Hardy-Räume

Studium der Hardyräume H^p gibt einem fundamentale Einsichten über Maximalfunktionen, singuläre Integrale und L^p-Räume.

~~A~~ Hauptaspekte: 1) Erweiterung von L^p, $f \in H^p$ sind temperierte Distributionen die punktweise f.ü. definiert werden können und in einem gewissen Sinne in L^p sind.

Für $p>1$ sind die Defs von H^p und L^p äquivalent

$p \leq 1$ in H^p können Fragen der harmon. Analysis besser beantwortet werden

2) Äquivalenz der Defs: H^p hat viele äquivalente Def., z.B

(i) maximale Definition: $f \in H^p :\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in S$ mit $\int \Phi = 1$ und die Maximalfunktion

$$(M_\Phi f)(x) = \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)| \text{ ist in } L^p.$$

Hardy-Littlewood: Φ_t sei char. Fkt auf Ball mit Radius t

(ii) Atomare Zerlegung: $H^p \ni f$ kann in sehr einfache Teile zerlegt werden.

3) Natur von H^p: Ob $f \in H^p$ für $p \leq 1$ ist, hängt nicht nur von der "Größe" von f, sondern auch von cancellation-Eigenschaften von f ab. D.h. in der maximalen Def. von H^p_Φ über M_Φ kann nicht die "normale" Maximumsfkt. verwendet werden, da diese sofort den Absolutwert von f verwendet. Außerdem muss Φ hinreichend glatt sein.

Die cancellation-Eigenschaften tauchen auch (sehr direkt) in der atomaren Def von H^p auf

4) Anwendbarkeit: Notwendige Eigenschaften, dass $f \in S'$ zu H^p gehört:

- f muss "beschränkt" sein
- f darf höchstens zu endlicher Ordnung punktweise singulär werden

Beispiele, die (lokal) äquivalent zu H^p-Distributionen sind:

- meromorphe Fkt.en
- beliebige Distributionen, die auf glatten Mannigfaltigkeiten getragen sind
- Lagrange'sche Distributionen

Bemerkungen 1) H^p besteht aus $f \in L^p$ die "stabil" unter der Wirkung von singulären Integralen sind

2) ~~H^p~~ H^1 ist der einzige H^p-Raum f. $p \leq 1$, der ein Banachraum ist

1 Maximale Charakterisierung von H^p $\left(x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \partial_x^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} \right)$

Erinnerung Approximation der $\mathbb{1}$ mittels des Poissonkerns $\underset{\overset{\uparrow}{\mathcal{S}}}{P}(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} \qquad P_t(x) = t^{-n} P\left(\frac{x}{t}\right)$

$\notin \mathcal{S}$ [illegible]

($f \in \mathcal{S}'$, $\Phi \in \mathcal{S} \Rightarrow f * \Phi$ wohldefinierte C^∞-Fkt, die evtl sehr langsam im ∞ abfällt)

Da $P_t \notin \mathcal{S}$, ist $f * \overset{i.A.}{\underset{\vee}{P_t}}$ nicht wohldefiniert für $f \in \mathcal{S}'$

Definition $f \in \mathcal{S}'$ heißt beschränkt, wenn $f * \Phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \ \forall \ \Phi \in \mathcal{S}$

Lemma $f \in \mathcal{S}'$ beschränkt $\Leftrightarrow$ die Translatierten von f bilden eine in $\mathcal{S}'$ beschränkte Menge.

Satz (Eigenschaften beschränkter Distros)

a) Sei $f \in \mathcal{S}'$ beschränkt und $h \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * h$ kann als Distribution definiert werden

b) $f * h$ ist in diesem Fall wieder beschränkt. Sind $h_i \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $(i=1,2) \Rightarrow f*(h_1 * h_2) = (f * h_1) * h_2$

c) $f * P_t$ ist wohldefiniert, wenn $f \in \mathcal{S}'$ beschränkt ist. Außerdem ist $f * P_t \in C_b^\infty$

Beweis a) Sei $\phi \in \mathcal{S}$: $\langle f * h, \phi \rangle \underset{\overset{\uparrow}{\tilde{\phi}(x) := \phi(-x)}}{=} \langle f * \tilde{\phi}, \tilde{h} \rangle \leq \| f * \tilde{\phi} \|_{L^\infty} \|h\|_{L^1} < \infty$

b) folgt aus a) durch supremums-Bildung

c) Schreibe $P = \phi * h + \Psi$ mit $\phi, \Psi \in \mathcal{S}$, $h \in L^1$. Dies ist möglich, denn $\hat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$ fällt also im ∞ schnell ab und ist lediglich bei $\xi = \vec{0}$ nicht glatt

Mit $h = P$, $\phi \in \mathcal{S}$ mit $\hat{\phi}(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| \leq 1 \\ 0 & |\xi| > 2 \end{cases}$, brauchen wir nur $\hat{\Psi}(\xi) = (1 - \hat{\phi}(\xi)) e^{-2\pi|\xi|}$ setzen.

$\hat{\phi} \hat{h} + \hat{\Psi} = \hat{P} \hat{\phi}(\xi) + (1 - \hat{\phi}) \hat{P}$ ok.

$\Rightarrow P_t = \phi_t * h_t + \Psi_t$ und $f * P_t = f * \Psi_t + (f * \phi_t) * h_t \Rightarrow$ Behauptung folgt aus b)

zur C^∞-heit: Da $(\partial_t^2 + \Delta_x) P_t(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = (f * P_t)(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ und u ist selbst auch harmonisch.

Definition Seien $\Phi \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{S}'$: $(M_\Phi f)(x) := \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|$ (Maximalfkt. einer best. Approx. der Identität)

Definition (Großmaximalfunktion): Sei $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta_i}\}$ eine endliche Familie von Halbnormen auf $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ die Teilmenge von $\mathcal{S}$, die durch diese Halbnormen kontrolliert werden, d.h.

$$\mathcal{S}_\mathcal{F} := \{\Phi \in \mathcal{S} : \|\Phi\|_{\alpha_i\beta_i} \leq 1 \quad \forall \|\cdot\|_{\alpha_i\beta_i} \in \mathcal{F}\}$$

Dann definieren wir $(\mathcal{M}_\mathcal{F} f)(x) := \sup_{\Phi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}} (M_\Phi f)(x)$

Definition Sei f eine beschränkte Distribution, $u(x,t) = (f * P_t)(x)$ das Poissonintegral von f.

$u^*(x) := \sup_{|x-y|\leq t} |u(y,t)|$ heißt nichttangentiale Maximalfunktion von u.

Satz 1 Sei $f \in \mathcal{S}'$, $0 < p \leq \infty$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) $\exists\ \Phi \in \mathcal{S}$ mit $\int \Phi \neq 0$, sodass $M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\exists$ eine Familie von Halbnormen $\mathcal{F}$, sodaß $\mathcal{M}_\mathcal{F} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

(iii) f ist beschränkt und $u^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$

Definition Ist (i), (ii) oder (iii) aus obigem Satz für $f \in \mathcal{S}'$ erfüllt, so sagen wir dass $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$

Bemerkungen über die Natur von H^p:

1) Für $1 < p \leq \infty$ sind diese Bedingungen äquivalent damit, dass $f \in L^p$.

