

Wie viel Platz braucht man, um eine Nadel zu drehen?

- Kakeya
 Besicovitch / Perron, Schoenberg (simple) (menschenfreundliche Einleitung später)
 Pal
 van Alphen
 Bloom-Schoenberg
 Cunningham

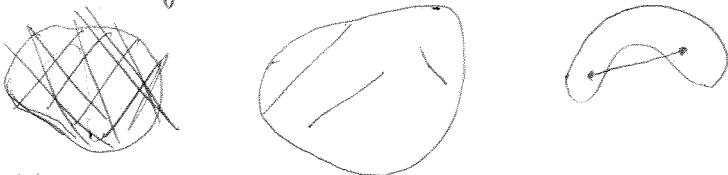
Definition 1) Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^d$, die ein Einheitsintervall in jeder Richtung enthält, d.h. für die gilt
 $\forall e \in S^{d-1} \exists x \in \mathbb{R}^d : x + te \in E \forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

heißt Kakeya- oder Besicovitchmenge.

2) Eine Kakeyamenge heißt Kakeya-Nadelmenge, falls es möglich ist ein Einheitsintervall stetig so zu bewegen (d.h. translieren und rotieren), sodass das Einheitsintervall nach dieser Bewegung wieder an seiner ursprünglichen Position ist, ihre Enden aber vertauscht sind

Shichi Kakeya (1917) fragte: Wie klein können solche Mengen sein und wie sehen sie aus?

Definition Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^d$ heißt konvex falls für alle $x, y \in E$ das Segment $x+ty \in E$.



effizienteste Kakeya-Nadelmenge



$h = \sin \pi/3$

Kakeya fragte zunächst nach allen möglichen Mengen und meinte, dass das Kel-Reuleaux-Dreieck die Antwort liefern würde

Schritt 1: Nadel um $\pi/3$ von links nach rechts schwingen lassen, dann unten rechts fixieren



Schritt 2: Nadel von oben nach unten schwingen lassen, dann unten links fixieren




Schritt 3: Nadel von unten rechts nach oben schwingen lassen



↑
 kein Kreis...

→ Fläche ist $3 \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r dr = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \sin \pi/3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

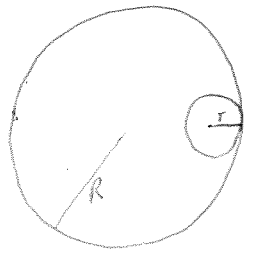
\uparrow Basis \uparrow Höhe

= 3 mal 
 Bogensegment

Nach Kahyans erster Vermutung lieferte Bes Abram Samoilovitch Besicovitch eine sehr (2) überraschende Antwort... später 35 Seiten

In 1921 zeigte Gyula Pál, dass die kleinste konvexe Kahya-Nadelmenge das gleichseitige Dreieck mit Höhe 1 ist und entsprechend die Fläche $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx \frac{1}{13}$ besitzt.

Kahya fragte daraufhin, wie klein nicht-konvexe Nadelmengen sein könnten und behauptete, das Deltoid hätte diese Eigenschaft.
(schaut aus wie griechisches Delta)



Deltoid ergibt sich durch Folgen eines Punktes auf dem kleineren Kreis, wenn dieser entlang des größeren Kreises rollt

$\frac{R}{r} = 3$ liefert drei Spitzen (oder $\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$)

Um die Nadel in den Deltoid stecken zu können ist $1+2r = 2R$ nötig
 $\Rightarrow R = \frac{3}{4}, r = \frac{1}{4}$



\rightarrow Fläche = $\frac{\pi}{8} \approx 0,393$ im Vergleich zu $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \approx 0,705$ (Reuleaux) und $\pi \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$ (Kreis)

Nach diesen Vermutungen kam die ^{folgende} verbäufende Antwort von Abram Samoilovitch Besicovitch (1928)

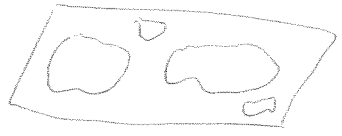
Theorem $\forall \epsilon > 0 \exists$ Kahya-Nadelmenge mit Fläche $< \epsilon$.

Perth. Oskar Perron (1928) und Isaac Jacob Schoenberg vereinfachten die Konstruktion dramatisch (wir folgen ihrer Konstruktion später)

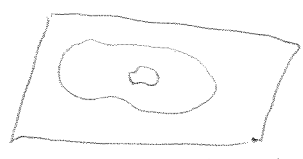
Diese Konstruktionen liefern jedoch vielfach zusammenhängende Mengen mit großen Durchmessern

Definition Eine Menge $E \in \mathbb{R}^d$ heißt einfach zusammenhängend, falls jedes Paar von Punkten $x, y \in E$ sich durch einen Weg verbinden lässt, d.h. falls es eine stetige Abbildung $p_{xy} : [0, 1] \rightarrow E$ gibt mit $p_{xy}(0) = x$ und $p_{xy}(1) = y$.

