Gewichtete Ungleichungen (für die Maximalfunktion und singuläre Integrale) (1)

Problem: Sei $(Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{c_n}{r^n} \int_{|y|<r} |f(x-y)| dy$ die Standard-Maximalfkt. auf $\mathbb{R}^n$.

Wie kann man nicht-negative Maße $d\mu$ auf $\mathbb{R}^n$ charakterisieren, so daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} [(Mf)(x)]^p d\mu(x) \leq A \int |f(x)|^p d\mu(x)$$ für ein $p \in (1,\infty)$ wahr ist?

→ Antwort: Solche und ähnliche Ungleichungen sind wahr, wenn $d\mu(x) = w(x)dx$ für $w \in A_p$, (d.h. $d\mu$ ist absolut stetig bzgl. Lebesgue) einer bestimmten Funktionenklasse

Ziele:
1) Definitionen von A_p für M
2) Beweis des Hauptresultats – hilfreich dazu ist die folgende "Offenheits"-Eigenschaft $w \in A_p \Rightarrow w \in A_{p_1}$, wenn $p_1 < p$ (dazu braucht man "umgekehrte" Hölder-Ungleichungen)
3) Fairness-Prinzip der A_p: sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Würfel und $E \subset Q$. $\Rightarrow \frac{w(E)}{w(Q)} \leq F\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)$
4) Beweis des Hauptresultats für singuläre Integraloperatoren statt M (ebenfalls mit der A_p-Klasse)
5) Studium von A_1 und Ableitung der A_p ($p>1$) aus A_1.
Besonders elegant: $w \in A_2 \Leftrightarrow w = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ für $\Omega_{1,2} \in A_1$.

1 Die Klasse A_p (Muckenhoupt-Gewichte)

Definition: Sei $w \in L^1_{loc}$, $w \geq 0$, dann
- $w \in A_p \Leftrightarrow \frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx \cdot \left[\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-p'/p} dx\right]^{p/p'} \leq A < \infty$ ∀ Kugeln $B \subset \mathbb{R}^n$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

- $A_p(w) := \sup_B \frac{1}{|B|}\int w(x)dx \cdot \left[\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-p'/p} dx\right]^{p/p'}$ heißt A_p-Schranke von w.

Satz (Eigenschaften von A_p)

1) Sei $w_\delta(x) = w(\delta x)$ mit $\delta x = (\delta x_1, \dots, \delta x_n)$, $\delta > 0$

$w_h(x) = w(x-h)$ mit $h \in \mathbb{R}^n$

Dann: $w \in A_p \Rightarrow w_\delta, w_h, \underbrace{\text{const}}_{>0} \cdot w \in A_p$

2) $w \in A_p \Rightarrow \sigma \equiv w^{-p'/p} \in A_{p'}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ mit $A_{p'}(\sigma)^{1/p'} = A_p(w)^{1/p}$ (durch Vertauschen der Faktoren in der Definition der A_p-Schranke)

("Dualität")

$p = 2$ (Selbstdualität): $\left[\frac{1}{|B|} \int_B w \, dx\right] \left[\frac{1}{|B|} \int_B w^{-1} \, dx\right] \leq A$

$w \in A_2 \Rightarrow \frac{1}{w} \in A_2$

3) Sei $p_1 < p_2$, dann: $w \in A_{p_1} \Rightarrow w \in A_{p_2}$ mit $A_{p_2}(w) \leq A_{p_1}(w)$ (folgt aus der Definition, Hölder und, dass, wenn $q_j = \frac{p_j'}{p_j} = p_j' - 1 \Rightarrow q_2 < q_1$, wenn $p_1 < p_2$) $[A_{p_2} \subset A_{p_1}]$ $p_2 < p_1$

4) Alternative Charakterisierung von A_p durch die Beschränktheit des Maximal-Operators M: Seien dazu $f_B := \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx$ und $w(B) = \int_B w(x) dx$, dann:

$w \in A_p \Leftrightarrow (f_B)^p \leq \frac{A}{w(B)} \int_B f^p(x) w(x) dx \quad \forall f \geq 0 \ \forall B$ Kugeln und

$A_p(w) = \sup_B \frac{1}{w(B)} \int f^p(x) w(x) dx$

Beweis) $\Rightarrow$ Per Definition ist $(Mf)(x) \geq c' f_B \quad \forall x \in B$. Aus $\frac{1}{|B|} \overbrace{\int w(x) dx}^{w(B)} \left(\overbrace{\int}^{\frac{1}{|B|}} w(x)^{-p'/p} dx\right)^{p/p'} < \infty$ d.h. $w \in A_p$

jetzt $\int w(x) dx$

das der ~~...~~ Charakterisierung von A_p durch | folgt $(f_B)^p \leq A \, (Mf)(x)^p = \left(\sup_{B_r} \frac{A}{|B|^p} \left(\int_{|y-x| < r} f(y) dy\right)^p\right)$

$\Rightarrow w(B) (f_B)^p \leq \int (Mf)^p(x) w(x) dx \leq \int f(x)^p w(x) dx$ ✓

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{p+p'}{pp'} = 1 \Rightarrow p+p' = pp'$

"$\Rightarrow$" Sei $w \in A_p$, dann $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B \underbrace{f(x) w^{1/p}(x)} \underbrace{w^{-1/p}(x)} dx$

$\frac{|B|^{p+1}}{w(B)} |B|^{p+1}$

$\frac{p}{p'} + 1 - p = \frac{p + p' - pp'}{p'} = 0 \Rightarrow (f_B)^p \overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{|B|^{-p}}{|B|^{p/p'}} \left[\int f^p w \, dx\right] \cdot \left[\frac{1}{|B|} \int w^{-p'/p} dx\right]^{p/p'} \cdot \frac{w(B)}{w(B)}$ mit $A \leq A_p(w)$

"$\Leftarrow$" Sei $(f_B)^p \leq \frac{A}{w(B)} \int f(x)^p w(x) dx$, dann setze $f = w^{-p'/p} \Rightarrow f^p w = w^{1-p'} = w^{-p'/p}$ $\left(1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)$

wüssten wir, dass $\int_B w^{-p'/p} < \infty \Rightarrow$ Behauptung mit $C \leq A$

Ersetze stattdessen $f = (w+\epsilon)^{-p'/p}$ $(\epsilon > 0)$. Da $\int_B (w+\epsilon)^{-p'/p} dx \leq \int_B (w+\epsilon)^{-p'} \cdot w \, dx < \infty$

ist $\left[\frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx\right] \cdot \left[\frac{1}{|B|} \int (w+\epsilon)^{-p'} w \, dx\right]^{p/p'} \leq A$ zuletzt $\epsilon \to 0$ gehen lassen ☐

5) Aus der alternativen Charakterisierung von A_p folgt:

$w \in A_p \Rightarrow w$ ist ein verdoppelndes Maß, d.h.

$w(B_2) \leq c' w(B_1)$ für $B_1 = \{x : |x-y| < \delta\}$, $B_2 = \{x : |x-y| < 2\delta\}$. Verwende dazu

$(f_B)^p \leq \frac{A}{w(B)} \int_B f(x)^p w(x)\,dx$ mit $B = B_2$ und $f = \chi_{B_1}$ $\rightsquigarrow c' = 2^{np} \cdot A$

<u>Bemerkung</u> Maße der Form $w(x)dx$ mit $w(x) = |x|^\alpha$ sind verdoppelnde Maße für $\alpha > -n$, doch sie sind nur dann auch in A_p, wenn zusätzlich $\alpha < n(p-1)$

6) In der ursprünglichen Definition von A_p könnte man die Familie der Kugeln durch Würfel oder andere äquivalente Familien ersetzen. Dazu verwendet man die Eigenschaften, dass w und das Duale $w^{-p'/p}$ verdoppelnde Maße sind, zusammen mit der alternativen Charakterisierung $w \in A_p \Leftrightarrow (f_B)^p \leq \frac{A}{w(B)} \int_B f(x)^p w(x)\,dx$ $\forall f \geq 0$ $\forall$ Kugeln B

7) Fairness-Eigenschaft / A_∞-Eigenschaft (charakterisiert die Vereinigung aller A_p-Klassen)

Man sagt $w \in A_\infty$, wenn $\forall \alpha \in (0,1)$ $\exists \beta \in (0,1)$ sodaß $\forall$ Kugeln B und alle $F \subset B$ gilt:

$|F| \geq \alpha |B| \Rightarrow w(F) \geq \beta w(B)$, $(*)$ (bzgl. Lebesgue)

Da es für $\alpha \to 1$ keine untere Schranke an β gibt, ist diese Bedingung nur für kleine α interessant. Wir werden später sehen, dass $w \in A_\infty \Leftrightarrow (*)$ für ein fixes Paar (α, β).