Beweis "⇐" Sei $f \in L^p \Rightarrow (M_\Phi f)(x) \leq c\,(Mf)(x) \Rightarrow M_\Phi f \in L^p$ wegen der Maximalungl.

"⇒" Sei $\int \Phi = 1$, $M_\Phi f \in L^p \Rightarrow f * \Phi_{1/n}$ ist eine in L^p beschränkte Folge. Wegen der schwachen Kompaktheit von L^p als Dualraum von $L^{p'}$, gibt es $f_0 \in L^p$ und eine Teilfolge $f * \Phi_{1/n_j}$ mit $f * \Phi_{1/n_j} \longrightarrow f_0$. Da aber $f * \Phi_{1/n_j} \xrightarrow{\mathcal{S}'} f$, ~~konvergiert~~ ist $f = f_0 \in L^p$. ◻

2) Mit dem obigen Argument ("⇒") kann gezeigt werden, dass $H^1 \subseteq L^1$, die umgekehrte Richtung ist jedoch falsch: wie wir später sehen werden, muss $\int f = 0$ sein, damit $f \in H^1$ ist. Neben dieser cancellation-Eigenschaft brauchen wir weitere Bedingungen an die Größe von f. Ist z.B. $f|_B \geq 0$, so muss $f \log(1+f)$ auf jeder Kugel $B' \subsetneq B$ integrierbar sein, damit $f \in H^1$.

3) Die Bedingungen an cancellation und Größe von H^1-Funktionen lassen sich besonders schön an Atomen (die die Grundbausteine von H^1-Funktionen sind) darstellen.

Definition Eine Funktion a ist genau dann ein H^1-Atom assoziiert zu einer Kugel B, wenn

(i) $\operatorname{supp}(a) \subseteq B$

(ii) $|a| \le |B|^{-1}$ f.ü.

(iii) $\int a\,dx = 0$.

Man rechnet leicht nach, dass für $\Phi \in S$ für $\|M_\Phi a\|_{L^1} \le A(\alpha, \mathcal{X})$, d.h. $a \in H^1$.

$\Rightarrow$ auch Linearkombos $f = \sum \lambda_k a_k \in H^1$, wenn $\|\lambda_k\|_{\ell^1} \le A$

$\hookrightarrow$ zu B_k gehörend

weitere Bem. 4) Verbindung zwischen der geforderten Glattheit von Φ und den implizierten Bedingungen an die Momente von Elementen in H^p:

Sei z.B. $f \in L^1$ (z.B. mit kompaktem Träger), das $\int f\,dx = 0$ erfüllt. Ist zudem $f \in L^q$ für ein $q > 1 \Rightarrow f \in H^1$, denn: $M_\Phi f \le \underset{\overset{\uparrow}{L^1_{loc},\text{ da } f \in L^q_{loc}}}{Mf}$, weshalb $M_\Phi f \in L^1_{loc}$.

Die Glattheit von Φ zusammen mit den cancellation-Eigenschaften von f zeigen weiter $(M_\Phi f)(x) \le c|x|^{-n-1}$ für $x \notin \operatorname{supp} f$, d.h. $M_\Phi f \in L^1 \Rightarrow f \in H^1$.

Mit dem selben Argument ist $f \in H^p$ mit $\frac{n}{n+1} < p \le 1$

Hätten wir $f \in L^q$ mit $q = 1$ zu Beginn verlangt, wäre immer noch $f \in H^p$ mit $\frac{n}{n+1} < p < 1$

Damit $f \in H^p$ mit $p \le \frac{n}{n+1}$ ist, müssen die Momente von f weitere Bedingungen erfüllen

5) Die endliche Familie der Halbnormen $\mathcal{F}$ kann von f unabhängig gewählt werden, sodass $\mathcal{F}$ nur noch von p und n abhängt.

Sei $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N = \{\|\cdot\|_{\alpha\beta} : |\alpha| \le N, |\beta| \le N\}$. Ist N (durch p ausgedrückt) groß, so kann man die drei Größen $\|M_\Phi f\|_{L^p}$, $\|M_{\mathcal{F}_N} f\|$ und $\|u^*\|_{L^p}$ jeweils miteinander vergleichen und die Schranken sind von f unabhängig, d.h. jede kann als "Norm" auf H^p verwendet werden, auch wenn es eine richtige Norm nur für $p \ge 1$ gibt. Wir nennen diese Größen nun trotzdem Norm und schreiben manchmal $\|f\|_{H^p}$.

"$\|\cdot\|_{H^p}^p$" ist für $p \le 1$ subadditiv, definiert also eine Metrik, welche die Topologie auf H^p definiert. H^p-Konvergenz impliziert also S'-Konvergenz (s.h. 7))

6) Die Großmaximalfunktion kann bestimmte glatte Mittelungen unserer Distribution kontrollieren.

Sei dazu N fix, $\mathcal{F}_N$ eine endliche Familie von Halbnormen und $Mf = M_{\mathcal{F}_N} f$.

Sei ϕ eine auf einer Kugel B getragene Bump-Funktion, dann hat man

$|\langle f, \phi \rangle| \leq c\, Mf(\bar{x})$ für ein $\bar{x} \in B$ (folgt aus der Def von M)

Dafür muss ϕ noch $|\partial^\alpha \phi| \leq r^{-n-|\alpha|}$ für $|\alpha| \leq N$ erfüllen, wo r der Radius von B ist.

$\hookrightarrow$ gilt auch für beliebige Familien $\mathcal{F}$ von Halbnormen, da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_N$.

7) Ist $f \in H^p$, $\Phi \in \mathcal{S}$ $\Rightarrow$ die C^∞-Funktion $f * \Phi \in L^r$ $\forall r \geq p$.

nicht-tangentiale Maximalfkt

Beweis 1) Da $|(f * \Phi)(x)| \leq M_\Phi^* f(x) \Rightarrow f * \Phi \in L^p$, da $f \in H^p$ $\quad (M_\Phi^* f)(x) = \sup_{|x-y|<t} |(f * \Phi_t)(y)|$

2) Per Definition von M_Φ^* ist

$|(f * \Phi_1)(x)| \leq (M_\Phi^* f)(y)$ $\forall y$ mit $|x-y| < 1$, weshalb

$$|(f * \Phi_1)(x)|^p \leq \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} (M_\Phi^* f)(y)^p \, dy \qquad (B_x = B_x(1))$$

$$= A \|f\|_{H^p}^p \Rightarrow f * \Phi_1 \in L^\infty \xrightarrow[f * \Phi \in L^p]{} f * \Phi \in L^r \ \forall r \in [p, \infty]$$