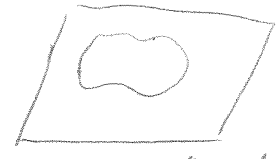
Falls E nicht einfach zusammenhängend ist, so heißt E vielfach zusammenhängend.
 Die Menge E heißt einfach zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist und sich jeder geschlossene Weg auf einen Punkt zusammenziehen lässt



nicht wegzusammenhängend

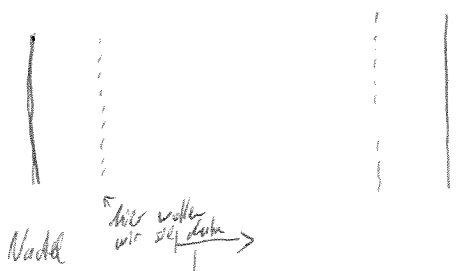


wegzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend, da das Loch nicht zu Kurven um das Loch herum nicht zu einem Punkt zusammengezogen werden kann



einfach zusammenhängend

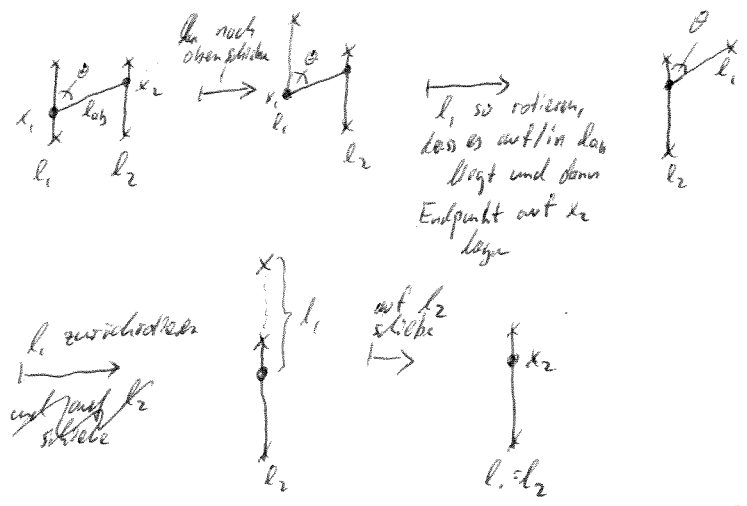
Der Grund, warum die Nadelmengen von Besicovitch, Peres und Schonberg nicht einfach zusammenhängend sind, ist, dass sie sog. Pal-Verbindungen verwenden, um die Nadel parallel verschieben zu können, ohne mit viel Fläche bezahlen zu müssen. Jede Pal-Verbindung besteht aus einer



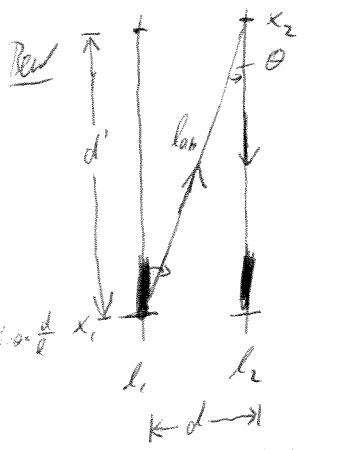
Denn kann wir die Nadel Länge wandern

Idee: Sei l_1, l_2 zwei parallele Linien, $x_1 \in l_1, x_2 \in l_2$ und l_{ab} die Verbindung zwischen x_1, x_2

nicht verschieben, sondern drehen
so bewegen, dass sie verschoben ist. Idee: Nadel sehr lange nach oben bewegen, dort etwas drehen, zurück wandern lassen und wieder etwas drehen



Lemma Seien l_1, l_2 zwei unendlich lange, parallele Linien. Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ eine Kompaktum E mit $|E| < \epsilon$ worin jedes Einheitsintervall von l_1 stetig nach l_2 bewegt werden kann



Nadel rotieren, nach x_2 verschieben, zurückrotieren, zurück verschieben
Sei $d = \text{Distanz}$ (kürzester Abstand) zw. l_1, l_2 und
 $d' = \text{Distanz}$ zw. Projektion von x_1 auf l_2 und x_2
 $\theta = \text{Winkel}$ zw. l_1 und l_{ab}

$\Rightarrow \tan \theta = d/d'$ Da θ beliebig klein gemacht werden kann, können wir für gegebenes $\epsilon > 0$ finden/machen wir θ so klein, dass $d' > \frac{d}{\tan(\epsilon)}$
(d.h. $\theta = \arctan(\frac{d}{d'}) < \epsilon$) \Rightarrow überstrichene Fläche beim Rotieren ist 2ϵ .

Fläche $\sim 2\theta$ ohne aufgebogene Verbindung
Verbindung aufbauen: $T \cdot \frac{d}{E} < \epsilon$
 $T < \epsilon^2/d$

Zum Verschieben der Nadel entlang der Liniensegmente l_{ab} und von x_2 zur Projektion von x_1 auf l_{ab} wird keine Fläche gebraucht. \square

Später wird das Liniensegment l_{ab} $\overline{P_{x_1, x_2}}$ Teil der Arona sein, was etwas seltsam ist; aber wir können sie aufdicken mit Dicke T . Länge von l_{ab} ist $d/\cos \theta \sim d'$. Dann ist Fläche dieser aufgedickten Liniensegmente $\sim T \cdot d'$. Aber dann wählen wir eben T so, dass $d' \cdot T < \epsilon$. In dem Fall bezahlen wir dann nochmals mit ϵ viel Fläche.

$$T < \frac{\epsilon}{d'} < \frac{\epsilon \cdot \epsilon}{d} \sim \frac{\epsilon^2}{d}$$

(Diese Pal-Verbindungen lassen die Nadelmengen beliebig großen Durchmesser (in Abhängigkeit der angestrichelten Fläche) haben

OK! Aber natürlich kann man fragen,

Obige Ausführung zeigt noch nicht, dass man zu vielfach zusammenhängende Nadelmengen geführt wird. ^{Was aber der Fall ist} Dennoch ist es natürlich, zu fragen, ob man auch kleine einfach-zusammenhängende Nadelmengen findet, deren Durchmesser auch beschränkt bleibt

1941 zeigte Henk-Jan van Alphen, dass es ~~keine~~ einfach zusammenhängende Nadelmengen mit beliebig kleiner Fläche gibt, die innerhalb eines Kreises mit Radius $2+\epsilon$ leben. Diese Menge war wieder nicht einfach zusammenhängend

1965 zeigten Bloom und Schoenberg dass es einfach zusammenhängende Nadelmengen mit Maß $\frac{5-2\sqrt{2}}{24} \pi \sim 0,09\pi$ gibt (Deltoid $\frac{\pi}{8}$)

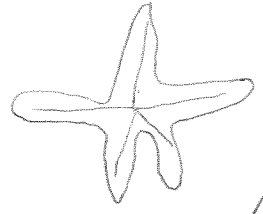
1971 zeigte Frederic Cunningham schließlich

Thm $\forall \epsilon > 0 \exists$ einfach zusammenhängende Kahya-Nadelmengen mit Fläche $\leq \epsilon$, die innerhalb eines Kreises mit Radius 1 leben.

