\int_{{}^cV} |\varphi_\epsilon(y)|\,dy \leq \frac{\delta}{4(\|f\|_\infty + 1)}$$

$$\sup_{x \in K} |\varphi_\epsilon * f - f\ (x)| \leq \int_V |\varphi_\epsilon(y)| \underbrace{\sup_{x \in K} |f(x-y) - f(x)|}_{\leq \frac{\delta}{2A}}\,dy$$

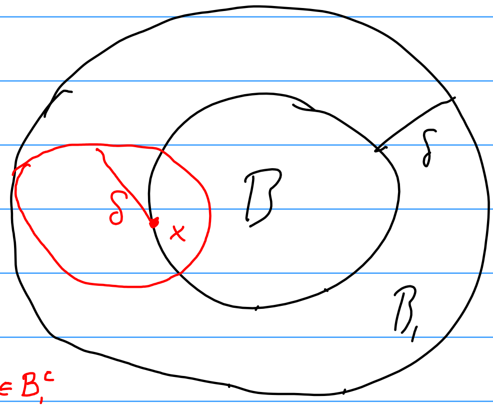
$$+ \int_{V^c} |\varphi_\epsilon(y)| \underbrace{\sup_{x \in K} |f(x-y) - f(x)|}_{\leq 2\|f\|_\infty}\,dy$$

$$\leq \frac{\delta}{2A} \cdot A + 2\|f\|_\infty \cdot \frac{\delta}{4(1 + \|f\|_\infty)} \leq \delta$$

für jedes vorgegebene $\delta > 0$. d) ✓

b) $1 \leq p < \infty$ folgt aus FA II wg. Teil a) $(\sup_{\epsilon > 0} |\varphi_\epsilon * f| \leq Mf)$
+ Pktweise Konvergenz auf der dichten Teilmenge C_c^0 in L^p
$p \neq \infty$.

$p=\infty$. Sei B eine feste Kugel. z.z.: $\varphi_\epsilon * f \to f$ f.ü. für $x \in B$



$B \subseteq B_1$, $\delta := \mathrm{dist}(B, B_1)$

nicht notwendigerweise konzentrisch

Für $x \in B$ und $x-y \in B_1^c$ muss $|y| > \delta$ sein

$|y| > \big||x-y| - |x|\big| > \delta$ per Definition von δ

$$L^\infty \ni f = f_1 + f_2 \quad \text{mit} \quad f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in B_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da $f_1 \in L^1$, folgt $f_1 * \varphi_\epsilon \to f_1$ aus b) für $p=1$

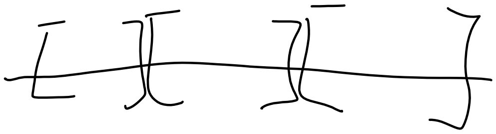
Verbleibt f_2 zu behandeln.

Für $x \in B$: $$|(f_2 * \varphi_\epsilon)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_2(x-y)\, \varphi_\epsilon(y)\, dy \right|$$

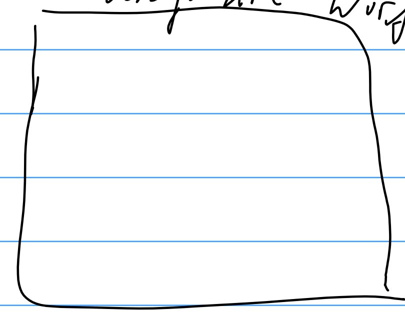
wlog $x-y \in B_1^c$, da supp $f_2 \subseteq B_1^c$ $$\leq \int_{|y|>\delta} |f_2(x-y)|\,|\varphi_\epsilon(y)|\, dy$$

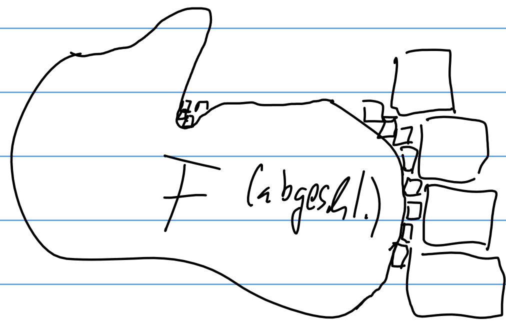
$$\leq \|f\|_\infty \int_{|y|>\delta/\epsilon} |H(y)|\, dy \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