Um zu sehen, dass $(*)$ $\forall A_p$ gilt, verwendet man $(f_B)^p \leq \frac{A}{w(B)} \int f(x)^p w(x)\,dx$ mit $f = \chi_F$

$\Rightarrow (|F|/|B|)^p \leq A \frac{w(F)}{w(B)}$ was $(*)$ mit $\beta = \frac{\alpha^p}{A}$ ist (bemerke $A \geq 1$ immer)

Eine äquivalente Definition von A_∞ erhält man, wenn man Komplemente nimmt, d.h.:

$w \in A_\infty$, wenn $\forall \gamma \in (0,1)$ $\exists \delta \in (0,1)$ sodaß $\forall$ Kugeln B und alle $E \subseteq B$ gilt:

$|E| \leq \gamma |B| \Rightarrow w(E) \leq \delta w(B)$ $(*')$

(analog mit Würfeln statt Kugeln wg der Eigenschaft, dass w ein verdoppelndes Maß ist)

~~8 A_p-Gewichte~~

8) "Mittlere Fluktuationen von A_p-Gewichten können auf jeder Kugel gleichmäßig kontrolliert werden."

Genauer: $w \in A_p \Rightarrow \log w \in BMO$

<u>Beweis für $p=2$:</u> Angenommen f sei reellwertig, dann ist mit Jensen

$$\exp\left[\frac{1}{|B|}\int_B f(x)\,dx\right] \le \frac{1}{|B|}\int_B \exp(f(x))\,dx$$

erhält Monotonie

Def $\lambda(x) := \log w(x)$ und wende die Ungleichung auf $[\lambda(x)-\lambda_B]_+$ an: ($f=\lambda$, log auf beiden Seiten nehmen)

$$\frac{1}{|B|}\int [\lambda(x)-\lambda_B]_+\,dx \le \log\left\{\frac{1}{|B|}\int_B e^{\lambda(x)-\lambda_B}\,dx\right\}$$ und analog f $[\lambda(x)-\lambda_B]_-$

→ Addieren beider Ungleichungen führt zu $\frac{1}{|B|}\int |\lambda(x)-\lambda_B|\,dx \le \log\left[w_B \cdot (w^{-1})_B\right] \le A$

mit $A = \log A_2(w) \Rightarrow \lambda \in BMO$. Analoges Argument $\forall p$.

9) Grenzfall der A_p für $p \to 1$, mit der Definition $w \in A_p \Leftrightarrow \frac{1}{|B|}\int_B w(x)\,dx \left[\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-p'/p}\,dx\right]^{p/p'} < \infty$

und $\left[\frac{1}{|B|}\int w(x)^{-p'/p}\,dx\right]^{p/p'} \xrightarrow[p\to 1]{} \|w^{-1}\|_{L^\infty(B)}$

$\Rightarrow A_1$ besteht aus allen $w \ge 0$, sodass für alle Kugeln B gilt: $\frac{1}{|B|}\int_B w(x)\,dx \le A\,w(x)$

für fast alle $x \in B$.

Diese Bedingung ist äquivalent zu $(Mw)(x) \le A' w(x)$ im Sinne, dass die Erste die Zweite mit $A' \le A$ und die Zweite die Erste mit $A \le 2^n A'$ impliziert.

A_1 erfüllt viele der gleichen Eigenschaften wie A_p ($p>1$). Das Analogon von $(f_B)^p \le \frac{A}{w(B)}\int_B f(x)^p w(x)\,dx$

lautet $f_B \le \frac{A}{w(B)}\int f(x) w(x)\,dx \quad \forall f \ge 0$, B Kugeln

2 Zwei weitere Charakterisierungen von A_p (elementarere Versionen des Hauptsatzes über die Maximalfunktion)

2.1 (Historisch erstes Auftreten der A_p-Klassen)

Betrachte Faltungsoperatoren $f \mapsto T_\epsilon f := f * \Phi_\epsilon$ mit $\Phi \geq 0$, radial und radial abfallend, und $\int \Phi(x)dx = 1$. $\Phi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\Phi(x/\epsilon)$.

$\mathcal{R}$ sei die Klasse aller solcher Φ's. ($\Phi \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \Phi_\epsilon \in \mathcal{R}$)

Man erinnere sich: $(Mf)(x) = \sup_{\Phi \in \mathcal{R}} (|f| * \Phi)(x)$ ($B_\epsilon := \{x : |x| < \epsilon\} \Rightarrow |B_\epsilon|^{-1}\chi_{B_\epsilon} \in \mathcal{R}$ und das Supremum über alle Elemente in $\mathcal{R}$ ist per Definition $(Mf)(x)$. Andererseits kann jedes $\Phi \in \mathcal{R}$ als Grenzwert von gewichteten Mitteln der $|B_\epsilon|^{-1}\chi_{B_\epsilon}$ dargestellt werden)

Behauptung 1 Sei $d\mu \geq 0$ ein Borel-Maß, $1 \leq p < \infty$, $\Phi \in \mathcal{R}$.

a) Gilt $\int_{\mathbb{R}^n} |T_\epsilon f(x)|^p d\mu(x) \leq A \int |f(x)|^p d\mu(x)$ (*) $\forall \epsilon > 0$ $\Rightarrow$ $d\mu$ ist absolut stetig bzgl. Lebesgue $d\mu(x) = w(x)dx$ und ~~u~~ $w \in A_p$.

b) Ist umgekehrt $d\mu(x) = w(x)dx$ mit $w \in A_p$, so gilt obige Ungleichung und A hängt weder von ϵ, noch von Φ ab.

Beweis a) Angenommen die Ungleichung gilt mit $\Phi_\epsilon = |B_\epsilon|^{-1}\chi_{B_\epsilon}$ und $d\mu = w(x)dx + d\nu$, wobei $d\nu$ gänzlich singulär ist. Ist $d\nu \neq 0$, so gibt es ein Kompaktum K mit $|K| = 0$ aber $\nu(K) > 0$. Sei $U_n = \{x : \mathrm{dist}(K, x) < 1/n\}$ und $f_n = 1_{U_n \setminus K}$. Da die Mengen $U_n \setminus K$ in n kleiner werden und paarweise disjunkt sind, konvergiert $f_n \to 0$ punktweise überall. (*) impliziert, dass μ auf Kompakta endlich ist. Mit majorisierter Konvergenz folgt daher $\int |f_n|^p d\mu \to 0$. Andererseits konvergiert $(T_{1/n} f_n)(x) \to 1$ $\forall x \in K$, denn

$$(T_{1/n} f_n)(x) = |B_{1/n}|^{-1} \int f_n(y)\chi_n(x-y)dy \quad (\chi_n = \chi_{B_{1/n}})$$

$$= |B_{1/n}|^{-1} \int_{U_n \setminus K} \chi_n(x-y)dy$$

$$= |B_{1/n}|^{-1} \int_{{}^cK} \chi_n(x-y)dy \quad \text{denn } x \in K \text{ und } |x-y| < \tfrac{1}{n} \text{ implizieren } \overset{\text{automatisch}}{\vee} y \in U_n$$

$$= 1, \text{ da } |K| = 0$$

$\lightning$ da RHS $\to 0$ aber LHS $\to \nu(K) > 0 \Rightarrow \nu(K) = 0$

und $d\mu$ ist absolut stetig, d.h. $\exists w$ s.d. $d\mu(x) = w(x)dx$.