Bem Dieser Einheitskreis kann nicht kleiner gemacht werden

Bem Zwischen den konvexen und den einfach zusammenhängenden Gebieten gibt es noch die Klasse der sternförmigen Gebieten.

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt sternförmig bzgl. eines Punktes $O \in M$, falls das Liniensegment zwischen O und jedem anderen Punkt in M in M enthalten ist.



nicht ganz perfekt...



nicht sternförmig

Deltoid oder Bloom-Schoenberg-Konstruktion sind sternförmig

Die Situation d. Kahya-Problems hier ist etwas anders

Thm (Cunningham) Jede sternförmige Kahya-Nadelmenge hat Fläche $\geq \frac{\pi}{108}$

Frage (offen) Gibt es sternförmige Kahya-Nadelmengen mit $A \in [\frac{\pi}{108}, \frac{5-2\sqrt{2}}{24} \pi]$?
 ↑
 Bloom-Schoenberg

erläutere \nearrow Nadel in jede Richtung, aber Nadel muss nicht gedreht werden

Bemerkung • Obwohl Kahya-/Besicovitchmengen sogar Maß = 0 haben können, so ist zumindest in $d=2$ ihre Hausdorff- und Minkowski-Dimension immer d (\rightarrow Rogers Davies 1971)

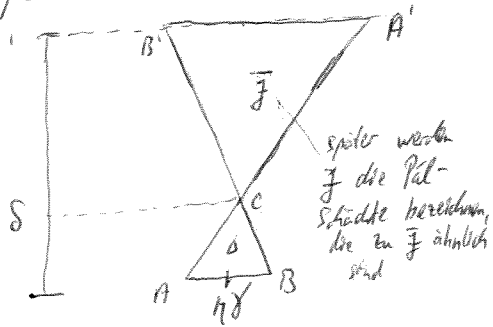
• Tao (2008) zeigte, dass es keine Nadelmengen gibt mit Fläche = 0.
Terence

Wir werden hier der vereinfachten Besicovitch-Konstruktion von Perron und Schoenberg folgen, also nicht den Anspruch haben, eine Nadelmenge einfach zusammenhängend zu konstruieren, die in einem Einheitskreis passt. Außerdem werden wir hier nicht Cunninghams Beweis geben, der zeigt, dass sternförmige Nadelmengen eine Fläche von mindestens $\frac{\pi}{108}$ haben müssen.

- Für gute Übersichtsartikel:
- Sean Gasorek, Tina Wolff - The Kakeya Needle Problem (Senior thesis, an California Polytechnic State University, 2003)
 - R. Tao, Y. Yang, X. Zou, Z. Dong, S. Chen - The Kakeya problem (Advances in Pure Mathematics 2019, 91, p. 78-110)

1. Erste Idee

Starte mit gleichseitigem Dreieck Δ d. Seitenlänge $0 < \gamma < 1$ und Höhe $S = \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma$.
 Sprieße das Dreieck zur Höhe $h=1$



später werden \bar{F} die Pfl-Schichten berechnen, die zu \bar{F} ähnlich sind

Offensichtlich passt eine Nadel d. Länge 1 rein und kann wenn sie um C von Segment BB' zum Segment AA' rotiert werden

$|\Delta \cup \bar{F}| = \dots = \frac{3\sqrt{3}\gamma^2 - 6\gamma + 2\sqrt{3}}{6}$ wird durch $\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ minimiert

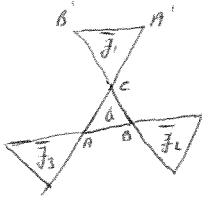
$\rightarrow |\Delta \cup \bar{F}| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ in dem Fall

\rightarrow kopiere die Figur ~~sechs~~ ^{drei} mal und klebe sie aneinander \Rightarrow Nadel kann um 360° rotiert werden.

\rightarrow Fläche d. Figur ist $\geq \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{\pi}{4}$

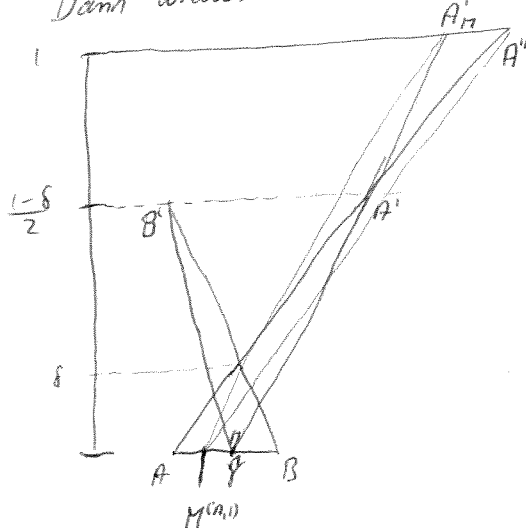
Fläche von Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$

~~Beim $\frac{AB}{B'A'} = 2 \cdot S$ (ähnliches Dreieck)~~



2. Sprieße nochmals

Finde eine Höhe $h \in (S, 1]$, z.B. $h = \frac{1-S}{2}$ zu der wir obigen Vorgang machen. Dann wiederholen wir den Vorgang nochmals um zur Höhe 1 zu gelangen. Wie soll das gehen? Wir verbinden den Mittelpunkt M mit A' und B' und sprießen dann $AA'M$ und $BB'M$ um schließlich $2 \cdot 2 = 4$ Dreiecke zu erhalten.

