Wie viel Platz braucht man, um eine Nadel zu drehen?

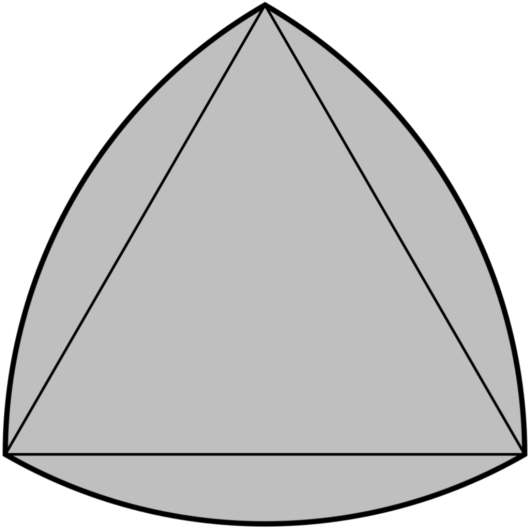
Konstantin Merz

Orientierungsvorlesung TUBS
19. Oktober 2021

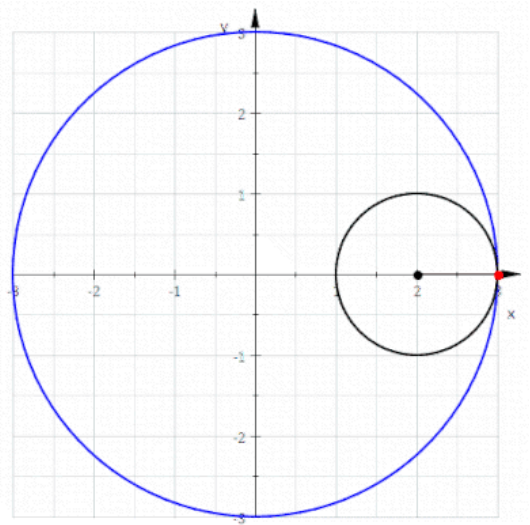
Geschichte 1

- Kakeya [Kak17] fragte nach der kleinsten Menge, in der man eine Nadel so bewegen (verschieben und rotieren) kann, sodass ihre Enden zum Schluß der Bewegung vertauscht sind. (Reuleaux-Dreieck und Deltoid)
- Pál [PŹ0]: kleinste *konvexe* Kakeya-Nadelmenge ist gleichseitiges Dreieck mit Höhe 1 und Fläche $3^{-1/2}$
- Besicovitch [Bes28]: $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists \text{ Kakeya-Nadelmengen mit Fläche} < \varepsilon}$
- Perron [Per28] und Schoenberg vereinfachten Besicovitchs ursprüngliche Konstruktion

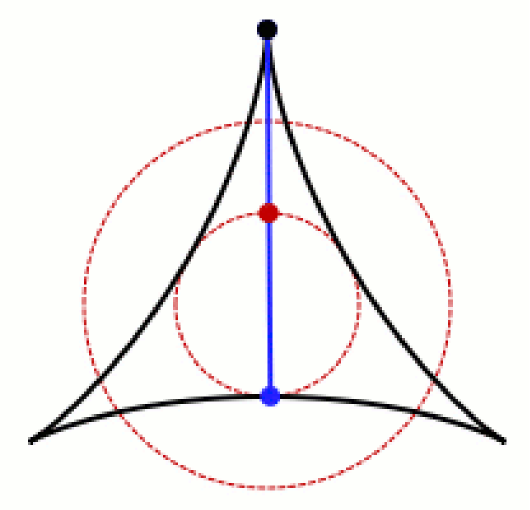
Reuleaux-Dreieck mit Fläche $(\pi - \sqrt{3})/2$



Konstruktion Deltoid ($R/r = 3$)

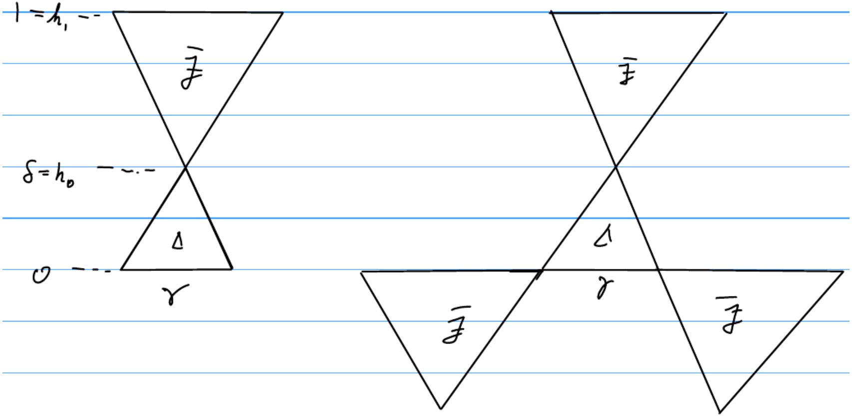


Bewegung der Nadel im Deltoid mit Fläche $\pi/8$



Damit Nadel hineinpasst: $1 + 2r = 2R$, sprich $R = 3/4$, $r = 1/4$.