Sei nun $f \geq 0$ und B eine beliebige Kugel mit Radius δ. [bemerke: ist $x \in B_\delta \Rightarrow B_\delta \subseteq B_{x,\cancel{2\,\mathrm{Radius}(B)}}\ B_{x,2\delta}$]

Ist also $x \in B$ und $\epsilon = 2\delta \Rightarrow (T_\epsilon f)(x) \geq 2^{-n} f_B$. Aus $\int |(T_\epsilon f)(x)|^p d\mu(x) \leq A \int |f(x)|^p d\mu(x)$ folgt

$$(f_B)^p \leq \frac{A'}{w(B)} \int_B |f(x)|^p w(x)\,dx \quad \text{mit } A' = 2^{np} A \Rightarrow w \in A_p \text{ mit dieser Charakterisierung}$$

Der Beweis für ein beliebiges $\Phi \in \mathcal{R}$ erfolgt durch die Bemerkung, dass für so ein $\Phi \in \mathcal{R}$ gilt: $\Phi(x) \geq c_1 \chi_{B_{c_2}}(x)$ für geeignete $c_1, c_2 > 0$. Die Ungleichung impliziert also die des vorigen Falls und die gleiche Folgerung gilt.

b) Betrachte wieder zuerst die Familie $\Phi_\epsilon = |B_\epsilon|^{-1} \chi_{B_\epsilon}$, dann reicht es zu zeigen (Dilatationsinvarianz von $w \in A_p$)

(**) $\int |(T_1 f)(x)|^p w(x)\,dx \leq A \int |f(x)|^p w(x)\,dx$, wo ~~A nur~~ $A = A(p, \|w\|_{A_p})$

Außerdem reicht es $f \geq 0$ zu betrachten. Seien $B_1 = \{x : |x| < 1\}$, $B_2 = \{x : |x| < 2\}$. Für $x \in B_1$ ist

$B_{x,1} \subseteq B_2 \Rightarrow (T_1 f)(x) \leq 2^n f_{B_2} \quad \forall x \in B_1$

$$\Rightarrow \int_{B_1} |(T_1 f)(x)|^p w(x)\,dx \leq 2^{np} (f_{B_2})^p \cdot w(B_1) \leq 2^{np} (f_{B_2})^p w(B_2)$$

$$\leq c' \int_{B_2} (f(x))^p w(x)\,dx \quad \text{wegen } (f_B)^p \leq \frac{A}{w(B)} \int |f(x)|^p w(x)\,dx \text{ für } w \in A_p$$

Diese Ungleichung kann auch so geschrieben werden

$$\int |(T_1 f)(x)|^p w(x) \chi_{B_1}(x)\,dx \leq c' \int (f(x))^p \chi_{B_2}(x) w(x)\,dx$$

A_p ist nicht nur invariant unter Dilatationen, sondern auch Translationen

$$\Rightarrow \int |(T_1 f)(x)|^p \chi_{B_1}(x-y) w(x)\,dx \leq c' \int (f(x))^p \chi_{B_2}(x-y) w(x)\,dx \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$\int dy \ldots$ und Integrationsreihenfolge vertauschen

$\Downarrow$

(**) mit $A = 2^n c'$

Beweis für allgemeine $\Phi \in \mathcal{R}$ folgt durch Schreiben als Grenzwert der $|B_\epsilon|^{-1} \chi_{B_\epsilon}$ ▮

Das letzte Argument führt zu folgendem Korollar:

<u>Korollar</u>: Sei $d\mu \geq 0$ ein Borel-Maß, das $(f_B)^p \leq \frac{A}{\mu(B)} \int_B |f|^p d\mu$ $\forall f \geq 0$, Kugeln B erfüllt.

$\Rightarrow d\mu$ ist absolut stetig, $d\mu(x) = w(x)\,dx$ mit $w \in A_p$.

Außerdem gilt (natürlich (c)) $\int |(T_\epsilon f)(x)|^p d\mu(x) \leq A \int |f(x)|^p d\mu(x)$

2.2 (4)

Behauptung 2 Sei $d\mu \geq 0$ ein Borel-Maß und $1 \leq p < \infty$. Dann ist der Maximaloperator $f \mapsto Mf$ eine schwache $(L^p(d\mu) \to L^p(d\mu))$-Abbildung, d.h.

$$\mu\{x : |Mf(x)|^p > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha^p}\int |f(x)|^p d\mu(x) \quad \forall \alpha > 0 \iff d\mu \text{ ist absolut stetig, } d\mu(x) = w(x)dx, \; w \in A_p$$

(d.h. $L^p \to L^{p,w}$-beschränkt)

3 Der Hauptsatz über A_p

Die letzten beiden Behauptungen haben gezeigt: $d\mu$ erfüllt $\int |(Mf)(x)|^p d\mu(x) \leq A \int |f(x)|^p d\mu(x)$
(Charakterisierungen von A_p) $\Rightarrow d\mu(x) = w(x)dx$ und $w \in A_p$

Jetzt zeigen wir die umgekehrte Richtung.

Satz 1 Sei $1 < p < \infty$ und $w \in A_p$. Dann ist $\int |(Mf)(x)|^p w(x)dx \leq A \int |f(x)|^p w(x)dx \quad \forall f \in L^p(w(x)dx)$

Der Satz wird aus folgender, fundamentalen Eigenschaft von A_p-Gewichten folgen.

Behauptung 3 (Umgekehrte Hölder-Ungleichung)
Sei $w \in A_\infty$. Dann gibt es $r > 1$ und $A > 0$ (beide w-abhängig), sodaß

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^r dx\right)^{1/r} \leq \frac{A}{|B|}\int_B w(x)dx \quad \forall \text{ Kugeln } B$$

[normale Hölder: $\frac{1}{|B|}\int w(x)dx \leq \left(\frac{\int w(x)^r dx}{|B|}\right)^{1/r}\left(\int w(x)^{r'} dx\right)^{\frac{1}{r'}}$
($|B|^{-1} = |B|^{-1/r - 1/r'}$)

Interpretation dieser Behauptung: die Werte eines A_p-Gewichts fluktuieren im Mittel nicht allzu stark (w konzentriert sich irgendwo $\Rightarrow w^r$ hebt dies stärker hervor $\Rightarrow$ Mittel von w^r kann jedoch durch $\int w$ kontrolliert werden)

Später werden wir sehen, daß es auch davon eine umgekehrte Version gibt.

Korollar Sei $w \in A_p$ für ein $p \in (1,\infty) \Rightarrow \exists\, p_1 < p$, sodaß $w \in A_{p_1}$.

Beweis Sei $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ und das duale Gewicht $\sigma = w^{-p'/p} \in A_{p'} \subset A_\infty \Rightarrow \sigma$ erfüllt die umgekehrte Hölder-Ungleichung $\left(\frac{1}{|B|}\int_B \sigma^r dx\right)^{1/r} \leq A|B|^{-1}\int_B \sigma dx$ für ein $r > 1$.

Mit $\frac{rp'}{p} = \frac{r}{p-1} = \frac{1}{p_1 - 1} = \frac{p_1'}{p_1}$ für ein $1 < p_1 < p \Rightarrow w \in A_{p_1}$ per ursprünglicher Definition der A_p.

Beweis des Satzes: Sei $w \in A_p$ gegeben, dann ist auch $w \in A_{p_1}$ für ein $p_1 < p$.

Wegen Behauptung 2 ist der Maximaloperator M eine schwache $(L^{p_1}(w(x)dx), L^{p_1}(w(x)dx))$-Abbildung.

Mit Marcinkiewicz-Interpolation und der $L^\infty(w(x)dx)$-Beschränktheit folgt die $L^p(w(x)dx)$-Beschränktheit von M.

~~$\sup_{\xi} \int (f * \Phi)$~~ $\sup_{\xi} \| f * \Phi \|_p \leq \sup_{\xi} \|\Phi\|_1 \|f\|_p$

4 Gewichtete Ungleichungen für singuläre Integrale

Wir wissen bereits, dass man aus der Analyse der Maximalfkt Abschätzungen für singuläre Integraloperatoren erhalten kann. → Jetzt: gewichtete Abschätzungen dieser Integraloperatoren

4.1 Betrachte $f \mapsto Tf = f * K$ initial für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert, wobei K eine geeignete, temperierte Distribution ist.

Anforderungen an K: (i) der durch K definierte Faltungsoperator ist L^2-beschränkt, d.h. $\exists A > 0$ s.d. $\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq A \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ $\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

d.h. $\hat{K} \in L^\infty$ mit $\|\hat{K}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq A$.