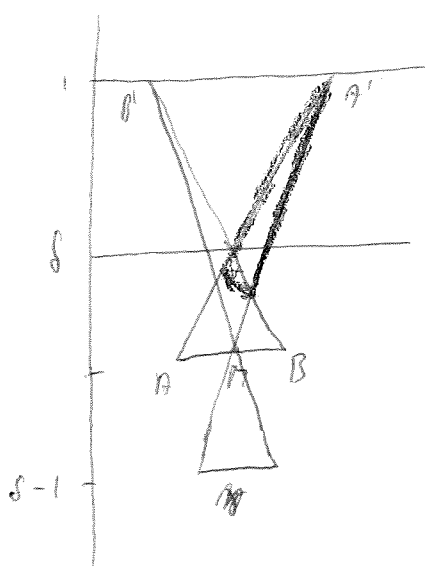


Frage: wie kommen wir von einem Spross, wie AMA' oder BMB' zum andere?

Bevor wir fortfahren etwas Notation

- AMA' , BMB' heißen Sprosse von ABC
- $AMA' \cup BMB'$ heißt geheimte Figur von ABC
- $(AMA' \cup BMB') \setminus ABC$ heißen Ohren (erster Generation)

3. Pal-Schächte: Von A'A nach B'B



Angenommen, die Nadel liegt auf A'A. Wir können sie dann um einen Winkel θ nach in Richtung A'M rotieren. Wie bekommen wir die Nadel in der anderen Spross B'B? Hier kommen die eingangs angesprochene Pal-Fans ins Spiel.

Erwähne A'M und B'M zu einer Höhe/Tiefe $r = s-1 < 0$

Wir können dann die Nadel entlang Richtung A'M schreiben in den "Pal-Schacht" in schreiben, dann um M herum rotieren und die Nadel anschließend in Richtung B'M hochschreiben und schließlich nach B'B rotieren

4 Iteration ohne Schächte

Unter der Annahme, dass wir dadurch im Vgl zu Schritt 1 Fläche gespart hätten, könnten wir diesen Prozess (Sprosse + Pal-Schächte erstellen), iterieren, und hoff die Iteration abbrechen, sobald die Figur den gewünschten Flächeninhalt hätte. Tatsächlich ist das der Fall...

Sei $p \gg 1$ sehr groß und für $j = 0, 1, \dots, p$ sei $h_j \equiv h_j^{(p)} = s + j \cdot \frac{1-s}{p}$
 d.h. $h_0^{(p)} = s$ und $h_p^{(p)} = 1$.

Bei jedem Spritzen verdoppelt sich die Zahl der ^{Ohren} (Sprösslinge) d.h. nach j mal Spritzen gibt es 2^j Sprosse. Das heißt viel, aber die ^{Ohren} werden kleiner! Ihre Basis ist $\sim 2^{-j} \gamma$ (γ war die Basis) und ihre Höhe ist etwa $\frac{(h_j - h_{j-1})^2}{2h_j + h_{j-1}}$ (da Winkel kleiner werden bei jeder Iteration) $h_j - h_{j-1} = \frac{1-s}{p}$
 $\approx \frac{(1-s)^2 p^2}{2(2s + s - \frac{1-s}{p})} \approx \frac{(1-s)^2 p^2}{j(1-s)p}$

Wenn wir das glauben, hätte jedes ^{Ohr} Spross Fläche $\sim 2^{-j} \gamma \cdot \frac{(1-s)^2 p^2}{j(1-s)}$, d.h. die gesprossene Figur, mitsamt dem "Startdreieck" ABC hätte Fläche $\sim \gamma \cdot s + \sum_{j=1}^p 2^j \cdot 2^{-j} \gamma \cdot \frac{(1-s)^2 p^2}{j(1-s)}$ $\sim s^2 + \frac{(1-s)^2 p^2}{p} \cdot \sum_{j=1}^p \frac{1}{j}$ $\sim s^2 + \frac{(1-s)^2 p^2}{p} \cdot \log p$ $\in \text{BAST}$

und die rechte Seite rechte Seite kann beliebig klein gemacht werden für $p \rightarrow \infty, s \rightarrow 0$
 Entscheidend ist also die Formel / Abschätzung für die Höhe der Sprosse. Nehmen wir z.B. A'A'

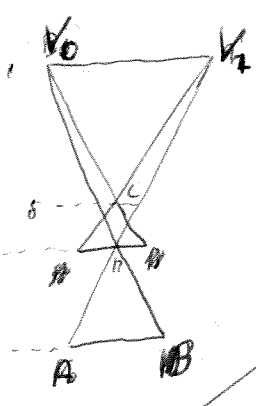
Was war bisher entscheidend?

- Durch das Spreizen bekommen wir in der j -ten Generation zwar 2^j SpröÙe/Ohren doch ihre Basen sind $\sim 2^{-j} s$ \rightarrow gute Balance, das Basis linear in Fläche eingeht (die Winkel halbieren sich)
- Wenn $\frac{1}{p \cdot s}$ klein genug ist (z.B. $s = s(p)$ oder umgekehrt), dann werden die Höhen der SpröÙe gut kontrolliert. (Von Generation zu Generation selbst werden sie schon kleiner, doch das ist nicht so wichtig, wie die globale Skala $\frac{1}{p \cdot s}$)

Wichtig wir brauchen mindestens $p^{-1-\epsilon}$ -Abfall der Höhe der SpröÙe
höchstens s^{-1} -Singularität der Höhe der SpröÙe!