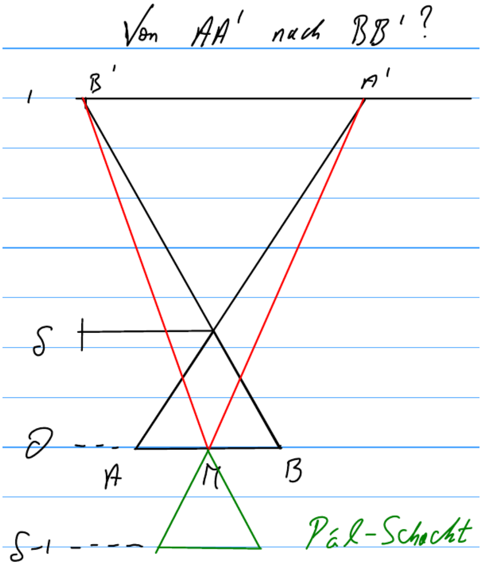
Ein Anfang



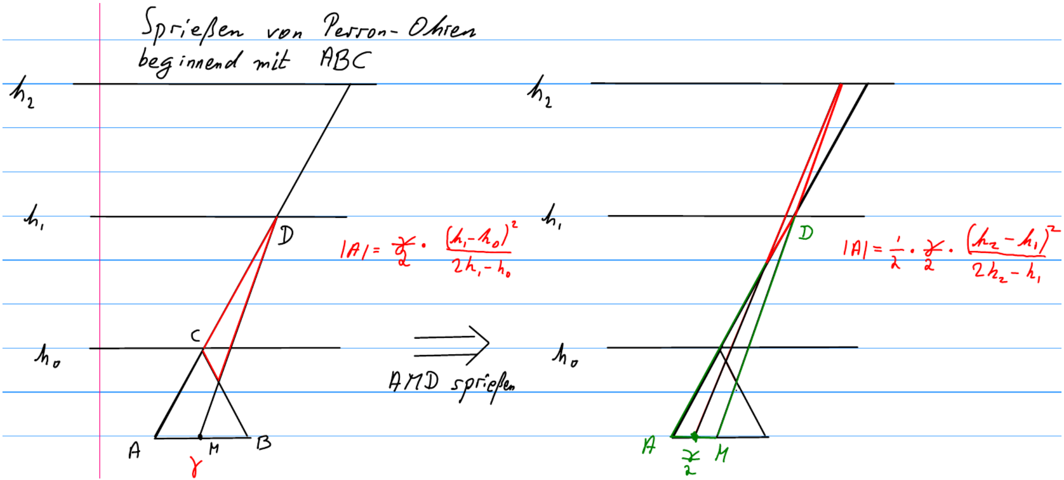
$$|\Delta \cup \overline{J}| = \frac{3\sqrt{3}\gamma^2 - 6\gamma + 2\sqrt{3}}{6}$$

Minimieren über γ gibt $\gamma_* = 3^{-1/2}$ mit $|\Delta \cup \overline{J}| = (2\sqrt{3})^{-1}$. Allerdings $6|\Delta \cup \overline{J}| > \pi/4$.