(ii) abseits des Ursprungs ~~ist~~ stimmt die Distribution K mit einer $C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$-Funktion überein. D.h. $\exists$ eine C^1-Fkt, die wir $K(x)$ nennen, die für $x \neq 0$ definiert ist sodass die Distro K mit $K(x)$ übereinstimmt, wenn sie gegen eine C_c^∞-Fkt getestet wird, die nahe des Ursprungs verschwindet.

(iii) Die C^1-Fkt $K(x)$ erfüllt außerdem $|\partial_x^\alpha K(x)| \leq A|x|^{-n-\alpha}$ $\forall x \neq 0$, $|\alpha| \leq 1$

Um Tf zu verstehen, müssen wir den abgeschnittenen Operator T_ϵ $(\epsilon > 0)$ studieren, der durch

$$(T_\epsilon f)(x) = (f * K_\epsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} K_\epsilon(x-y) f(y)\,dy \quad \text{mit } K_\epsilon(x) = K(x)\chi_{\{|x| \geq \epsilon\}}$$

definiert ist.

Zur Familie $\{T_\epsilon\}$ assoziieren wir weiter den Maximaloperator $(T_* f)(x) = \sup_{\epsilon > 0} |(T_\epsilon f)(x)|$

($T_\epsilon f$ ist halbstetig, da $T_\epsilon f$ stetig ist für $f \in L^1$)

Verbindung zwischen T_* (und damit T_ϵ) und T durch folgende einfache Ungleichung

$\exists c > 0$, sodaß $|(Tf)(x)| \leq (T_* f)(x) + c|f(x)|$

(s. früher: T erfüllt (i) $\|Tf\|_q \leq A\|f\|_q$ $(q = 2$ hier$)$, $\mu(x,y) = |x-y|$

(ii) $|K(x,y)| \leq \dfrac{A}{\inf\{\mu(B(y,\delta)) : x \in B(y,\delta)\}}$,

da $|K(x-y)| \leq \dfrac{A}{|x-y|^n}$

(iii) $\int_{{}^c B(y, c\delta)} |K(x,y) - K(x,\bar{y})|\,d\mu(x) \leq A$ $\forall \bar{y} \in B(y,\delta)$,

da $|K(x,y) - K(x,\bar{y})| \leq \dfrac{|y-\bar{y}|}{|x-y|^{n+1}}$ wenn $|y-\bar{y}| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

da ~~$|K(x)| \leq |x|^{-n}$~~

$\Rightarrow (Tf)(x) = (T_0 f)(x) + a(x) \cdot f(x)$

T_0 ist schwacher Grenzwert von T_ϵ

4.2

Satz 2 Angenommen, der Operator $f \mapsto Tf = f * K$ erfüllt $\|Tf\|_2 \leq A\|f\|_2$ und

$|\partial_x^\alpha K(x)| \leq A|x|^{-n-\alpha}$ $\forall x \neq 0, |\alpha| \leq 1$

und T_* ist der zur abgeschnittenen Familie gehörende Maximaloperator von eben.

Sei $w \in A_\infty$ und $0 < p < \infty$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} [(T_* f)(x)]^p w(x)\,dx \leq A_{p,w} \int_{\mathbb{R}^n} [(Mf)(x)]^p w(x)\,dx \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$ für die die RHS endlich ist.

Mit $A_p \subset A_\infty$ $\forall p \in [1,\infty)$ und $|(Tf)(x)| \leq |(T_* f)(x)| + c|f(x)|$ hat man folgende Konsequenz

Korollar Sei T wie eben und $w \in A_p$ mit $1 < p < \infty$, $f \in C_c^\infty$

Dann ist $\int |(Tf)(x)|^p w(x)\,dx \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx$ — Korollar: L^p durch C_c^∞ approximierbar wg Dichtheit

Bemerkungen 1) Die beiden Ungleichungen sind auch für "allgemeine" f wahr

2) Die Umkehrung des Korollars ist auch wahr, d.h. gilt $\int |(Tf)(x)|^p \,d\mu \leq A \int |f(x)|^p \,d\mu$ für ein geeignetes T, so ist $d\mu$ absolut stetig, $d\mu = w(x)dx$, ~~w absolut stetig~~ und $w \in A_p$ für ein $p \in (1,\infty)$.

Zu 1) für $0 < p < \infty$ sei $ML^p(w)$ der Raum aller $f \in L^1_{loc}$ mit $\|f\|^p \equiv \int |Mf(x)|^p w(x)\,dx < \infty$.

Für $p \geq 1$ nehmen wir $\|f\|^p$ als Norm auf $ML^p(w)$ und für ~~alle~~ $p < 1$ definiert es eine Metrik auf $ML^p(w)$.

OBdA können wir annehmen, dass $ML^p(w)$ nicht leer ist, d.h. es gilt $\int \frac{w(x)}{(1+|x|)^{pn}}\,dx < \infty$ für ein $f \in C_c^\infty$, denn, wenn $f \neq 0$, dann $(Mf)(x) \geq \frac{c}{(1+|x|)^n}$

Das Theorem folgt für allgemeine f aus der Tatsache, dass C_c^∞ ~~für~~ in $ML^p(w)$ dicht ist, wenn $w \in A_\infty$ (später warum)

Zu 2) betrachte dazu $Tf = f * K$, wobei ~~als~~ T wieder $\|Tf\|_2 \leq A\|f\|_2$ und $|\partial_x^\alpha K(x)| \leq A|x|^{-n-\alpha}$ und zu dem die Nicht-Entartetheits-Bedingung

$\exists a > 0$ und einen Einheitsvektor u_0 sodass $|K(x)| \geq a|x|^{-n}$ $\forall x = tu_0$ mit $t \in (-\infty,\infty)$

erfüllt. Diese Bedingung wird bspw. von jeder der Riesz-Trafos erfüllt (FT vom $\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ d.h. $\frac{\xi_j}{|\xi|}$)

Behauptung 4 Angenommen, T erfülle obige Bedingungen. Sei $d\mu \geq 0$ ein Borel-Maß, $1 < p < \infty$ und $d\mu$ erfülle $\int |Tf(x)|^p \,d\mu \leq A \int |f(x)|^p \,d\mu$ $\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dann ist $d\mu$ absolut stetig, $d\mu(x) = w(x)dx$ und ~~also~~ $w \in A_p$

<u>Beweis</u> (i) Der Beweis stützt sich auf folgende Beobachtung: durch die Wahl $u = t u_0$ für t hinreichend groß, kann garantiert werden, dass

$$|K(r(u+v)) - K(ru)| \leq \tfrac{1}{2} |K(ru)| \quad \forall\, r \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ und } |v| \leq 2.$$

Um dies zu sehen, sei $x \neq 0$ auf der Geraden $\{t u_0\}$ und $y \in \mathbb{R}^n$ so, dass $|y| \leq c|x|$.
Für $c \leq \frac{1}{2}$ ist $|K(x+y) - K(x)| \leq c A' |x|^{-n}$ wegen $|\partial_x^\alpha K(x)| \leq A |x|^{-n-\alpha}$. Schreibt man nun $x = ru$ und $y = rv$, so wird die Bedingung $|y| \leq c|x|$ zu $|v| \leq c|u| = c|t|$, d.h. obige Ungleichung kann für alle $t \geq \frac{4A'}{a}$ $\left(\geq \frac{|v|}{c}\right)$ erfüllt werden.