Abgesehen von den Pal-Schächten haben wir also eine Figur mit beliebig kleiner Fläche konstruiert. Innerhalb derer wir die Nadel mit "magic jump" drehen können. Magic jump $\hat{=}$ paralleler Jump von einem in einen benachbarten SproÙ. Dafür brauchen wir die Pal-Schächte. Wie konstruieren wir sie sublinear und wie viel Fläche kosten sie?

5 Pal-Schächte: Fläche?



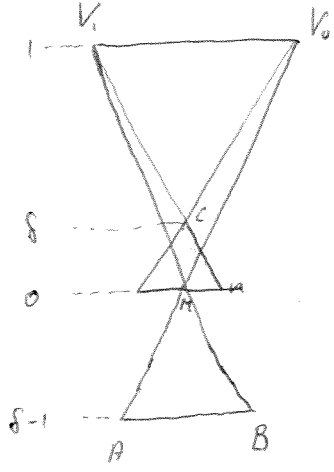
Wg Ähnlichkeit von $A'B'M$ und V_1V_2C ist $\frac{V_0V_1}{B'A'} = 1-s$ $\frac{AB}{V_1V_2} = 1-s$
 $\hookrightarrow ABM$ wird genauso konstruiert wie $A'B'C$ V_0V_1C
 $\Rightarrow |V_0V_1C| = \frac{1}{2}(1-s) \cdot \overline{V_0V_1} = \frac{1}{2}(1-s)^2 \overline{AB}$
 $|ABM| = \frac{1}{2}(1-s) \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}(1-s)^2 \overline{V_1V_2}$

OK, wie sieht es aus, wenn wir ^{die} gesprossenen Dreiecke anschauen?

Für je zwei Ohren brauchen wir einen Schacht.

\rightarrow Für V

5 Pál-Schächte: Fläche?



Weg ABM wird wie V_0, V_1, C konstruiert \Rightarrow ABM überdeckt zu V_0, V_1, C

$$\Rightarrow \frac{AB}{V_0V_1} = 1-s$$

$$\Rightarrow |ABM| = \frac{1}{2}(1-s)AB = \frac{1}{2}(1-s)^2 \overline{V_0V_1} = (1-s) \cdot \frac{1}{2} \overline{AB}$$

Im Vgl zur Konstruktion in Schritt 1 \rightarrow ^{von Schritt 1} $\frac{1}{2} \overline{AB}$ \rightarrow halbiert

OK, wie sieht es für die nächste Generation aus? Für je zwei Ohren brauchen wir einen Schacht
 d.h. für m Ohren brauchen wir m-1 Schächte

\Rightarrow Um vom Ohr mit Vertex V_{i-1} zum Ohr mit Vertex V_i zu kommen nehmen wir den Schacht A_i, B_i, M_i

\Rightarrow Wieder wegen Ähnlichkeit von V_{i-1}, V_i, M_i und A_i, B_i, M_i gilt $A_i, B_i = (1-s)V_{i-1}, V_i$

\Rightarrow Bezeichne $f_i := A_i, B_i, M_i$; sei $m = 2^p - 1$ (p... Zahl d. Iterationen) \swarrow wähl. von p!!

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m |f_i| \leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} (1-s) \overline{A_i, B_i} = \frac{1}{2} (1-s)^2 \sum_{i=1}^m \overline{V_{i-1}, V_i} = (1-s) \cdot \frac{1}{2} (1-s) \overline{A'B'}$$

\nearrow nicht alle Pál-Schächte haben Tiefe (1-s) \nwarrow Bezeichnung von Figur bei Schritt 1

\Rightarrow Da die Ohren zur Fläche nur ϵ beitragen, trägt unsere Konstruktion mit

$$|\Delta| + \epsilon + (1-s) \frac{1}{2} \overline{AB}$$

\uparrow Skattdreieck $\sim s^2$ \uparrow Perronsche Konstruktion über Ohren \nwarrow Dreieck $A'B'C$ von Schritt 1

\Rightarrow unsere Konstruktion ist ganz leicht besser als die erste grobe Konstruktion von Schritt 1, die schlechter als der Wert war

\Rightarrow War diese immense Mühe umsonst?

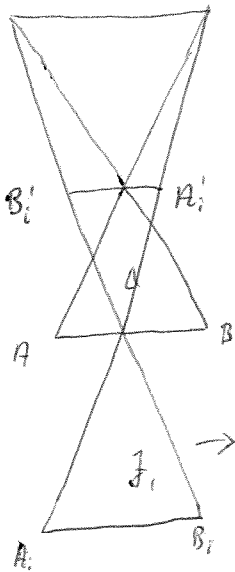
\Rightarrow Ähnliche Idee: Sprieße nun die Pál-Schächte!

~~6 Spriessen der Pál-Schächte / Ersetzung d. Pál-Schächte durch Ohren~~

~~Verschiebe, Koordinatensystem: $x \mapsto -(x-s)$
 und reflektiere Effekt: Verten C von Δ bei 0
Ohren schauen nach unten
Pál-Schächte schauen nach oben~~

6 Sprössen der Pal-Schächte / Ersetzung der 1. Generation von Pal-Schächte

durch Ohren und zweite Generation von Pal-Schächten



allerdings gibt es $2^p - 1$ viele Schächte? \Rightarrow führt zu $2^p - 1$ vielen Perronbäumen
 \Rightarrow Maß jeder Schächts 1. Generation muss kontrolliert werden! \rightarrow Maß muss kleiner 2^{-p} sein wg. p
 Pigeonholing \Rightarrow Perronbaum $p^{-1} \cdot 2^{-p} \cdot \ln p$
 \Rightarrow Perronbäume für 2^p Schächte $\sim p^{-1} \ln p$
 neue Pal-Schächte F_{ij}
 \hookrightarrow schauen aber noch über