Aus diesem Argument sieht man auch, dass $\mathcal{S}'$-Konvergenz aus H^p-Konvergenz folgt. $[\langle f - f_n, \Phi \rangle = ((f - f_n) * \Phi)(x = 0)]$

Von nun an $p \leq 1$! $(p > 1 : L^p \text{"}\cong\text{"} H^p)$

2 Atomare Zerlegung von H^p

Zerlegung von $f \in H^p$ in eine Summe von Atomen mittels einer Calderón-Zygmund-Zerlegung

2.1 Eine Variante der Calderón-Zygmund-Zerlegung

Statt des üblichen Maximaloperators werden wir $M = M_{\mathcal{F}}$ für eine endliche Familie $\mathcal{F}$ von Halbnormen verwenden. Genauer gesagt werden wir eigentlich nur einen Maximaloperator M_Φ für eine fixierte C_c^∞-Fkt. Φ verwenden:

$$(M_0 f)(x) := (M_\Phi f)(x) = \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)| \qquad \operatorname{supp} \Phi \subset B_0(1), \ \int \Phi \neq 0$$

Behauptung Sei $f \in \overset{S'}{\overset{\cup}{L_{loc}}}$ mit $Mf \in L^p$ $(p \leq 1)$ und $\alpha > 0$.

Dann gibt es eine Zerlegung $f = g + b$, $b = \sum_k b_k$ und eine Familie von Würfeln $\{Q_k^*\}$, sodaß:

(i) $|g(x)| \leq c\alpha$ fast überall

(ii) $\operatorname{supp}(b_k) \subseteq Q_k^*$, $\quad \int_{\mathbb{R}^n} (M_0 b_k)^p(x)\,dx \leq c \int_{Q_k^*} (Mf)^p(x)\,dx$, $\quad \int b_k\,dx = 0$.

(iii) $\{Q_k^*\}$ haben die "beschränkte Schnitte"-Eigenschaft und erfüllen

$$\bigcup_k Q_k^* = \{x : (Mf)(x) > \alpha\}$$

Korollar $\forall d \in \mathbb{N}$ kann man die obige Zerlegung $f = g + b$ so umordnen, dass die b_k zusätzlich

$$\int b_k q\,dx = 0 \quad \text{für alle Polynome } q \text{ vom Grad } d \text{ erfüllen.}$$

2.2 Atomare Zerlegung

Definition (H^p-Atom) Eine Funktion a heißt genau dann H^p-Atom zur Kugel B, wenn

(i) $\operatorname{supp}(a) \subseteq B$

(ii) $|a(x)| \leq |B|^{-1/p}$ für fast alle $x \in \operatorname{supp}(a)$ $\left(\Big\} \Rightarrow \int |a(x)|^p\,dx \leq 1 \right)$

(iii) $\int x^\beta a(x)\,dx = 0$ $\forall \beta$ mit $|\beta| \leq n(\frac{1}{p} - 1)$ $\left(\Rightarrow \int (M_0 a)(x)^p\,dx \leq c \right)$

↳ geeigneter Maximaloperator

natürlich darf diese Bedingung auch für größere β gelten

→ diese Bedingung kann abgeschwächt werden: es reicht

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |a|^q\,dx \right)^{1/q} \leq |B|^{-1/p} \quad \text{für} \begin{cases} q > 1, \text{ wenn } p = 1 \\ q = 1, \text{ wenn } p < 1 \end{cases}$$ zu verlangen

(um das zu sehen, verwende Eigenschaften des Standard Maximaloperators)

Behauptung Ist a ein H^p-Atom, so ist $\int (M_{\Phi_0} f(x))^p dx \le C$ mit $\Phi \in C_c^\infty$, $\int \Phi \neq 0$ supp $\Phi \subseteq B_0(1)$
d.h. $a \in H^p(\mathbb{R}^n)$)

Beweis $M_0 f(x) = \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|$ mit ~~Φ~~ obigem Φ.

Wegen $|a(x)| \le |B|^{-1/p}$ f.ü. ist $M_0 a(x) \le c|B|^{-1/p}$; diese Abschätzung verwenden wir für $x \in B^*$, der Kugel, die konzentrisch um B liegt und doppelten Radius hat.

Für $x \in {}^cB^*$ verwenden wir $\int x^P a(x) dx = 0$ und schreiben

$$\underbrace{(a * \Phi_t)(x)}_{\text{muss in } L^p \text{ sein}} = \int a(y) \Phi_t(x-y) dy = \int_B a(y) [\Phi_t(x-y) - q_{x,t}(y)] dy$$

$q_{x,t}$ ↓ Taylor-Polynom vom Grad d von $y \mapsto \Phi_t(x-y)$ entwickelt um $\bar{x}$, dem Mittelpunkt von B, $d = [n(\frac{1}{p}-1)]$

Die Fehlerabschätzung aus dem Satz von Taylor gibt $|\Phi_t(x-y) - q_{x,t}(y)| \le A \frac{|y-\bar{x}|^{d+1}}{t^{n+d+1}}$

Da $y \in B$, ~~Φ~~ $x \notin B^*$, $\Phi(z) = 0$ f. $|z| \ge 1 \Rightarrow t \ge c|x - \bar{x}|$.

$\Rightarrow (M_0 a)(x) \le c|B|^{-1/p} \left(\frac{r}{|x-\bar{x}|}\right)^{n+d+1}$ $\forall x \notin B^* \Rightarrow M_0 a \in L^p$, da $(n+d+1) \cdot p > n$ ☒

↳ schöne Katastrophe

Satz 1 Sei $\{a_k\}$ eine Familie von H^p-Atomen und $\{d_k\}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\sum_{k\in\mathbb{N}} |d_k| < \infty$, **dann** konvergiert die Reihe $f = \sum d_k a_k$ in $\mathcal{S}'$ und $f \in H^p$ mit $\|f\|_{H^p} \le A \|(d_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_p$

Beweis Wenn $\sum_k d_k a_k$ endlich ist, so ist $M_0 f = M_0 (\sum_k d_k a_k) \le \sum |d_k| M_0(a_k)$ und

$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$a+b \le a+b+2\sqrt{ab}$

$$\left(\sum |d_k| M_0(a_k)\right)^p \underset{p\le 1 + \text{konkav}}{\le} \sum |d_k|^p |M_0(a_k)|^p$$

$$\longrightarrow \int |(M_0 f)(x)|^p dx \le \underbrace{\sum |d_k|^p}_{= \|d_k\|_p^p \le A\|d_k\|_1} \underbrace{\int |(M_0 a_k)(x)|^p dx}_{\le C} \le A \|d_k\|_1$$

$\Rightarrow$ Konvergenz in H^p

$\Rightarrow$ Konvergenz in $\mathcal{S}'$ ☒

Man muss also noch zeigen, dass sich f so in H^p-Atome zerlegen lässt.