(ii) Für eine gegebene Kugel $B = B(\bar{x}, r)$ definieren wir die Verschobenen $B' \equiv B(\bar{x} + ru, r)$ und $B'' \equiv B(\bar{x} - ru, r)$.
Sei nun $0 \leq f \in C_c^\infty$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq B$ und wir betrachten $(Tf)(x)$ für $x \in B'$.
$\qquad (Tf)(x) = \int K(x-y) f(y)\,dy$

Hier ist dann $x = \bar{x} + ru + rx'$ mit $|x'| \leq 1$, sowie
$B \ni y = \bar{x} + 0 + ry'$ mit $|y'| < 1$

D.h. $x - y = r(u+v)$ mit $|v| \leq 2$ und obige Ungleichung gibt daher

$$|(Tf)(x)| \geq \frac{1}{2} f_B\, |K(ru)|\, \mu(B) \quad \forall x \in B'$$

(~~$\int |K(x-y) - K(x)|\,|f(y)|\,dy \leq \frac{1}{2}$~~ ~~$\int |K(r(u+v)) - K(ru)|\,|f(y)| \leq \frac{1}{2}|K(ru)|\,|B|\, f_B$~~

$|K(r(u+v)) - K(ru) + K(ru)| \geq ||K(ru)| - |K(r(u+v)) - K(ru)|| \geq |K(ru)| - \frac{1}{2}|K(ru)| = \frac{1}{2}|K(ru)|$

$\Rightarrow$ Zusammen mit der Annahme $\int |(Tf)(x)|^p \,d\mu(x) \leq A \int |f(x)|^p \,d\mu(x)$
folgt $A \int |f|^p d\mu \geq f_B^{\,p} \left(\frac{|K(ru)|}{2}\right)^p \cdot \mu(B')^{1+p} \geq f_B^{\,p}\, \mu(B')$
Nichtentartetheits-Bed. $|K| \geq \ldots$

$\rightarrow$ Ungleichung lässt sich auf beliebige in B getragene, positive f erweitern
Durch Vertauschen der Rollen von B und B'' (d.h. einfach zurücktranslatieren $(B')'' = B$, B'')
hat man gleichzeitig $A \int |f|^p d\mu \geq (f_{B'})^p \mu(B)$. Setzt man in diese Ungleichung $f = \chi_B$ ein, hat man $A\mu(B') \geq \mu(B)$. Setzt man das in $f_B^{\,p} \mu(B') \leq A \int |f|^p d\mu$ ein, erhält man schließlich $\mu(B)(f_B)^p \leq A \int |f|^p d\mu$ und wir brauchen nur noch das Korollar $(f_B)^p \leq \frac{A}{\mu(B)} \int |f|^p d\mu$ aus DLZ 2.1 zu verwenden ▢

5 Weitere Eigenschaften der Muckenhoupt-Gewichte

A_∞: ~~Ch~~ Charakterisierung von A_p-Funktionen, ohne zu wissen was p ist $\left(A_\infty = \bigcup_{p\geq 1} A_p\right)$

5.1 Die A_∞-Klasse

Satz 3 Eine Funktion $\omega \geq 0$ gehört genau dann zu einem A_p $(1 \leq p < \infty)$, wenn eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

a) $\omega \in A_\infty$

b) ω erfüllt die umgekehrte Hölderungleichung, d.h. $\exists\, r_\omega > 1,\ c_\omega > 0$ sodass

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^r dx\right)^{1/r} \leq \frac{c}{|B|}\int_B \omega\, dx \quad \forall \text{ Kugeln } B$$

[c) $\exists\, p \geq 1$ s.d. $\omega \in A_p$]

$c) \Rightarrow a) \Rightarrow b)$

Beweis Wir sahen bereits, dass $A_p \subset A_\infty$ und A_∞-Gewichte die inverse Hölder-Ungleichung erfüllen. Es verbleibt also zu zeigen: erfüllt ω eine umgekehrte Hölderungleichung $\Rightarrow \exists\, p$ s.d. $\omega \in A_p$. (d.h. $b) \Rightarrow c)$)

Um dies zu zeigen, müssen wir die Rollen von $\omega(x)dx$ und dx vertauschen.

Exkurs Seien $d\mu_1, d\mu_2 \geq 0$ zwei gegenseitig absolut stetige Maße. Wir sagen, dass μ_1 eine inverse Hölderungleichung bzgl. μ_2 erfüllt, wenn für $r > 1$, $c > 0$, wenn

$$\left(\frac{1}{\mu_2(B)}\int_B \left(\frac{d\mu_1}{d\mu_2}\right)^r d\mu_2\right)^{1/r} \leq c\,\frac{\mu_1(B)}{\mu_2(B)} \quad \forall \text{ Kugeln } B$$

Für $d\mu_2(x) = dx$ und $d\mu_1(x) = \omega(x)dx$ ist dies die normale inverse-Hölderungleichung für $\omega \in A_\infty$.

Jedoch erhalten wir für $d\mu_1(x) = dx$, $d\mu_2(x) = \omega(x)\,dx$

$$\cancel{\frac{1}{\omega(B)}\int \omega^{?}(x)dx} \quad \left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B \omega^{-r+1}(x)dx\right)^{1/r} \leq c\,\frac{|B|}{\omega(B)}.$$

Erinnert man sich an die ursprüngliche Def. von $\omega \in A_p$ zurück $\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\left[\frac{1}{|B|}\int \omega(x)^{-p'/p}\right]^{\frac{p}{p'}} \leq c\right)$, sieht man, dass die „rollenvertauschte" inverse Hölderungleichung nichts anderes als die Def. ist mit $r-1 = p'/p$, d.h. $r = p'$. Wir müssen daher nur diese Ungleichung für $r > 1$ zeigen.

Exkurs Ende

Wir bleiben nun bei der Wahl $d\mu_1 = dx$, $d\mu_2 = \omega(x)\,dx$. Da ω ein verdoppelndes Maß ist, beweisen wir die inverse Hölderungleichung mit Würfeln statt Bällen. Die Klasse aller ω, die die inverse Hölderungleichung ist offensichtlich invariant unter Dilatationen, Translationen und ~~der~~ Multiplikation mit positiven Skalaren. Wir normieren die Situation, indem wir einen Einheitswürfel Q_0 wählen mit $\omega(Q_0) \overset{!}{=} |Q_0| \overset{!}{=} 1$. Damit müssen wir nur noch

$$\int_{Q_0} \omega^{1-r} \leq \tilde{c}$$

zeigen, wobei $\tilde{r} > 1$, $\tilde{c} > 0$ nur noch von r und c abhängen.

Aus der angenommenen Hölder-Ungleichung folgt, dass es $0<\gamma, \delta<1$ gibt, sodaß $\forall$ Würfel Q und $\forall\ E\subset Q$ gilt: $w(E)<\gamma\, w(Q) \Rightarrow |E|<\delta|Q|$

~~M.~~ Wir definieren die gewichtete dyadische Maximalfunktion $(M_w^\Delta f)(x) := \sup_{Q\ni x} \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)|\,w(y)\,dy$

$M_w^\Delta f$ ist eine Martingale-Funktion, d.h. es gelten

(i) $\alpha < |Q_j|^{-1} \int_{Q_j} |f(x)|^w dx$ mit $\Omega_\alpha = \{x : M_w^\Delta f(x) > \alpha\}$

(ii) $\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|^w dx \le 2^n \alpha$

(iii) $|f(x)| \le \alpha$ für fast alle $x \in {}^c\bigcup_j Q_j$

(iv) $|\Omega_\alpha| \le \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx$

Zusammengefasst bedeutet das, dass ein $m\in\mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $\alpha>0$ die Menge $\{x : (M_w^\Delta f)(x) > \alpha\}$ als disjunkte Vereinigung von dyadischen Würfeln Q_j geschrieben werden kann, mit

$$\alpha < \frac{1}{w(Q_j)} \int_{Q_j} |f(x)|\,w(x)\,dx \le 2^m \alpha\,,$$ wobei m so gewählt wird, dass $w(\tilde{Q}) \le 2^m w(Q)$ ist, wobei $\tilde{Q}$ der "Vater" von Q ist. Die Existenz eines solchen m's folgt aus der Verdopplungseigenschaft von w

Wir betrachten nun $M_w^\Delta f$ mit $f = w^{-1}\chi_{Q_0}$ und bemerken $f \in L^1(w(x)dx)$. Wir setzen dann $E_k^k := \{x\in Q_0 : (M_w^\Delta f)(x) > 2^{Nk}\}$ und schließen, dass $w(E^k \cap Q) \le 2^{m-N} w(E^{k-1}\cap Q)$ $\forall Q$, die E^{k-1} ausmachen. Wir wählen nun ~~das~~ γ wie eben und fixieren N so groß, dass $2^{m-N} \le \gamma$.

Summiert man über alle Würfel, die E^{k-1} umfassen, so erhält man $|E^k| \le \delta|E^{k-1}|$ und daher $|E^k| \le \delta^k$ durch Iteration. Damit hat man

$$\int_{Q_0} w^{1-\bar{r}} = \int_{Q_0} f^{\bar{r}}\, w\,dx \le \int_{Q_0} (M_w^\Delta f)^{\bar{r}-1} f\,w\,dx = \int_{Q_0\cap\{M_w^\Delta f \le 1\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Q_0\cap E^k\setminus E^{k+1}}$$

Das erste Integral wird durch $|Q_0|=1$ majorisiert, wohingegen das k-te Integral der Summe durch

$$2^{N(k+1)(\bar{r}-1)} |E^k| \le 2^{N(k+1)(\bar{r}-1)} \delta^k$$ majorisiert wird.