ähnlich wie in Schritt 5
 erfüllen die 2. Generation Pal-Schächte

$$\overline{A_{ij} B_{ij}} = \overline{V_{ij-1} V_{ij}} \cdot (1-\delta)$$

wobei $\sum_i \overline{V_{ij-1} V_{ij}} = \overline{A_i B_i}$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} |F_{ij}| \leq \sum_{i,j} \frac{1}{2} (1-\delta) \overline{A_{ij} B_{ij}} = \frac{1}{2} (1-\delta)^2 \sum_{i,j} \overline{V_{ij-1} V_{ij}} = \frac{1}{2} (1-\delta)^2 \sum \overline{A_i B_i}$$

$$= \frac{1}{2} (1-\delta)^3 \overline{A' B'}$$

↑ diese Strecke in Figur aus Schritt 1

$$= \frac{1}{2} (1-\delta)^2 |\overline{F}| \text{ wieder unabhängig von } p!$$

Idee: Wiederhole dies, las die Schächte zweiter Generation sprießen und erhalte kompensiere mit Schächten dritter Generation mit Fläche $< (1-\delta)^3 |\overline{F}|$

\Rightarrow 7 Zusammenführung

- Startdreieck mit Basis δ , Höhe δ : wähle $\delta < \frac{\epsilon}{10} \Rightarrow |A| \leq \epsilon$
 - Sprießen von \overline{F} in den Perronbaum gibt Fläche $\approx \frac{\ln p}{p}$
 - N -te Generation von Pal-Schächten: $\sim (1-\delta)^N < \epsilon$ falls $N \geq \lceil \log \epsilon \rceil$
 - Wir mussten alle $N-1$ vorherige Generationen von Pal-Schächten sprießen lassen \rightarrow gibt Fläche $\sim \frac{N \ln p}{p} \Rightarrow$ wähle $\frac{\ln p}{p} \leq \frac{\epsilon}{10N}$ $p \log p = \frac{10N}{\epsilon}$
- beim Sprießen der Schächte erster Generation (ihren Fläche wg Pigeonholing $< 2^{-p}$ ist) entstanden 2^p Perronbäume mit Fläche $2^{-p} \cdot p^{-1} \ln p \Rightarrow (2^p)^2$ Schächte zweiter Generation mit Fläche $< 2^{-2p}$ / Basis
- \Rightarrow zugehörige 2^{2p} Perronbäume haben Maß $2^{-2p} p^{-1} \ln p$ etc. -

Zur Fläche der Pál-Schicht erster Generation und der von ihnen erzeugten Person-Bäume \mathbb{R}^d

Die Spitzen der Personbäume, die aus dem Sprössling von \bar{J} hervorgegangen sind (sprich die Punkte $V_0, V_1, \dots, V_k, V_{2^p-1}$ haben Abstand $\leq 2 \cdot 2^{-p} \Rightarrow$ die Perim. der Pál-Schicht ist etwa $(1-\delta) \cdot 2^{1-p}$
 \Rightarrow Fläche eines Pál-Schichts $\sim (1-\delta)^2 \cdot 2^{1-p} \Rightarrow$ von Pál-Schicht erzeugter Person-Baum hat Fläche $\sim 2^{1-p} \cdot \frac{1}{p} \ln p \Rightarrow$ Fläche aller (2^p-1) Person-Bäume der 2^p-1 Pál-Schicht ist $\sim \frac{1}{p} \ln p$
 \Rightarrow Nach N Generationen erzeugen die Personbäume (es sind etwa $1 + (2^p-1) + (2^p-1)^2 + \dots + (2^p-1)^{N-1}$) eine Fläche von $\sim (N/p) \cdot \ln p$

Offene Probleme von größerer Aktualität betreffen Besicovitch-Mengen (Mengen, die eine Kugel in jeder Richtung enthalten)

Bekannt: $d=2$: Mengen können Maß 0 haben
 $\xrightarrow{\text{improv.}} \mathcal{H}^d \text{ dim}_H(M_{Besicovitch}) = 2 \neq \text{Besicovitch-Mengen}$

$\sup_{a \in \mathbb{R}^d} \inf_{\{T_i\}} \sum_i |T_i| = \mathcal{H}^d(a)$ erfüllt $\|f\|_{L^p(S^{d-1})} \leq \mathcal{H}^d(a) \cdot \mathcal{H}^d(S^{d-1}) \cdot \mathcal{H}^d(a)$ $\forall p \in [1, d]$
 wobei $T_\omega \equiv T_\omega^s(a) = \{x \in \mathbb{R}^d, |(x-a) \cdot \omega| \leq \frac{\delta}{2}, |x-a| \leq \delta\} \cong \delta^2 \times \delta^{d-2}$ -Box, zentriert um $a \in \mathbb{R}^d$, orientiert entlang ω

$\mathcal{H}_\alpha^d(E) = \inf \left(\sum_i r_i^\alpha \right)$, wobei inf über alle Überdeckungen von E mit Kugeln mit Radii $r_i \leq \epsilon$, $\alpha > 0$ genommen wird $\rightarrow \mathcal{H}_\alpha^d(E)$ wächst mit fallendem ϵ

$\rightarrow \mathcal{H}_\alpha(E) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\alpha^\epsilon(E)$
 \Rightarrow Für gegebenes $E \subset \mathbb{R}^d \exists! \alpha_0 \in [0, d]$, genannt Hausdorff-Dimension, $\dim_H(E)$ s.d. $\mathcal{H}_\alpha(E) = \infty$ falls $\alpha < \alpha_0$. Insb. ist $\mathcal{H}_\alpha(E) = 0$ falls $\alpha > \alpha_0$