∎

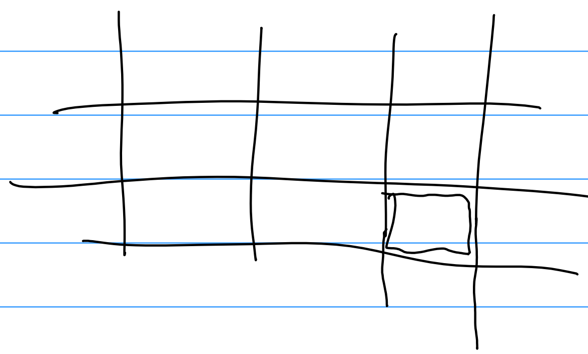


Frage: Gibt es "kanonische" Zerlegungen offener Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ in disjunkte Würfel?





Whitney-Zerlegungen



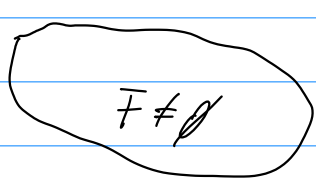
$[0,1)^d$ mit Eckpunkten auf $\mathbb{Z}^d$

Erinnerung: Dyadischer Würfel der Generation n

$$Q_{n,k} := 2^n\left(k + (0,1)^d\right), \quad k \in \mathbb{Z}^d$$

Nesting-Eigenschaft: Wenn zwei dyadische Würfel überlappen, dann ist der kleinere im größeren enthalten

$\Leftrightarrow$ ein Würfel der Generation n hat genau einen Elternwürfel der Generation $n-1, n-2, \dots$ und enthält 2^n Würfel der Generation $n+1$

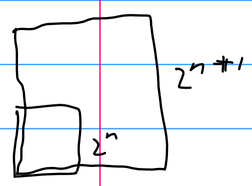


$\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$

Behauptung 2.7 (Dyadisches Whitney-Lemma)

Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ offen. Dann gibt es eine Zerlegung

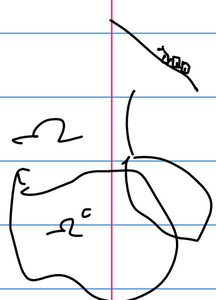
$$\Omega = \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q$$ wobei Q laufen über eine Kollektion von dyadischen, disjunkten Würfeln



und für jedes $Q \in \mathcal{Q}$ ist das Elternteil Q' von Q ist nicht mehr in Ω enthalten.

Beweis Definiere $\mathcal{Q}$ als die Kollektion aller disjunkten dyadischen Würfel in Ω, die maximal bzgl der Inklusion von Mengen sind $\Rightarrow$ Behauptung folgt aus der nesting Eigenschaft

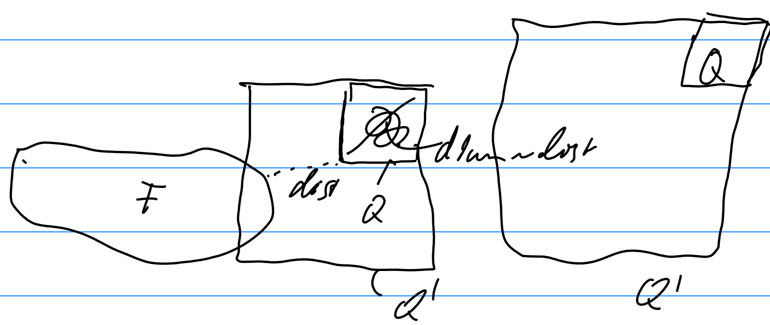
(Die Bedingung $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ brauchen wir, um sicherzustellen, dass jeder Würfel in einem maximalen Würfel enthalten ist;



Die Bedingung, dass Ω offen ist, brauchen wir, um sicherzustellen, dass jedes $x\in\Omega$ in wenigstens einem Würfel enthalten ist.) □