Die Reihe konvergiert also für $\bar{r}$ beliebig nahe an 1, da $\delta<1$. ▨

5.2 Eine weitere Charakterisierung von A_1 ($\frac{1}{|B|}\int w(t)dt \le A\,w(x)\ \forall x \Leftrightarrow (Mw)(x) \le A\,w(x)\ \forall x$)

- Verhältnis zwischen der Grenzklasse A_1 und den restlichen A_p-Klassen
- Zunächst: einfache Konstruktion des "allgemeinen Elements" von A_1

Sei dazu zunächst $f \ge 0$ so, dass $(Mf)(x) < \infty$ für fast alle x ($\Leftrightarrow f \in L^1_{loc}$, $\int_{|x|<R} |f(x)|dx \le A \cdot R^n$ f. alle $R \to \infty$) und $q \in (0,1)$ fix. Dann behaupten wir, dass $w(x) = ((Mf)(x))^q \in A_1$, d.h. $(Mw)(x) \le A w(x)$ wo ~~$A = A(q)$~~ $A = A(q)$

Nach geeigneten Dilatationen, Translationen und Multiplikationen ~~[illegible]~~ kann dies auf den Spezialfall $\int_B w(x)dx \le c_n$ wobei $w(0) = (Mf)^q(0) = 1$ und B der um den Ursprung zentrierte Einheitsball ist, zurückgeführt werden.

Um $\int_B w(x)dx \le c$ zu zeigen, sei $B_2 = \{x : |x| \le 2\}$ und schreibe $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 = \chi_{B_2} f$ und $f_2 = \chi_{^cB_2} f$.

Sei $\lambda_1(\alpha) = |\{x \in B : (Mf_1)(x) > \alpha\}|$, dann ist

$$\int_{B_1} (Mf_1)^q(x)\,dx = \int_0^\infty q\,\lambda_1(\alpha)\alpha^{q-1}d\alpha = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

Für das erste Integral verwenden wir $\lambda_1(\alpha) \le |B| = c$, d.h. dieses Integral ist durch eine Konstante beschränkt. Für das zweite Integral verwenden wir die schwache L^1-Abschätzung der Maximalfkt

$|\{x : (Mf)(x) > \alpha\}| \le \frac{A}{\alpha}\int |f(x)|dx$ und erhalten $\lambda_1(\alpha) \le \frac{A}{\alpha}\int f_1 = \frac{A}{\alpha}\underbrace{\int_{B_2} f}_{\le |B_2|\cdot (Mf)(0) \le A\cdot 1} \le \frac{2A}{\alpha}$

$$\Rightarrow \int_B (Mf_1)^q(x)dx \le A.$$

Da f_2 in B_2 verschwindet, ist für eine beliebige um x zentrierte Kugel B'

$$\frac{1}{|B'|}\int_{B'_2} f_2(x)dx \le \frac{A}{|B''|}\int_{B''} f(x)dx\ ,\ \text{wobei } B'' = \{x : |x| \le 1 + \text{radius}(B')\}$$

$$\Rightarrow (Mf_2)(x) \le c\,(Mf)(0) \quad \forall x \in B \Rightarrow \int_B (Mf_2)^q dx \le c$$

Natürlich ist $Mf \le Mf_1 + Mf_2 \Rightarrow \int_B (Mf)^q \le A$. Da $w(x) = (Mf(x))^q$ ist $\int w(x)dx \le c$ und damit durch Rücktransformation $Mw(x) \le c\,w(x)$. Die umgekehrte Aussage gilt ebenso und beide sind in folgender Behauptung formuliert.

Behauptung 5 Sei $f \ge 0$ mit $(Mf)(x) < \infty$ fast überall.

Dann ist für $q \in (0,1)$ $(Mf)^q \in A_1$

Umgekehrt gibt es für gegebenes $w \in A_1$ eine $f \ge 0$ und $q \in (0,1)$, sodaß $\left|\frac{w(x)}{(Mf)^q(x)}\right| \le A < \infty$.

Für die umgekehrte Richtung sei $w \in A_1$. Dann erfüllt w eine inverse Hölderungleichung, d.h. $\exists r > 1$, sodaß

$$\left(\frac{1}{|B|}\int w^r dx\right)^{1/r} \le \frac{A}{|B|}\int w(x)dx \quad \forall \text{ Kugeln } B.$$

$$\le A\,w(\bar{x}), \text{ wo } \bar{x} \text{ das Zentrum von } B \text{ ist wg } w \in A_1$$

$\Rightarrow$ sup über alle um $\bar{x}$ zentrierten B gibt $(M(w^r))^{1/r}(x) \le A\,w(x)$. Nun setzt man $f = w^r$, $q = \frac{1}{r}$ ($q < 1$ wg $r > 1$), dann ist $(Mf)^q = (M(w^r))^{1/r}$ und damit $(Mf)^q \le c\,w$. Außerdem ist automatisch $(M(w^r))^{1/r} \ge w$ d.h. auch $(Mf)^q \ge w$ ☐

S.3 Faktorisierung von A_p-Gewichten

<u>Ziel</u>: Konstruktion eines allgemeinen A_p-Gewichts durch Elemente aus A_1.

<u>Behauptung 6</u> a) Seien $w_{1/2}$ A_1-Gewichte. Ist $1 \leq p < \infty$, so ist $w := w_1 \cdot w_2^{1-p} \in A_p$.

b) Sei umgekehrt $w \in A_p$, dann gibt es $w_{1/2} \in A_1$, sodass $w = w_1 \cdot w_2^{1-p}$.

<u>Beweis</u> a) Zuerst $p=2$. Ist $w = \frac{w_1}{w_2}$, dann $\int_B w\,dx \leq \int_B w_1\,dx \cdot [\inf_{x \in B} w_2(x)]^{-1}$ und analog

$\int_B w^{-1}\,dx \leq \int_B w_2\,dx \cdot [\inf_{x\in B} w_1(x)]^{-1}$ und daher

$\left(\frac{1}{|B|}\int w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int w^{-1}\,dx\right) \leq \prod_{j=1}^{2}\left[\frac{1}{|B|}\int_B w_j(x)dx\,[\inf_{x\in B} w_j(x)]^{-1}\right]$ und jeder Faktor ist beschränkt, da $w_i \in A_1$. $(i=1,2)$

Weniger mechanisches Argument: betrachte wieder die Familie der abgeschnittenen Faltungsoperatoren T_ϵ. $w_i \in A_1 \Leftrightarrow$ gleichmäßige $L^1(dx) \to L^1(dx)$-Beschränktheit von $w_1 T_\epsilon w_1^{-1}$ und $w_2 T_\epsilon w_2^{-1}$

Per Dualität sind die $w_i^{-1} T_\epsilon w_i$ $L^\infty(dx) \to L^\infty(dx)$-beschränkt.

Mit Konvexitätseigenschaften der Operatoren ist $w_1^{1/2} w_2^{-1/2} T_\epsilon w_1^{-1/2} w_2^{1/2}$ $L^2(dx) \to L^2(dx)$-beschränkt, d.h. $\frac{w_1}{w_2} \in A_2$ wegen Behauptung 1. $\left(\int |T_\epsilon f(x)|^p w(x)dx \leq A \int |f(x)|^p w(x)dx \Rightarrow w \in A_p\right)$

b) Für die umgekehrte Richtung gehen wir von T_ϵ zum Standard-Maximaloperator M über und betrachten $f \mapsto Tf \equiv w^{-1/2} M(w^{1/2} f) + w^{1/2} M(w^{-1/2} f)$.

Obwohl T nicht linear ist, ist er doch subadditiv, d.h. $T(f_1 + f_2) \leq Tf_1 + Tf_2$.

Ist $w \in A_2 \Rightarrow w^{-1} \in A_2$ (Selbstdualität), weshalb $w^{-1/2} M w^{1/2}$ und $w^{1/2} M w^{-1/2}$ beide $L^2(dx) \to L^2(dx)$-beschränkt sind, d.h. $\|Tf\|_2 \leq A\|f\|_2$ für ein $A > 0$.