Satz 2 Sei $p \le 1$, dann lässt sich jedes $f \in H^p$ durch $f = \sum d_k a_k$ darstellen, wobei die Reihe in $\mathcal{S}'$ konvergiert. Zudem ist ~~$\|f\|_{H^p} \le A \|(d_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_p$~~ $\|(d_k)_{k\in\mathbb{N}}\| \le A \|f\|_{H^p}$

Bemerkungen 1) Der Unterraum der endlichen Linearkombis von H^p-Atomen ist dicht in H^p, was aus der Norm-Konvergenz der Reihe $\sum \lambda_n a_n$ folgt

Dieser Unterraum besteht aus allen beschränkten Fkten mit kompakten Träger, die $\int x^\beta a(x)\,dx = 0 \;\; \forall\, |\beta| \leq \lfloor n(\frac{1}{p}-1) \rfloor$ erfüllen.

sh. maximale Charakterisierung von H^p, $f \in H^p \Leftrightarrow M_\Phi f \in L^p$ für ein $\Phi \in \mathcal{S}$

3 Singuläre Integrale

H^p-Theorie erlaubt es uns Maximalfkten (~~die man als sing. Integrale auffassen sollte~~) und allgemein singuläre Integrale, die allg auf L^p $(p>1)$ definiert waren, auch für $p \leq 1$ zu studieren.

Ziel ~~H~~ H^p-Beschränktheit von singulären Integralen auch für $0 < p \leq 1$ zeigen

Hier nur translationsinvariante T's $\left((Tf)(x) = \int K(x,y) f(y)\,dy \right.$, wir starten z.B mit T, sodaß $\|T\|_{L^2 \to L^2} \leq A$. Da T translationsinvariant ist, $\overset{K}{A}$ und L^2-beschr. gibt es einen beschränkten Fouriermultiplikator m sodaß

$$\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi) \;,\; |m(\xi)| \leq A,\; f \in L^2 \xrightarrow{\text{Plancherel}} \|Tf\|_{L^2} \leq \|m\|_\infty \|f\|_2$$

Sei K durch $\hat{K} = m$ gegeben, dann ist $Tf = \hat{K} * f$ (zumindest für $f \in \mathcal{S}$).

1.) Wir machen nun wieder die a-priori-Annahme, dass K außerhalb des Ursprungs durch eine L^1_{loc}-Fkt gegeben ist, welche wir $K(x)$ nennen $\ni$ $(Tf)(x) = \int K(x-y) f(y)\,dy$ in folgendem Sinne: ist $f \in L^2$ mit kompaktem Träger, dann gilt $(Tf)(x) = \int K(x-y) f(y)\,dy \;\; \forall\, x \notin \operatorname{supp}(f)$

2.) ~~K fällt~~ Die Differenz $K(x,y) - K(x,\bar{y})$ fällt außerhalb d. Singularität schnell genug ab,

d.h. ~~$\int K(x,y) - K($~~ $\int_{|x| > 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\,dx \leq A \;\; \forall\, y \neq 0$

$\Rightarrow$ wir wissen, dass dann auch $\|T\|_{L^1 \to L^1} \leq A'$, d.h. T ist auch auf $H^1 \subseteq L^1$ wohldefiniert.

Satz 3 Erfüllt T die folgenden Bedingungen:

(i) T ist translationsinvariant, d.h. $\exists\, m$ mit $\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$, $|m(\xi)| \le A \;\forall \xi$

(ii) T ist L^2-beschr., d.h. $\|Tf\|_{L^2} \le A\|f\|_{L^2}$

(iii) $\exists$ eine Distribution K mit $\hat{K} = m$, d.h. $Tf = K * f$

(iv) K ist abseits von 0 lokal integrierbar, d.h. $(Tf)(x) =$ ~~[illegible] f(y) dy~~ $\int K(x-y) f(y)\, dy$ im Sinne, dass, wenn $f \in L^2$ kompakt getragen, dann gilt $- " -$ $\forall x \notin \operatorname{supp}(f)$

(v) $\int\limits_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, d\cancel{x}_{\xi} \le A \quad \forall\, y \neq 0$

Dann ist T von H^1 nach L^1 beschr., d.h. $\|Tf\|_{L^1} \le A'\|f\|_{H^1}$, wobei A' nur von den Konstanten in (ii) und (v) abhängt; man kann sogar $H^1 \to H^1$-Beschränktheit zeigen

Beweis Da sich $f \in H^p$ durch H^p-Atome a ausdrücken lässt, reicht es die Aussage für ~~$a \in H^1$~~ ein H^1-Atom a zu zeigen. Da T translationsinvariant ist, genügt es anzunehmen, dass $\operatorname{supp}(a) \subseteq \underset{B}{\underset{\shortparallel}{B_r(0)}}$. Sei $B^* = B_{2r}(0)$, ~~dh~~ dann haben wir für $x \in B^*$

$$\|Ta\chi_{B^*}\|^2 = \int\limits_{B^*} |Ta(x)|^2 dx \le A^2 \int |a(x)|^2 dx \le A^2 |B| \cdot |B|^{-2} = A^2 |B|^{-1}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{B^*} |Ta(x)|^2 dx \overset{CSU}{\le} A|B|^{-1} \cdot |B^*| = 2^n A$$

Sei nun $x \notin B^*$, dann verwenden wir die Darst. $(Tf)(x) = \int K(x-y) f(y)\, dy$, d.h. $(Ta)(x) = \int [K(x-y) - K(x)]\, a(y)\, dy$, da $\int a\, dx = 0$ f. $a \in H^1$. Nun können wir (v) verwenden, da $|x| > 2r$, $|y| < r$ und erhalten

$$\int\limits_{{}^cB^*} |(Ta)(x)|\, dx \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vom } x\text{-Integral über } K(x,y)-K(x)}}{A} \int |a(y)|\, dy \le A \qquad ▨$$

[Weak-type-ineq: $\mu\{x : (Tf)(x) \ge \alpha\} \le \frac{A'}{\alpha} \int |f|\, dx$]

Bemerkung Unter obigen Voraussetzungen ist T sogar $H^1 \to H^1$-beschränkt. Um dies zu zeigen braucht man entweder ein weiteres Argument oder man verstärkt die Voraussetzung an die Regularität des Kerns $\int\limits_{|x|>2|y|} |K(x,y) - K(x)|\, dx \le A$ → Vorteil: man bekommt H^p-Beschränktheit auch für $0 < p \le 1$

(v') $\exists\, \gamma > 0$ sodaß $K \in C^{\lfloor\gamma\rfloor}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und K erfüllt die Schranken

$$|\partial_x^\beta K(x)| \le A |x|^{-n-\beta} \quad \text{f.} \quad |\beta| \le \lfloor\gamma\rfloor \quad \text{und}$$

$$|\partial_x^\beta K(x-y) - \partial_x^\beta K(x)| \le \cancel{B \frac{|y|^{\gamma-\lfloor\gamma\rfloor}}{|x|^{n+\gamma}}} \quad A \le \frac{|y|^{\gamma-\lfloor\gamma\rfloor}}{|x|^{n+\gamma}} \qquad |\beta| = \lfloor\gamma\rfloor, \ |x| \ge 2|y|$$

klar: (v') $\Rightarrow$ (v).