Bew Def $\alpha_0 := \sup \{ \alpha \geq 0 : \mathcal{H}_\alpha(E) = \infty \} \Rightarrow \mathcal{H}_\alpha(E) = \infty$ falls $\alpha < \alpha_0$
 Andernfalls: Ang. $\alpha > \alpha_0$; dann sei $\beta \in (\alpha_0, \alpha)$ und $M := 1 + \mathcal{H}_\beta(E) < \infty$
 \rightarrow für alle $\epsilon > 0 \exists$ Überdeckung $\bigcup_i B_{r_i}(r_i) \supseteq E$ mit $\sum_i r_i^\beta \leq M$

Folgerung
 Sect 2.10

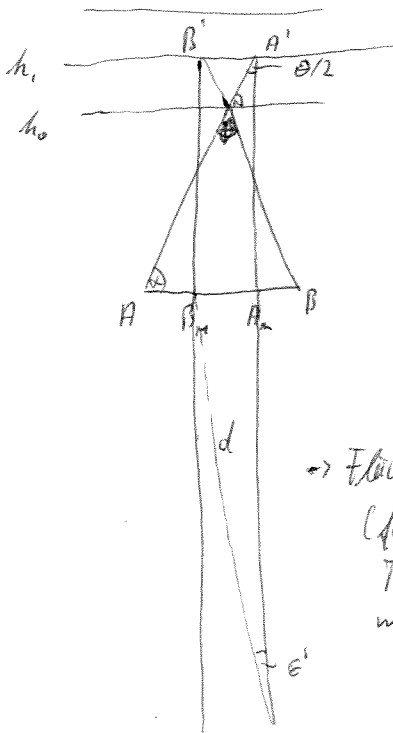
$\rightarrow \sum_i r_i^{\alpha-\beta} r_i^\beta \leq \epsilon^{\alpha-\beta} \sum_i r_i^\beta < M \epsilon^{\alpha-\beta} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$
 Da $\mathcal{H}_\alpha = \text{Leb}$ und $\text{Leb}(E) < \infty$ für messbare Mengen, ist $\mathcal{H}_\alpha(E) = 0$ falls $\alpha > d$.

Alternative Konstruktion (wie bei Feferman)

Ähnlich wie vorher, allerdings werden die (wieder nötigen) Pál-Schächte nicht spritzen müssen;

groß

Wenn die neuen höheren Dreiecke entgegengesetzt zueinander verschoben werden, erhält man eine größere Version des Startdreiecks, d.h. wir könnten eine längere Nadel im selben Sektor rotieren lassen. Um jetzt vom Dreieck $AA'A_m$ zum Dreieck $BB'B_m$ zu kommen brauchen wir wieder einen Pál-Schacht; diesen müssen wir allerdings nicht spritzen lassen.



\Rightarrow Fläche $\sim \epsilon' \cdot \text{Nadellänge} = \epsilon'$

(falls wir die Nadel nicht auf Linien, sondern in Tuben mit Dicke T laufen lassen wollen, zahlen wir noch mit $< 2T \cdot d$, wobei $d \sim \frac{B_m A_m}{d} \sim \epsilon'(\epsilon) \sim \frac{B_m A_m}{\epsilon'}$

$= 2 \cdot T \cdot \frac{B_m A_m}{\sin \epsilon'}$

$\ll \frac{T}{\epsilon'}$; wähle also $T \sim \epsilon'^2$, dann sind die Tuben ^{höher} die Fläche von etwa ϵ' . (Dieses ϵ können wir,

Das ϵ der Fläche d. Pál-Schächte ^{und} können wir unabhängig von der Zahl der gesprossenen Perennieren beliebig klein werden lassen; wenn wir h_p wieder $\sim 2^p$ Ohren haben, brauchen wir wieder $2^p - 1$ Pál-Schächte mit Gesamtfläche $\epsilon' \cdot 2^p$ und $\epsilon' \cdot 2^p \ll \epsilon$ für $\epsilon' = \epsilon_p' = \epsilon \cdot 2^{-p}$.

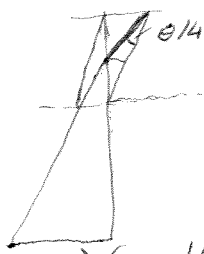
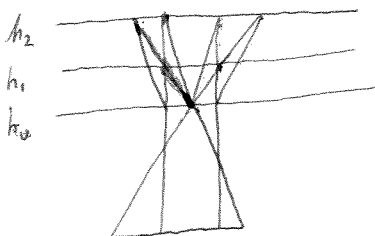
Wir müssen nun die Fläche der Ohren berechnen:

1. Generation: $h_1 = 1$ und $h_0 = 8 \Rightarrow$ Fläche (Ohr) $= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2(h_1 - h_0)}_{\text{Basis}} \cdot \frac{h_1 - h_0}{\tan \frac{\theta}{2}} = \frac{(h_1 - h_0)^2}{\tan \frac{\theta}{2}}$ Höhe (Dreieck)

\Rightarrow Fläche (Ohr) $= \frac{1}{2} \cdot 2(h_1 - h_0) \cdot (h_1 - h_0) \cdot \tan \frac{\theta}{2}$

\Rightarrow Fläche (2. Ohr) $= 2 \cdot (h_1 - h_0)^2 \tan \frac{\theta}{2} \sim (h_1 - h_0)^2 \cdot \frac{\theta}{2}$