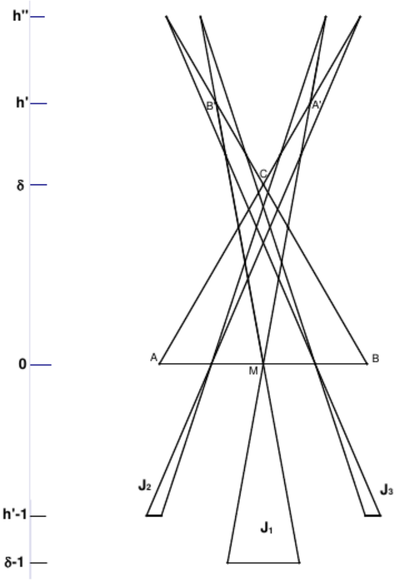
Pál-Schacht



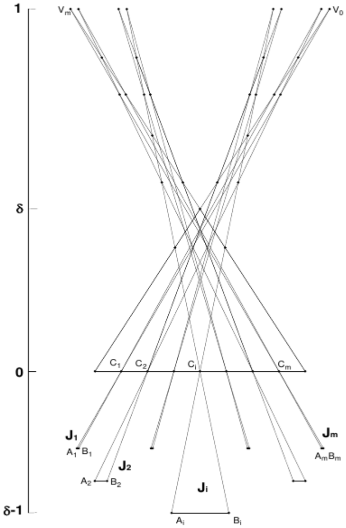
Perron-Ohren



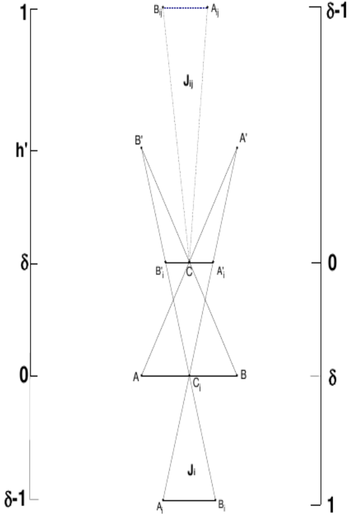
Perron-Ohren und Pál-Schächte



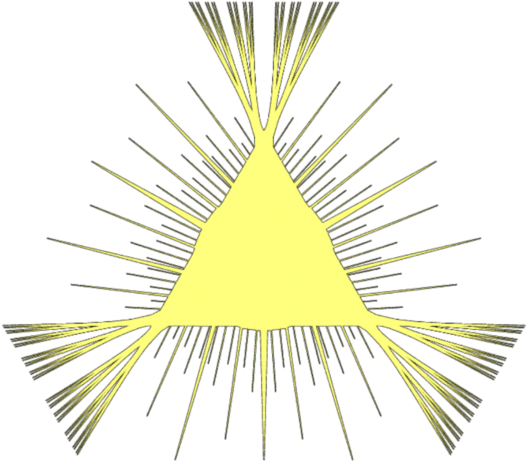
$m + 1$ Ohren und m Schächte



Sprießen der Schächte erster Generation und Erzeugung der zweiten Generation von Schächten



Finale Kakeya-Nadelmenge



Geschichte 2

- Van Alphen [Alp42]: Kakeya-Nadelmengen mit beliebig kleiner Fläche, die in einen Kreis mit Radius $2 + \varepsilon$ passen
- Cunningham [Cun71]: einfach zusammenhängende, beliebig kleine Kakeya-Nadelmengen, die in einen Kreis mit Radius 1 passen (Radius 1 ist optimal).
  Außerdem: sternförmige Kakeya-Nadelmengen haben Maß $> \pi/108$
- Besicovitch [Bes63]: "This is a good approximation of the script used by the author in his film with the same title which was produced by the Committee on Production of Films for the Mathematical Association of America." (I. Schoenberg in den Mathematical Reviews der AMS)
- Ausführliche Zusammenfassung: Gasiorek und Woolf [GW09]

Ausblick

- T. Tao [Tao09, Sect. 1.22]: Kakeya-Nadelmengen müssen positive Fläche haben (im Gegensatz zu Besicovitch-/ Kakeya-Mengen, die lediglich ein Einheitsintervall in jeder Richtung enthalten)
- Höhere Dimensionen?
- "Feinere" Messungen des Maßes von Kakeyamengen (z.B. Hausdorff-Dimension oder Kakeya-Maximalfunktion)? In $d = 2$ verstanden, aber höhere Dimensionen?
- Etliche Zusammenhänge mit Fourieranalysis, PDE, Inzidenzgeometrie, Kombinatorik, ...

Bild-Referenzen

Die offensichtlich nicht selbst-erstellten Bilder wurden von den Ko-Autoren der Wikipedia-Artikel über das Reuleaux-Dreieck (`https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle`), die Kakeya-Menge (`https://en.wikipedia.org/wiki/Kakeya_set`) und dem Deltoid (`https://en.wikipedia.org/wiki/Deltoid_curve`), sowie von Gasiorek und Woolf [GW09] erstellt.

Literatur I

- H.J. Alphen, *Uitbreiding van een stelling von Besicovitch*, Mathematica Zutphen **10** (1942), 144–157.
- A. S. Besicovitch, *On Kakeya's problem and a similar one*, Math. Z. **27** (1928), no. 1, 312–320.
- ______, *The Kakeya problem*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 697–706.
- F. Cunningham, Jr., *The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 114–129.
- Sean Gasiorek and Tina Woolf, *The Kakeya needle problem*, Bachelor's thesis, Mathematics Department, California Polytechnic State University, 2009.
- Soichi Kakeya, *Some problems on maximum and minimum regarding ovals*, Tohoku Science Reports **6** (1917), 71–88.
- Julius Pál, *Über ein elementares Variationsproblem*, Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser. **3** (1920), no. 2, 1–35.

Literatur II

- Oskar Perron, *Über einen Satz von Besicovitsch*, Math. Z. **28** (1928), no. 1, 383–386.
- Terence Tao, *Poincaré's legacies, pages from year two of a mathematical blog. Part I*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

DANKE!