Def Ist nun $f \in H^p$ $(p \le 1)$, so ist $K * f$ als Faltung zweier Distributionen i.A. nicht sinnvoll.
$\Rightarrow$ verwende die speziellen Eigenschaften von K und f.
Sei dazu $\phi \in C_c^\infty$ fix mit $\phi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le \frac{1}{2} \\ 0 & |x| \ge 1 \end{cases}$, $K_0 \equiv K\phi$, $K_\infty = K(1-\phi)$, d.h. $K = K_0 + K_\infty$.
"Bump-Fkt" $\Rightarrow$ $f * \tilde{\phi}$ kann durch Mf kontrolliert werden

Da K_0 kompakt getragen ist, ist $K_0 * f$ eine sinnvoll definierte Distro [illegible]
$K_\infty * f$ wird durch $\langle K_\infty * f, \Phi \rangle = \langle f * \tilde{\Phi}, \tilde{K}_0 \rangle$ $(\phi \in \mathcal{S},\ \tilde{\phi}(x) = \overline{\phi}(-x))$ definiert. $\to$ mit CSU
$|\cdot| \le (M_{\Phi}^{*} f)(x) \in L^1$, da $f \in H^p$ und der Maximalcharakterisierung

sehen wir, dass $K_\infty * f$ so wohldefiniert ist.
Weiter sehen wir: ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von H^p-Elementen, die in $\|\cdot\|_{H^p}$ konvergieren, so konvergiert $Tf_k = K * f_k$ in $\mathcal{S}'$.

<u>Satz 4</u> Sei $K \in \mathcal{S}'$, $\hat{K}$ eine beschränkte Fkt. und K erfülle (v') weg vom Ursprung. Ist $p \le 1$, sodaß $\gamma > n(\frac{1}{p} - 1)$, dann ist T, gegeben durch $Tf = K * f$, $H^p \to H^p$-beschränkt.

4.1 Charakterisierung durch harmonische Funktionen – Verallgemeinerter Satz von Fatou

Behauptung 1 Sei u harmonisch auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$, $0<p\leq\infty \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nicht-tangentiale Maximalfkt}}}{u^*} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn

$u(x,t) = (P_t * f)(x)$ für ein $f \in H^p$

Außerdem ist $\|u^*\|_{L^p} \simeq \|f\|_{H^p}$

↳ kommt vom konjugierten Poissonkern $Q^{(j)}(t) = \frac{c_n x_j}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}$

4.2 Konjugiert harmonische Funktionen

Sei $p \in (1-\frac{1}{n}, \infty)$ ⟨ $n=1$: $p \in (0,\infty)$; $n \in \mathbb{N}$ beinhaltet automatisch den interessanten Fall $p=1$

Gegeben seien $n+1$ Funktionen $u_0, u_1 .. u_n$ auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$, die die verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Bedingungen $\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ und $\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ $0 \leq j,k \leq n$ erfüllen $(x_0 \equiv t)$

Lösungen der verallgemeinerten C.-R.-Bedingungen haben folgende Eigenschaften:

(i) Die u_j sind harmonisch

(ii) Die C.R.-Gleichungen sind äquivalent mit der Existenz einer harmonischen Funktion H auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$, sodaß $u_j = \frac{\partial H}{\partial x_j}$ $j=0,1...n$

(iii) Für $n=1$ sind dies die üblichen C.-R.-Gleichungen, die implizieren, dass $F = u_0 + i u_1$ eine holomorphe Funktion von $x_0 + i x_1$ ist.

Behauptung 2 Sei $1-\frac{1}{n} < p < \infty$ und u eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

Dann: $u^* \in L^p$ (d.h. u erfüllt die H^p-Eigenschaft) $\Longleftrightarrow \exists F = (u_0, u_1 ... u_n)$ mit $u_0 = u$, welches die verallgemeinerten C.-R.-Bedingungen ~~erfüllt~~ und $\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,t)|^p dx < \infty$ erfüllt.

In diesem Fall ist $\|u^*\|_{L^p}^p = \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,t)|^p dx$ und die Abbildung $F \mapsto u_0 = u$ ist bijektiv.

4.3 Charakterisierung durch Riesz-Transformationen

Definition Sei $j = 1 \dots n$, dann ist der konjugierte Poisson-Kern durch

$$Q^{(j)}(x) = \frac{c_n x_j}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{Q}_t^{(j)}(\xi) = i \frac{\xi_j}{|\xi|} e^{-2\pi|\xi| t} \quad \text{gegeben}$$

$\hookrightarrow Q_t^{(j)}(x) = t^{-n} Q^{(j)}(x/t)$

Die zugehörige Riesz-Transformation ist durch $R_j f = K^{(j)} * f$ mit $K^{(j)}(x) = c_n \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$

bzw $\hat{K}^{(j)}(\xi) = i \frac{\xi_j}{|\xi|}$ gegeben. $\left(\lim_{t \to 0} Q_t^{(j)}\right)$

Definition $S' \ni f$ heißt genau dann im Unendlichen eingeschränkt, wenn $\forall\, r < \infty$ groß genug die Funktion $f * \Phi \in L^r(\mathbb{R}^n)$ $\forall\, \Phi \in S$ ist.

~~Bemerkung Ist $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ im ∞ eingeschränkt $\Rightarrow$~~

Lemma
1) $f \in H^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f$ ist im ∞ eingeschränkt für $r \geq p$
2) $R_j f$ ist als Distribution wohldefiniert und zwar wie folgt: schreibt man $R_j f = K * f$, so zerlegen wir $K = K_0 + K_\infty$, wo K_0 nur ~~im~~ um den Ursprung getragen ist und K_∞ eine beschränkte Funktion ist, die wie $O(|x|^{-n})$ abfällt
$\Rightarrow K_0 * f$ ist $\forall f \in S'$ sinnvoll definiert und $K_\infty * f$ definieren wir $\forall\, \Phi \in S$ wieder als
$\langle K_\infty * f, \Phi \rangle = \langle f * \tilde{\Phi}, \tilde{K}_\infty \rangle$ mit dem Fakt, dass $\tilde{K} \in L^{r'}$ $\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1\right)$

Definition $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $R_j f \in L^p(\mathbb{R}^n) :\Leftrightarrow \exists\, A > 0$ sodass $\forall\, \phi \in S$ mit $\int \phi = 1$, $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon)$ gilt

$$\| f * \phi_\epsilon \|_{L^p} + \sum_j \| R_j f * \phi_\epsilon \|_{L^p} \leq A \quad \forall\, \epsilon > 0$$

Behauptung 3 Sei $1 - \frac{1}{n} < p < \infty$ und f eine im ∞ eingeschränkte Distribution.

Dann $f \in H^p \Leftrightarrow f \in L^p$ und $R_j f \in L^p$ im Sinne der obigen Definition.