Nun fixieren wir $f \geq 0$ mit $\|f\|_2 = 1$ und definieren $\eta \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (2A)^{-k} \underbrace{T^k f}_{\equiv T(T^{k-1}f) = \ldots}$

Dann ist $\|\eta\|_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$, d.h. $\eta \in L^2$.

Da T subadditiv ist und Positivität erhält, haben wir außerdem die punktweise Schranke $T\eta \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2A)^{-k} T^{k+1} f = \sum_{k=2}^{\infty} (2A)^{1-k} T^k f \leq (2A)\eta$. Für $w_1 = w^{1/2}\eta$ ist daher $Mw_1 \leq T(\eta) w^{1/2} \leq 2A\eta w^{1/2} = 2Aw_1$ und $w_1 \in A_1$. Analog für $w_2 = w^{-1/2}\eta$ ist $Mw_2 \leq 2Aw_2$, d.h. $w_2 \in A_1$ und per Definition ist $\frac{w_1}{w_2} = w$.

Modifikationen für $p \neq 2$: a) ($w_{1,2} \in A_1 \Rightarrow w = w_1 w_2^{1-p} \in A_p$) folgt mit dem gleichen Beweis.

b) Betrachte zuerst $p \geq 2$ und sei $w \in A_p$ und definiere

$$Tf = [w^{-1/p} M(f^{p/p'} w^{1/p})]^{p'/p} + w^{1/p} M(f w^{-1/p}).$$

Da $w^{-p'/p} \in A_{p'}$ (Dualitätseigenschaft), folgt, dass T L^p-beschränkt ist. Außerdem folgt mit Minkowskis Ungleichung wegen $p \geq 2$, $\frac{p}{p'} \geq 1$ dass $T(f_1 + f_2) \leq Tf_1 + Tf_2$.

Dann definieren wir η wie eben und schreiben $w_1 = w^{1/p} \eta^{p/p'}$ und $w_2 = w^{-1/p} \eta$.

Aus $T\eta \leq 2A\eta$ folgt dann wieder, dass $w_{1,2} \in A_1$ und darüberhinaus ist $w = w_1 w_2^{1-p}$
$= w^{1/p} \eta^{p/p'} (w^{-1/p} \eta)^{1-p}$
da $p/p' = p-1$

Der Fall $p \leq 2$ folgt durch die analoge Faktorisierung für $w^{-p'/p} \in A_{p'}$ und Potenzieren des Produkts zur $(-\frac{p}{p'})$-ten Potenz.

6 Weitere Resultate — A Die A_p-Klasse und inverse Hölderungleichungen

6.1 a) Seien $w_1 \in A_{p_1}$, $w_2 \in A_{p_2}$ mit $1 \leq p_{1,2} < \infty$ und $\theta \in [0,1]$.

Ist $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$ und $w^{1/p} = w_1^{(1-\theta)/p_1} \cdot w_2^{\theta/p_2}$ $\Rightarrow w \in A_p$

b) Daraus folgt, dass, wenn $w \in A_p$ und $0 \leq \theta = \frac{q-1}{p-1} \leq 1$ sind $\Rightarrow w^\theta \in A_q$ und insbesondere $w^\theta \in A_p$

c) $w \in A_p \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.d. $w^{1+\varepsilon} \in A_p$

a), b) folgen aus der Hölderungleichung, c) folgt daraus, dass w und $w^{-p'/p} \in A_\infty$ sind und daher eine inverse Hölderungleichung erfüllen.

6.2 a) Wir wissen bereits: $w \in A_p \Rightarrow \log w \in BMO$, es gibt aber auch eine Rückrichtung.

"$\Leftarrow$" Ist $f \in BMO$ reellwertig und $p > 1$ fix $\Rightarrow f = c \log w$ für ein $w \in A_p$

b) $f \in BMO \Leftrightarrow f = c \log w$ für ein w, das eine inverse Hölderungleichung erfüllt.

Für a) verwendet man $|B|^{-1} \int_B e^{\mu|f - f_B|} dx \leq C$

6.3 $w \in A_\infty \Leftrightarrow \frac{1}{|B|}\left(\int w(x)dx\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{|B|}\int_B \log\left(\frac{1}{w}\right)dx\right) \le A \quad \forall$ Kugeln B.

Da $\frac{p'}{p} = \frac{1}{p-1}$ ist, ist dies ~~G~~ gerade der $p \to \infty$ - Grenzwert der Definition von A_p-Gewichten

"Beweis": $w \in A_\infty \Rightarrow \exists p$ s.d. $w \in A_p$ und die Ungleichung folgt aus Jensen.

Andererseits impliziert die Ungleichung die Existenz von Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodaß
$e^{-c_1|B|/|F|} \le c_2 \frac{w(F)}{w(B)}$ $\forall$ Kugeln B und Teilmengen $F \subseteq B$

6.4 $w(x) = |x|^a \in A_p$ mit $p > 1 \Leftrightarrow a \in (-n, n \cdot (p-1))$ [w ist ein verdoppelndes Maß für $a > -n$]

Achtung: Es gibt verdoppelnde Maße, die bzgl Lebesgue ~~sie~~ rein singulär sind und absolut stetig verdoppelnde Maße, ~~die~~ deren Dichte auf einer Menge positiven Maßes verschwindet

6.5 Sei P ein Polynom d-ten Grades auf $\mathbb{R}^n$.

a) $|P|$ erfüllt eine inverse Hölderungleichung, d.h. $\log|P| \in BMO$

b) $|P|^a \in A_p$ $(p > 1)$, wenn $-1 < ad < p-1$

Darüberhinaus bleibt die A_p-Schranke von $|P|^a$ für fixes n, d, a beschränkt, wenn P über alle Polynome vom Grad d auf $\mathbb{R}^n$ variiert.

Dies folgt aus der Ungleichung $\int_B |P(x)|^{-\mu} dx \le A_{\mu d}\left(\int_B |P(x)| dx\right)^{-\mu}$ mit $\mu d < 1$ und der Einheitskugel B

6.6 a) Angenommen, w erfüllt eine inverse Hölderungleichung $\left(\frac{1}{|B|}\int w(x)^r dx\right)^{1/r} \le \frac{A}{|B|}\int w(x)dx$ $\forall$ Kugeln B, $r > 1$ fix

$\Rightarrow w$ erfüllt die gleiche Ungleichung für ein größeres r.

"Beweis": Aus der Annahme folgt ~~dass~~ $w^r \in A_\infty \Rightarrow w^r$ erfüllt ebenfalls eine inverse Hölderungleichung

$(Mw)(x) \le Aw(x)$ (d.h. $w \in A_1$) $\Rightarrow \exists r > 1$, sodaß $\left[M(w^r)\right]^{1/r}(x) \le A' w(x)$, d.h. $w^r \in A_1$

b) Angenommen $(Mw)(x) \le Aw(x)$

"Beweis": Aus der Annahme folgt $w \in A_\infty$, d.h. w erfüllt eine inverse Hölderungleichung.

6.7 Seien $d\mu_{1,2} \geq 0$ endliche Maße auf $\mathbb{R}^n$.

Definition $d\mu_1$ ist absolut stetig bzgl. $d\mu_2$ $:\Leftrightarrow$ $\forall \delta > 0\ \exists \gamma > 0$ sodaß $\left(\mu_2(E) \leq \gamma \Rightarrow \mu_1(E) \leq \delta\right)$.

Variante dieser Definition, die gleichmäßig auf jeder Skala gilt:

$\forall \delta > 0\ \exists \gamma > 0$, sodaß $\frac{\mu_1(E)}{\mu_1(B)} \leq \delta$, wenn $\frac{\mu_2(E)}{\mu_2(B)} \leq \gamma$ $\forall$ Kugeln B und Teilmengen $E \subseteq B$

In diesem Fall schreibt man $d\mu_1 \preceq d\mu_2$

Lemma $\preceq$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. $d\mu_1 \preceq d\mu_2$ genau dann, wenn auch $d\mu_2 \preceq d\mu_1$.