Aus der Eigenschaft, dass die Eltern der $Q \in \mathcal{Q}$ nicht mehr in Ω enthalten sind, folgt

$$0 \le \operatorname{dist}(Q, \Omega^c) \le \overset{2^d\cdot 2^n}{\operatorname{diam}(\tilde{Q})}$$



Behauptung 2.8 (Dyadisches Whitney I)

Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ offen und $K \geq 1$. Dann gibt es eine Zerlegung $\Omega = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$, wobei Q über disjunkte, dyadische Würfel läuft und für jeden Würfel gilt

$$\operatorname{dist}(Q, \Omega^c) \sim K \cdot \operatorname{diam} Q$$

(wobei die involvierten Konstanten unabhängig von Q, K, Ω sind)

Beweis Sei $\mathcal{Q}'$ die Familie aller dyadischen Würfel in Ω, die

$$K \cdot \operatorname{diam} Q \leq \operatorname{dist}(Q, \Omega^c) \leq 5 \operatorname{diam} Q.$$

Diese Q aus $\mathcal{Q}'$ überdecken bereits Ω, müssen aber nicht disjunkt sein müssen

$\Rightarrow$ Definiert man $\mathcal{Q}$ als die Familie von Würfeln, die maximal bzgl. Inklusion von Mengen sind, dann folgt die Behauptung wie oben aus der nesting Eigenschaft $\square$

Da jeder Würfel in einer Kugel mit vergleichbarem Radius (bis auf d-abhängige Konstanten) enthalten ist, gilt auch

Behauptung 2.9 (Dyadisches Whitney II)

Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ offen, $K \geq 1$. Dann kann man Ω mit Kugeln B überdecken, sodass $\operatorname{dist}(\Omega^c, B) \sim_d \operatorname{diam}(B)$ und, sodass jeder Punkt $x \in \Omega$ in höchstens $O_d(1)$ Kugeln enthalten ist.

Theorem 2.10 (Whitney (nicht-dyadisch → Stein 1970, Kap 6))

Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ offen, dann gibt es eine Zerlegung $\Omega = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$ wobei die Q disjunkte Würfel sind, deren Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind und

$$\operatorname{dist}(Q, \Omega^c) \sim \operatorname{diam} Q.$$

Anwendung von dyadischem Whitney: $\quad S$ Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$ z.B. $\mathbb{S}^{d-1}$

Fourierrestriktion in $\mathbb{R}^2$: $\quad \| \hat{f}|_S \|_{L^{p'}} \lesssim \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$

$f \in L^1 \to \hat{f} \in C_0^0$

$f \in L^2 \to \hat{f} \in L^2$

$f \in L^p$

$$\Leftarrow \quad \| \widehat{g\, d\sigma} \|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^p(S)}$$

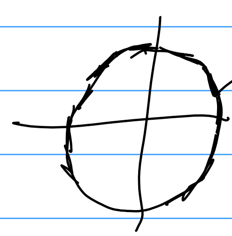
$$\int_S g(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\sigma(\xi)$$

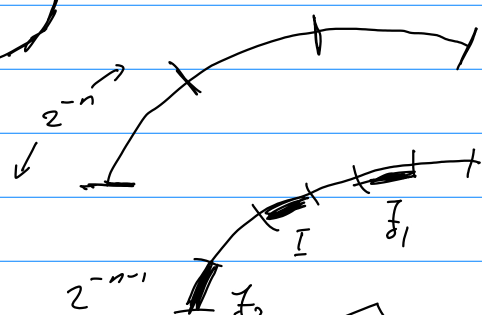
auf $\mathbb{S}^1$: $\quad \| \widehat{\mathbb{1}_\Omega\, d\sigma} \|_q \lesssim |\Omega|^{1/p}$

$\Omega \subseteq \mathbb{S}^1 \qquad q > 4, \quad q \geq 3p'.$

$$\| \widehat{\mathbb{1}_\Omega\, d\sigma}\ \widehat{\mathbb{1}_\Omega\, d\sigma} \|_{q/2}$$