4.4 Charakterisierung durch ein Flächenintegral

Idee: nicht-tangentiale Kontrolle einer harmonischen Funktion $\Leftrightarrow$ Kontrolle über eine bestimmte Quadratfunktion (hier: das verallgemeinerte Flächenintegral von Lusin)

Definition
- Sei $\Gamma(x) = \{(y,t) : |x-y| < t\}$ der Konus mit Vertex $x \in \mathbb{R}^n$
- $|\nabla u|^2 = |\partial_t u|^2 + |\nabla_x u|^2$
- Quadratfunktion von u auf Γ: $(Su)(x) = \left(\int_{\Gamma(x)} |\nabla u(y,t)|^2 t^{1-n} \, dy \, dt \right)^{1/2}$

Behauptung 4 Sei $0 < p < \infty$ und u eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$, die im ∞ verschwindet, in dem Sinne, dass $\lim_{t \to \infty} u(x,t) = 0$.

Dann $u \in H^p$ (d.h. $u^* \in L^p$) $\Leftrightarrow Su \in L^p$.

In diesem Fall ist $\|u^*\|_{L^p} \cong \|Su\|_{L^p}$.

Bemerkung Dies ist die "globale" Version des "lokalen" Analogons, welches folgendes besagt:

Sei u harmonisch: $\{x \in \mathbb{R}^n : u^*(x) < \infty\} \underset{\uparrow}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : (Su)(x) < \infty\}$

bis auf eine Menge vom Maß Null

5 Weitere Resultate

A Allgemeine Eigenschaften von H^p-Räumen

5.1 Sei $p \leq 1$, dann:

1) Vollständigkeit: H^p ist in der Metrik $d(f,g) = \|f-g\|_{H^p}^p$ vollständig

2) Schwache Kompaktheit der Einheitskugel Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^p$ eine beschränkte Folge, dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und $f\in H^p$, sodaß $f_{n_j} \xrightarrow{\mathcal{S}'} f$

3) Approximation in Norm Sei $f\in H^p$, $\Phi\in\mathcal{S}$ mit $\int\Phi = 1$. Dann ist $\|f * \Phi_t\|_{H^p} \leq c\|f\|_{H^p}$ und $f * \Phi_t \xrightarrow{t\to 0} f$ in H^p-"Norm"

$f\in H^p$ f.ü. ← pktweise definiert

4) $\forall f\in H^p$ $\exists$ eine zugehörige Funktion $f_0(x)$ die f.ü. auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist, sodaß $\forall \Phi\in\mathcal{S}$ mit $\int\Phi = 1$ gilt: $(f * \Phi_t)(x) \xrightarrow{t\to 0} f_0(x)$ für fast alle $x\in\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: $f_0(x)$ kann fast überall verschwinden, obwohl f nicht Null ist! Nimm z.B. $f = d\mu$, wobei μ ein absolut singuläres Maß ist

5.2 Dichte Unterräume von H^p: 0) Raum aller endlichen Linearkombos von H^p-Atomen

1) $\{f\in\mathcal{S} : \int x^\alpha f(x)\,dx = 0 \;\forall\alpha\in\mathbb{N}^n\}$

2) $\{f\in \underset{\uparrow}{C_{c,b}} : \int x^\alpha f(x)\,dx \;\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| < N\}$, wobei $N\in\mathbb{N}$ fix mit $N > n(\frac{1}{p}-1)$ ist

kompakt getragen, beschränkt

5.3 Sei $f\in H^1$ auf einer offenen Menge $U\subseteq\mathbb{R}^n$ nicht-negativ $\Rightarrow f\in\{|g|\log(1+|g|)\in L^1(K) : K\subseteq U$ kompakt$\}$ $\forall K\subseteq U$ kompakt

In diesem Fall gibt es eine geeignete Abschneidefunktion η und $\Phi\in\mathcal{S}$ auf der Einheitskugel getragen, sodaß $(M_\Phi f)(x) \geq c\,M(f\eta)(x)$ $\forall x\in K$.

5.4 Sei $p \leq 1$, $f \in H^p$.

a) $\hat{f}$ ist auf $\mathbb{R}^n$ stetig und $|\hat{f}(\xi)| \leq A |\xi|^{n(\frac{1}{p}-1)} \|f\|_{H^p}$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

b) Für ξ nahe $\vec{0}$ gilt zudem $\lim\limits_{|\xi| \to 0} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{n(p^{-1}-1)}} = 0$, d.h. $\hat{f}(\xi)$ wächst wie $|\xi|^{n(\frac{1}{p}-1)+\varepsilon}$ bei $\vec{0}$

c) Dies zeigt, dass die Bedingungen $|\partial_x^\beta K(x)| \leq A |x|^{-n-\beta}$ $\forall$ $|\beta| < \lfloor \gamma \rfloor$ und

$$|\partial_x^\beta K(x-y) - \partial_x^\beta K(x)| \leq A \frac{|y|^{\gamma - \lfloor \gamma \rfloor}}{|x|^{n+\gamma}} \quad \text{für } |\beta| = \lfloor \gamma \rfloor \text{ und } |y| \leq \frac{|x|}{2}$$

für die sinnvolle Definition von singulären Integralen auf H^p notwendig sind

<u>Denn</u> für $f \in H^1$ ist (wegen der Atomzerlegung) $\int f = 0$. Allgemeiner ist $f \in L^1 \cap H^p$, dann ist $\int x^\alpha f = 0$ $\forall$ $|\alpha| \leq n(\frac{1}{p}-1)$ und $x^\alpha f \in L^1$

d) Für $1 < p \leq 2$, $f \in H^p$ gilt zudem (Hardy-Littlewood):

$$\left(\int |\hat{f}(\xi)|^p |\xi|^{(p-2)n} d\xi \right)^{1/p} \leq A_p \|f\|_{H^p}$$

<u>"Beweis"</u> a) Verwende $f * \Phi_t \in L^1$ und $\|f * \Phi_t\|_{L^1} \leq A\, t^{-n(p^{-1}-1)} \|f\|_{H^p}$ (sh. Beweis der maximalen Charakterisierung von H^p)

b) Verwende a) auf einer dichten Teilmenge von H^p

d) Folgt aus der atomaren Zerlegung

<u>5.5</u> Beispiele, die die Natur von H^p illustrieren

a) Sei $f \in C_{cb}(\mathbb{R}^n)$, dann: $f \in H^p \Leftrightarrow \int x^\alpha f(x) dx = 0$ $\forall$ $|\alpha| \leq n(\frac{1}{p}-1)$
kompakt getragen, beschränkt

b) Sei $p < 1$, $\mu \in L^1$ (bzw. sogar endliches Maß) mit kompaktem Träger, dann: $\mu \in H^p \Leftrightarrow \int x^\alpha \mu(x) dx = 0$ $\forall$ $|\alpha| \leq n(\frac{1}{p}-1)$

c) Sei $F = \sum\limits_{j=0}^{J} c_j \underset{\uparrow}{\delta^{(j)}}(x-a_j)$, dann: $F \in H^p \Leftrightarrow$ (i) Sei r die maximale Zahl d. Ableitungen von δ, dann ist $r < n(\frac{1}{p}-1)$
j-te Ableitung d. Dirac-Distro