Bemerkungen
1) Sind $d\mu_2 = dx$, $d\mu_1 = \omega(x)dx$, dann: $d\mu_1 \preceq d\mu_2 \Leftrightarrow \omega \in A_\infty$ ~~[illegible]~~
2) Dass $\preceq$ eine Äquivalenzrelation ist folgt aus der inversen Hölderungleichung
3) $d\mu_1 \preceq d\mu_2 \Leftrightarrow d\mu_1$ erfüllt eine inverse Hölderungleichung bzgl. $d\mu_2$

6.8 Charakterisierung nicht-negativer Maße $d\mu_1, d\mu_2$, sodass für geeignete Operatoren T $T: L^p(d\mu_2) \to L^p(d\mu_1)$ beschränkt oder vom schwachen (p,p)-Typ ist.

a) Sei $p \in (1,\infty)$ fix, dann ist $\sup_{\Phi \in \mathcal{R}} \int |T_\Phi f|^p \, d\mu_1 \leq A \int |f|^p \, d\mu_2$ mit $T_\Phi f = \Phi * f$

genau dann, wenn $d\mu_1 = \omega_1 dx$ absolut stetig und $d\mu_2 = \omega_2(x)dx + d\nu$ sind und
$\qquad$ rein singulär

$\left(\frac{1}{|B|}\int \omega_1(x)dx\right) \cdot \left(\frac{1}{|B|}\int \omega_2(x)^{-p'/p}\,dx\right)^{p/p'} \leq A$ ~~erfüllt~~ $\forall$ Kugeln B erfüllt ist.

Außerdem gibt es ein Grenzresultat für $p = 1$.

b) Die selben Bedingungen sind äquivalent zur schwachen Abschätzung des Maximaloperators

$$\mu_1\{x : (Mf)(x) > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu_2$$

Für $p \in (1,\infty)$ sind diese Bedingungen jedoch nicht ~~an~~ für die starke Ungleichung
$\|Mf\|_{L^p(d\mu_1)} \leq A_p \|f\|_{L^p(d\mu_2)}$ ausreichend.

$\to$ Gegenbeispiele $n=1$, $p=2$, $f(x) = |x|^{-1}\left(\log\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)^{-2}$ $\quad \omega_1(x) = |x| \log\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $\omega_2(x) = |x|\left(\log\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)^2$.
(Konzentration am Ursprung)

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die starke Abschätzung ist hingegen

$$\int_B \left[M(\chi_B \omega_2^{1-p'})\right]^p \omega_1 \, dx \leq A \int_B \omega_1^{1-p'} dx \quad \forall \text{ Kugeln } B \quad (\text{Sawyer})$$

Für $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ ist dies natürlich zur üblichen A_p-Definition/-Bedingung äquivalent.

B Singuläre Integrale und Maximaloperatoren

6.9 Das Ergebnis $\int_{\mathbb{R}^n} [(T_* f)(x)]^p w(x)\,dx \le A_{p,w} \int [(Mf)(x)]^p w(x)\,dx$ $\left(T_* f = \sup_{\varepsilon>0} \overset{= f * q_\varepsilon \text{''}}{T_\varepsilon f} \quad \text{I } \chi_{\{|x|\ge\varepsilon\}} \right)$ kann auf Operatoren erweitert werden, die nicht translationsinvariant sind.

Sei dazu T $L^2 \to L^2$-beschränkt, durch $(Tf)(x) = \int K(x,y) f(y)\,dy$ ~~definiert~~ für alle kompakt getragenen L^2-Funktionen f definiert, wobei x außerhalb des Trägers von f liegt.

Angenommen, es gibt $\gamma, A > 0$, sodaß

$$|K(x,y)| \le A |x-y|^{-n} \quad \text{und}$$

$$|K(x,y) - K(x',y)| \le A \frac{|x-x'|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}}$$ wann immer $|x-x'| \le \frac{1}{2}|x-y|$ ist (und analoge Version mit $y \leftrightarrow x$)

erfüllt sind. Definiert man dann die abgeschnittenen Operatoren

$$(T_\varepsilon f)(x) \equiv \int_{|x-y|\ge\varepsilon} K(x,y) f(y)\,dy \quad \text{und} \quad (T_* f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |(T_\varepsilon f)(x)|,$$ so gilt

$$\int [(T_* f)(x)]^p w(x)\,dx \le A_{p,w} \int [(Mf)(x)]^p w(x)\,dx$$ ~~$\forall$~~ für alle beschränkten und kompakt getragenen f, ~~und~~ $w \in A_\infty$ und $1 < p < \infty$

<u>Bemerkung</u> f beschränkt und kompakt getragen $\Rightarrow \int [(T_* f)(x)]^p w(x)\,dx$, $\int [(Mf)(x)]^p w(x)\,dx < \infty$, denn:

Sei $\mathrm{supp}(f) \subset \{x : |x| \le R\} \Rightarrow |(T_* f)(x)| \le A |x|^{-n}$ für $|x| > 2R$. Für $|x| \le 2R$ verwendet man die inverse Hölderungleichung, d.h. $\exists\, r > 1$ sodaß $w^r \cdot \chi_{\{|x| \le 2R\}}$ integrierbar ist, wohingegen $T_* f \in L^{r'}$ $\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1\right)$, da T_* auf $L^{r'}$ beschränkt ist (abgeschnittene singuläre Integraloperatoren sind L^p-beschränkt $\forall\, 1 < p < \infty$)

6.10 Definition $ML^p(w)$ ist die Menge aller $f \in L^1_{loc}$, die zudem

$$\|f\|_{ML^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} [(Mf)(x)]^p \, w(x)\, dx \right)^{1/p} < \infty \quad \text{erfüllen.}$$

Für $1 \le p < \infty$ ist $ML^p(w)$ mit obiger Norm ein Banachraum.

Behauptung Ist $\int w(x)dx = \infty$ und $ML^p(w) \neq \emptyset \Rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $ML^p(w)$.

Bemerkungen 1) Spezialfall $w \in A_\infty$. Da $w(x)dx$ ein verdoppelndes Maß ist, ist $\|w\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \infty$

(sh. $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$, wenn nicht $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$, denn: $\exists\, c > 1$, sodaß $\mu(B(0,2\delta)) \ge c\, \mu(B(0,\delta))\ \forall \delta > 0$ → iteriere)

2) $ML^p(w) \neq \emptyset \Leftrightarrow \int (1+|x|)^{-np} w(x)\,dx < \infty$, da $(Mf)(x) \ge \frac{A}{(1+|x|)^n}$, wenn $f \neq 0$.

Beweis Sei $f \in ML^p(w) \Rightarrow [M(f\chi_{{}^cB_R})](x) \xrightarrow{R\to\infty} 0 \ \forall x$, denn andernfalls gäbe es $c > 0$ mit $(Mf)(x) \ge c \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Mittels majorisierter Konvergenz folgt, dass ML^p-Funktionen durch ML^p-Funktionen mit kompaktem Träger approximierbar sind.
$\underset{\Sigma f \in ML^p}{}$

Sei also $f \in ML^p(w)$ kompakt getragen und $\Phi \in C_c^\infty$ mit $\int \Phi = 1$. Dann ist auch $f * \Phi_t \in C_c^\infty$ für alle $t > 0$. Außerdem konvergiert $f * \Phi_t \xrightarrow{t\to 0} f$ in $ML^p(w)$-Norm, da $M(\Phi_t * f) \le A\, Mf$ und $M(f - f*\Phi_t) \xrightarrow{t\to 0} 0$ fast überall. ▨

6.11 Die Ungleichung $\int [M f(x)]^q w(x)dx \le A_q \int |f(x)|^q (Mw)(x) dx$ $(w \ge 0,\ w \in L^1_{loc}$ damals$)$ hat ein Analogon für T und T_*, nämlich $\forall\ 1 < q < \infty$ gilt

$$\int [(T_* f)(x)]^q w(x)dx \le A_{q,r} \int |f(x)|^q (M_r w)dx \quad \text{mit } (M_r w)(x) := [M(w^r)]^{1/r}(x) \quad r > 1$$

"Beweis": $w \le M_r w$ und $M_r w \in A_1 \subset A_\infty$ nach 5.2. Verwende dann Satz 2. ▨
~~(für T_* klappt das ja~~

$\left(\int [(T_* f)(x)]^p w(x)dx \le \int [(Mf)(x)]^p w(x)dx \right.$
$\forall\, w \in A_\infty,\ 0 < p < \infty)$