Jetzt wieder iterieren



2-te Generation

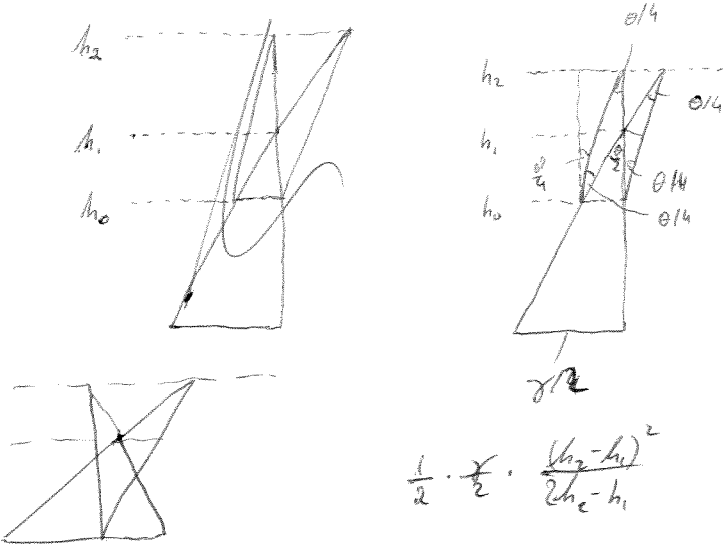
Fläche (Ohr⁽²⁾) $\sim (h_2 - h_1)^2 \cdot \frac{\theta}{4}$

Fläche (Ohr^(j)) $\sim (h_j - h_{j-1})^2 \cdot \frac{\theta}{2^j} \sim \frac{(1-8)^2}{p^2} \cdot \frac{\theta}{2^j}$

$h_j = 8 + (1-8) \cdot j/p$

$h_j - h_{j-1} = (1-8)/p$


\Rightarrow Gesamtfläche $\sum_{j=0}^{p-1} 2^j \cdot (1-8)^2 p^{-2} \cdot \theta \cdot 2^{-j} \sim (1-8)^2 p^{-1}$



~~$\sin \frac{\theta}{4} = \frac{\text{Höhe}}{h_2 - h_0}$
 $\tan \frac{\theta}{4} = \frac{\text{Höhe}}{\text{Basis}/2} \Rightarrow \text{Höhe} = \frac{\text{Basis}}{2} \tan \frac{\theta}{4} \sim \frac{\text{Basis}}{2} \cdot \frac{\theta}{4}$
 $\sin \frac{\theta}{4} = \frac{\sqrt{\text{Basis}^2 - (h_2 - h_0)^2}}{h_2 - h_0} \Rightarrow \text{Basis}^2 = (\tan(\theta/4) \cdot (h_2 - h_0))^2 + (h_2 - h_0)^2$
 $\sim 4(h_2 - h_1)^2$
 $\Rightarrow \text{Basis} \sim 2(h_2 - h_1)$~~

Kakeya große Zahl von Wahlen nicht-parallel Nadeln kann in eine kleine Menge

→ quantitativer? z.B. durch Ersetzung d. Nadeln durch $1 \times \delta$ -Rechtecke, oder durch Betrachten der δ -Umgebung von Kakeya-Mengen

→ 1. Fall: $\rightarrow \rightarrow$ Fläche $> \frac{1}{\log 1/\delta}$ (als Konsequenz von  mit Fläche $\sim \delta^2/\theta$)
Optimal: \rightarrow U. Keich

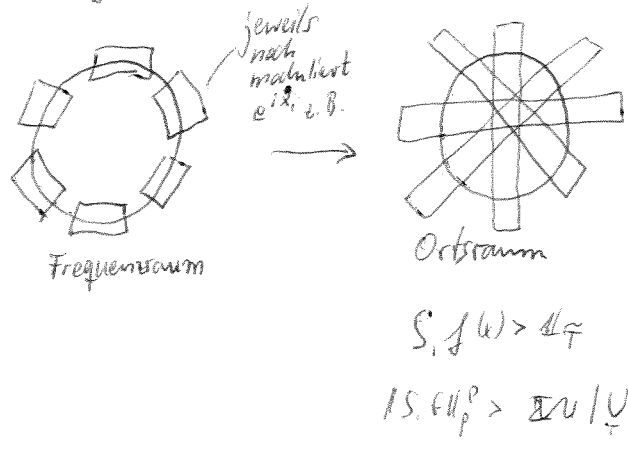
→ Vermutung: $\dim_H(\text{Besicovitch}) = d$ (Raumdimension)
 $\Leftrightarrow \text{Leb}(\delta\text{-Umgeb. v. Besicovitch}) > \delta^\epsilon \forall \epsilon > 0$

Man kann die Vermutung auch diskretisieren: sei $\Omega \subseteq S^{d-1}$ eine maximal δ -separierte Menge (d.h. $\text{card}(\Omega) \sim \delta^{1-d}$) und sei T_ω eine $1 \times \delta$ -Tube in Richtung ω

Dann sagt Kakeya: $|\bigcup_{\omega \in \Omega} T_\omega| \geq \frac{1}{\log 1/\delta}$ $|\bigcup_{\omega \in \Omega} T_\omega| < \frac{\log \log \delta^{-1}}{\log \delta^{-1}} \sum_{\omega \in \Omega} |T_\omega|$ (log-compression)

(vgl. Kombinatorik-Resultate über Interaktionen zw. Linien u. Punkten; jedoch formal, da Linien sich in Platen schneiden und Schnitt v. Tuben wieder eine Tube)

→ Anwendung in Fourieranalysis



2.8. Disc multipliziert nur L^2 -fkt:
 $f_T = \sum e_T f_T$
 $\Rightarrow \|f\|_p^p \approx \mathbb{E} \left| \sum e_T f_T \right|^p$
 $\sim \int (\sum |f_T|^2)^{p/2} \leq \delta^{-\epsilon} (\sum |T|)^{\frac{d-1}{d}}$
 $p > 2$
 $p/2 = d/(d-1)$