(ii) $F(x^\alpha) = 0$ $\forall$ $|\alpha| \leq n(\frac{1}{p}-1)$

Insbesondere also: Sei $\delta_a = \delta(x-a)$, dann: $\delta_a - \delta_0 \in H^p \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < p < 1$

$\partial_{x_j}(\delta_0 - \delta_a) \in H^p \Leftarrow \frac{n}{n+2} < p < \frac{n}{n+1}$ etc.

d) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt (bzw. vll sogar glatt) und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ nicht-negativ mit $f(x) \simeq d(x)^{-N}$, wobei $d(x) = \operatorname{dist}(x, {}^c\Omega)$. Dann: f ist die Einschränkung einer Distribution F auf $\Omega \Leftrightarrow N < n$ (d.h. $\Leftrightarrow f \in L^1(\Omega)$)

c) Eine allgemeine Distro (nicht einmal eine beschränkte) kann mit$_{\text{qü}}$ keiner H^p-Funktion auf beliebigen offenen Mengen übereinstimmen.

Bsp $\mathbb{R}^1$, f eine analyt. Fkt die nirgends außer auf ihrem Konvergenzradius fortgesetzt werden kann: $f=\sum_{k=0}^{\infty}{}' a_k \exp(i2^k x)$ mit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\in l^\infty$, aber $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2=\infty$

$\Rightarrow$ für $0\neq\phi\in C_b^\infty$: $\phi f\notin H^p \ \forall p>0$

5.6 Würden wir die cancellation-Eigenschaft in der Definition von H^1-Atomen weglassen, bekämen wir gerade die Definition von L^1, denn:

Sei $f\in L^1$, dann definiere f_k: $f_k(x)=2^k\int_{l\cdot 2^{-k}}^{(l+1)2^{-k}} f(u)\,\chi(x\in[l2^{-k},(l+1)2^{-k}))\,du$

$\downarrow$

"dyadischer Martingal"-Folge bzgl. f; f_k erfüllt die Size-Eigenschaft und die Träger- "

Dann konvergiert $f_k\xrightarrow[k\to\infty]{L^1} f$, d.h. $\exists$ eine Teilfolge k_j, sodass $\sum_j\|f_{k_j}-f_{k_{j-1}}\|_{L^1}<\infty$

Schreibt man nun $f=f_{k_0}+\sum_{j=1}^{\infty}(f_{k_j}-f_{k_{j-1}})$, erhält man gerade die atomare Zerlegung von f, da $f_{k_j}-f_{k_{j-1}}$ auf jedem dyadischen Intervall der Länge 2^{-k_j} konstant ist, wobei f jedoch nicht die cancellation-Eigenschaft hat.

5.7 a) Die Size-Eigenschaften ~~va~~ $|a(x)|\leq|B|^{-1/p}$ von H^p-Atomen kann durch die schwächere Bedingung

$\frac{1}{|B|}\int_B|a(x)|^q\,dx\leq|B|^{-q/p}$ für ein fixes $q>1$ ersetzt werden.

b) Man kann außerdem noch die Träger-Bedingung abschwächen, z.B durch

$|a(x)|\leq|B|^{-1/p}\min\left\{1,\frac{|B|^r}{|x-x_0|^{nr}}\right\}$, wo x_0 der Mittelpunkt d. Kugel und $pr>1$ ist. Dies erlaubt a auch außerhalb von B getragen zu sein, doch muss a dort schnell genug abfallen.

Solche verallgemeinerten Atome nennt man "Moleküle"

5.8 Unter folgenden Bedingungen an Φ ist $M_\Phi f \in L^p$ mit $\|M_\Phi f\|_{L^p} \leq c\|f\|_{H^p}$, wenn $f \in H^p$:

a) Ist Φ kompakt getragen, so muß es ein $\overset{\gamma > n(\frac{1}{p}-1)}{\gamma > 0}$ geben, sodaß $\Phi \in \Lambda_\gamma$ (Lipschitzraum)

b) Ist Φ nicht kompakt getragen, verschwindet aber im ∞, so muß $|\partial_x^\gamma \Phi(x)| \leq A(1+|x|)^{-N}$ für $|\gamma| = \lfloor n(\frac{1}{p}-1)\rfloor + 1$ und $Np > n$

Die Bedingungen folgen aus der atomaren Zerlegung.

5.9 Obige Bedingungen an Φ sind im Wesentlichen scharf → zwei Beispiele

a) $\Phi(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^\alpha & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$ Für $\alpha \leq n(\frac{1}{p}-1)$ gibt es ein $f \in H^p$ $(p \leq 1)$, sodaß $M_\Phi f = \infty$ f.ü., d.h. $M_\Phi f \notin L^p$

Doch gibt es ein positives "weak-type"-Resultat für $\alpha = n(\frac{1}{p}-1)$, $p \leq 1$. In diesem Fall ist $|\{x : (M_\Phi f)(x) > \gamma\}| \leq c\gamma^{-p}\|f\|_{H^p}^p$ $\forall \gamma > 0$

b) $\Phi(x) = |x|^{-\frac{n}{2}-\delta} J_{n/2+\delta}(2\pi|x|)$. Da $(d_u)^\ell J_k(u) = O(u^{-1/2})$ f. $u \to \infty$, müssen wir (ch. 5.8) zwei Fälle untersuchen: (i) $p < \frac{2n}{n+1+2\delta}$, (ii) $p = \frac{2n}{n+1+2\delta}$ mit $p \leq 1$

(i): $\exists f \in H^p$, sodaß $M_\Phi f = \infty$ f.ü.

(ii) Für $p < 1$ hat man eine analoge weak-type-Ungleichung wie in a), doch ist $M_\Phi f \notin L^p$ im Allgemeinen.

Für $p = 1$ ist $M_\Phi f = \infty$ f.ü. für ein bestimmtes f, wenn $\delta = \frac{n-1}{2}$.

5.10 Sei f eine (nicht unbedingt temperierte) Distribution, $\Phi \in C_c^\infty$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\, dx \neq 0$, dann:

$\exists p > 0$ sodaß $M_\Phi f \in L^p \Rightarrow f$ ist temperiert und damit $f \in H^p$

B Lokalisierte H^p und Anwendungen

S. 17 Sind $f \in H^p$, $\eta \in C_c^\infty$ eine Abschneidefunktion, so ist $\eta \cdot f$ nicht unbedingt in H^p, da die globalen Bedingungen an die Momente ($f \in H^p \Rightarrow \hat{f}$ stetig, $|\hat{f}(\xi)| \leq A|\xi|^{n(\frac{1}{p}-1)}$, etc aus S.4) usw. verletzt sind.