$\mathbb{S}^1$



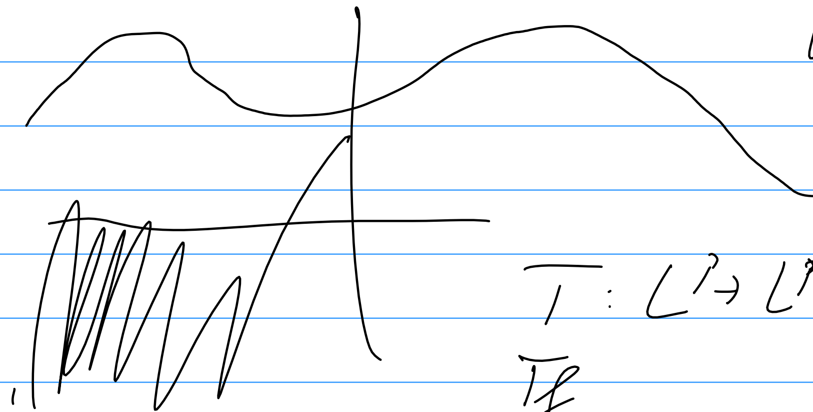


$I \sim J$

$$\widehat{\mathbb{1}_\Omega\, d\sigma}\ \widehat{\mathbb{1}_\Omega\, d\sigma} = \sum_{I \sim J} \widehat{\mathbb{1}_\Omega\, d\sigma_I}\ \widehat{\mathbb{1}_\Omega\, d\sigma_J}$$

$\hookrightarrow \quad \| \widehat{f\,d\sigma_I}\ \widehat{g\,d\sigma_J} \| \lesssim \theta^{-1/2} \|f\|_2 \|g\|_2$

falls f, g auf θ-Bogenstücken getragen sind, die θ-separiert sind



$T : L^p \to L^p$ → singuläre Integraloperatoren (s.h. nächste Vorlesung)

Tf

$\uparrow \quad \sim |x|$

Theorem 2.11 (Calderón–Zygmund)

$0 \le f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und sei $\alpha > 0$ eine Höhe. Dann gibt es eine Zerlegung von $\mathbb{R}^d$

(i) $\mathbb{R}^d = F \,\dot\cup\, \Omega$, $\quad \Omega \cap F = \emptyset$

(ii) $f(x) \le \alpha$ auf F

(iii) $\Omega = \bigcup_k Q_k$ ist die Vereinigung disjunkter Würfel.

Auf den Q_k haben wir folgende Abschätzungen für $\mathrm{avg}_{Q_k} f$

$$\alpha \le \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f\,dx \le 2^d \alpha \qquad (*)$$

27.5.2020

Korollar 2.12 Angenommen $f, F, \Omega, \alpha, Q_k$ wie in Thm 2.11

$\Rightarrow \exists$ Konstanten A_α, B_α, sodass (i) und (ii) aus Thm 2.11

sowie a) $|\Omega| \leq \frac{A_d}{\alpha} \|f\|_{L^1}$

b) $\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f \leq B_d \cdot \alpha$

Außerdem sind $\operatorname{diam} Q_k \sim \operatorname{dist}(Q_k, F)$

<u>Beweis</u> Trivial $(B_d = 2^d)$ (letzte Aussage folgt allerdings nicht $(A_d = 5^d)$ direkt aus Thm 2.11)

<u>Alternativer Beweis</u>

$$F = \{x : (Mf)(x) \leq \alpha\} \xrightarrow{} \text{abgeschlossen} \quad \text{und}$$

$$\Omega = E_\alpha = \{x : (Mf)(x) > \alpha\} \quad \left(\|Mf\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \alpha d_{Mf}(\alpha)\right)$$

$$f(x) = \lim_{R\to 0} \frac{1}{|B_x(R)|} \int_{B_x(R)} f(y)\,dy \leq (Mf)(x) \leq \alpha \Rightarrow (ii)$$

$\mathbb{R}^d = F \cup \Omega$

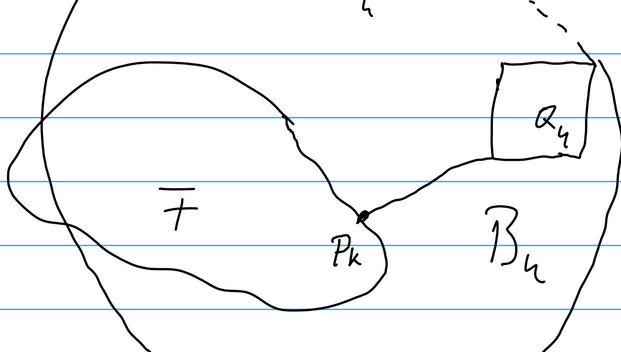
Und insbesondere wg der Maximalungleichung

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \leq 5^d \|f\|_{L^1} \Rightarrow |\Omega| \leq \frac{5^d}{\alpha} \|f\|_{L^1}$$

$\Rightarrow a)$

Wg Whitney können wir F^c mit Q_k "pflastern" (disjunkt über dachen)
mit $\operatorname{diam}(Q_k) \sim \operatorname{dist}(Q_k, F)$ $(\Rightarrow (i))$

$\Omega = \bigcup_k Q_k$



Sei $p_k \in F$ $\operatorname{dist}(Q_k, F) = \operatorname{dist}(Q_k, p_k)$

$B_k = B_{p_k}$ (radius so groß, dass $Q_k \subseteq B_k$)

$$\gamma_k = \frac{|B_k|}{|Q_k|} > 1$$

mit $\sup_k \gamma_k \lesssim 1$, da $\operatorname{rad}(B_k) \sim \operatorname{dist}(Q_k, F) \sim \operatorname{diam} Q_k$

$$|B_k| = \gamma_k |Q_k|$$

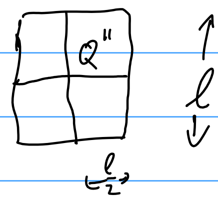
$$\alpha \geq (Mf)(p_k) \geq \frac{1}{|B_k|}\int_{B_k} f \geq \frac{1}{\gamma_k |Q_k|}\int_{Q_k} f \gtrsim \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f$$

glm in k

$$\Rightarrow \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f \lesssim \alpha \quad \Rightarrow b)$$

Beweis von Thm 2.11 (stopping-time Argument)

Zerlege $\mathbb{R}^d$ in ein Gitter von disjunkten Würfeln Q' mit so großem Durchmesser, dass $\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f \leq \alpha$.



Zerlege Q' in 2^d kongruente Kinderwürfel Q'' durch Halbieren der Seiten

$\rightarrow$ 2 Fälle: (i) $\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} f \leq \alpha$

(ii) $\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} f > \alpha$.

$\hookrightarrow$ jetzt zerlegen wir nicht mehr weiter und fügen Q'' als einen der Q_k in unsere Familie Ω hinzu.

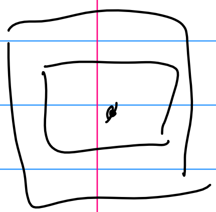
$|Q''| = \frac{|Q'|}{2^d}$ Außerdem gilt $\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} f \leq \frac{2^d}{|Q'|}\int_{Q'} f$

$\leq 2^d \alpha$. ✓

Im Fall (i) halbieren wir Q' so lange bis wir in Fall (ii) sind und fügen die dort gefundenen Würfel zu unserer Familie hinzu.

Wir bezeichnen mit Ω die Familie der oben gefundenen Q_k, $\quad \Omega := \bigcup_k Q_k$

Verbleibt zu zeige, dass $f|_{\Omega^c} \le \alpha$.



$$f(x) = \lim_{Q \to \{x\}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f < \alpha \quad \text{(Lebesgue für Würfel)}$$

Jeder Würfel, der in unsere Zerlegung eingegangen ist und $x \in F$ enthält, ist ein Würfel aus Fall (i), wo $\frac{1}{|Q|} \int_Q f < \alpha$ (und die untere Schranke eben nicht gilt). Ausführen des Grenzwerts $Q \to \{x\}$ gibt die Behauptung.

$\square$

→ Verallgemeinerung von CZ-Lemma für $f \in L^p$ $(p > 1)$

⇝ Blunck-Kunstmann (2003)

↳ interessant um weak-type (p,p) für singuläre Integraloperatoren (→ nächstes Kapitel) zu zeigen, wenn $p > 1$.