$\Rightarrow$ Definition (H^p_{loc}): $\cdot$ $(M_\Phi^{(1)} f)(x) := \sup\limits_{0<t\leq 1} |(f * \Phi_t)(x)|$ und analog $M_{\mathcal{F}}^{(1)}$, $u_*^{(1)}$ abgeschnittene Versionen der maximalen Charakterisierung von H^p.

Satz 1) Die Inklusionen $M_\Phi^{(1)} f \in L^p$, $M_{\mathcal{F}}^{(1)} f \in L^p$ und $u_*^{(1)} \in L^p$ sind äquivalent zueinander

2) Wenn eine der drei gilt, so sagen wir $f \in H^p_{loc}$

Eigenschaften von H^p_{loc}:

(i) $H^p_{loc} = L^p$ für $1 < p \leq \infty$, $H^p \subset H^p_{loc}$ $\forall p > 0$

(ii) Sei $f \in H^p_{loc}$, $\eta \in C_c^\infty \Rightarrow \eta \cdot f \in H^p_{loc}$

(iii) Sei allgemeiner $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus von $U \subseteq \operatorname{supp} \eta$ dann ist auch $\eta \cdot (f \circ \alpha) \in H^p_{loc}$

(iv) Für $p \leq 1$ hat jedes $f \in H^p_{loc}$ eine atomare Zerlegung. Hierbei brauchen die Atome keine cancellation-Bedingung erfüllen, wenn die Kugeln, zu denen sie gehören einen Radius haben der größer oder gleich 1 ist.

(v) Sei $\Phi \in \mathcal{S}$ mit $\hat{\Phi}(\xi) = 1 + O(|\xi|^N)$ für ein großes, fixes N. Zerlegt man $f \in H^p_{loc}$

$$f = f_1 + f_2 = (f - f * \Phi) + f * \Phi_1 ,$$ dann ist $f_1 = f - f * \Phi \in H^p$.

(vi) Hat $f \in H^p_{loc}$ kompakten Träger $\Rightarrow f \in H^p$ modulo einer C_c^∞-Funktion

<u>5.12</u> "Singularitäten" werden oft durch Distributionen, die "lokal" zu einem H^p gehören, beschrieben/dargestellt.

Ziel: allgemeine Beschreibung solcher Distributionen

Sei f eine (der Einfachheit halber) kompakt getragene Distribution,

S eine zu f gehörige, abgeschlossene "Menge von Singularitäten", so, dass f außerhalb von S durch eine lokal integrierbare Funktion $f(x)$ gegeben ist. Die Größe von diesem $f(x)$ hängt dabei nur vom Abstand $\text{dist}(x,S)$ ab.

Weiter nehmen wir an:

(i) Für $x \notin S$ sei $|f(x)| \le A\, \overset{\text{dist}(x,S)}{\overset{\shortparallel}{d(x)}}{}^{-N}$, wo $N>0$ fix ist

(ii) S hat Maß 0 im folgenden, starken Sinne: Sei $S_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x) < \delta\}$, dann gibt es ein $r>0$, sodaß $|S_\delta| \le c\,\delta^r$ für $\delta \to 0$.

[Bemerkung: es gibt <u>abzählbare</u> S, die diese Bedingung <u>nicht</u> erfüllen]

Dann ist $f \in H^p_{loc}$ für ein $p>0$.

<u>Beweis</u> Sei $\Phi \in C_c^\infty$ mit $\text{supp}\,\Phi \subseteq B_1(0)$, ~~[illegible]~~ $\int \Phi = 1$ fix.

Ist $x \notin S$: $|(f * \Phi_t)(x)| \le c\, d(x)^{-N}$ für $t < d(x)/2$, doch

$|(f * \Phi_t)(x)| \le A t^{-m}$, wenn f eine Distribution m-ter Ordnung ist.

$\Rightarrow (M_\Phi^{(u)} f)(x) \le c\, d(x)^{-\max(N,m)}$ f.ü. $\Rightarrow f \in H^p_{loc}$ mit $p < \frac{r}{\max(N,m)}$, da aus (ii)

die Abschätzung $\int_{d(x)\le 1} d(x)^{-q}\, dx < \infty$ folgt, wenn $q<r$.

<u>Bsp</u> einer solchen Distros: beliebige Distros, die auf glatten Mannigfaltigkeiten getragen sind

Weitere Bsp:

<u>5.13</u>a) Sei P ein Polynom auf $\mathbb{R}^n$. Für $Re(s) > 0$ hat die Distributionswertige Funktion $s \mapsto f_s = |P|^s$ eine meromorphe Fortsetzung auf die komplexe s-Ebene. Die auf diesem Wege entstehenden Distros ($f = f_s$, wenn s ein regulärer Punkt ist, $f = \text{Res}(f_s)$, wenn f ein singuläre Punkt ist), haben die Eigenschaft, dass $\eta f \in H^p_{loc}$ für ein $0<p$ $\forall \eta \in C_c^\infty$ cut-off.

b) Sei F reell, analytisch und f eine Distribution mit $f = \frac{1}{F}$ außerhalb der Menge $S = \{x : F(x) = 0\}$, ~~und~~ Dann ist $\eta \cdot f \in H^p_{loc}$ für ein $0 < p$.

c) Fourier-Integral-Distros erfüllen die Bedingungen in <u>S. 12</u> und gehören daher auch zu einem H^p_{loc}.

~~D~~ C Verschiedenes

<u>S. 14</u> Die $L^p \to L^q$-Hardy-Littlewood-Sobolev-Ungleichungen lassen sich auch auf H^p-Räume erweitern.

Sei dazu $(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) |y|^{\alpha - n} dy$ mit $\gamma_\alpha = \frac{\pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}$

I_α ist zwar ursprünglich für $0 < \alpha < n$ und $f \in C_{cb}$ definiert, kann aber auf $0 < Re(\alpha) < \frac{n}{p}$ und, wenn $\int x^\gamma f = 0$ f. $|\gamma| \leq n(\frac{1}{p} - 1)$ ist, auf $p \leq 1$ analytisch fortgesetzt werden. Darüberhinaus ist $\| I_\alpha f \|_{H^q} \leq A_{\alpha p} \| f \|_{H^p}$ mit $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ solange $0 < p < q < \infty$

Der Bereich der erlaubten Exponenten kann etwas erweitert werden:

(i) $q = \infty$ ist enthalten, wenn $p \leq 1$ und $\alpha = np$

(ii) $Re(\alpha) = 0 \Rightarrow I_\alpha : H^p \to H^p$ für $0 < p < \infty$

"<u>Beweis</u>" $p \leq 1$: folgt aus der atomaren Zerlegung

(ii) folgt aus der Theorie für singuläre Integrale

<u>S. 15</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz. $f \in H^p$ $(p \leq 1)$ und $f|_{\complement\Omega} = 0 \Rightarrow f$ hat eine atomare Zerlegung und die Atome sind in Ω getragen