Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
12. Übungsblatt

Ausgabe am 07.02.2022, Abgabe bis zum 14.02.2022 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen vom 14.02.-19.02.2022

Aufgabe K12.1 (6 Punkte)
Seien X ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\Phi \in \mathcal{L}(X)$ eine lineare Abbildung und $\Phi^n := \Phi \circ ... \circ \Phi$ für $n \in \mathbb{N}$ die n-malige Hintereinanderausführung von Φ. Zeigen Sie:

(a) Hat Φ den Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so besitzt Φ^n den Eigenwert λ^n.

(b) Ist Φ nilpotent, d.h. gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $\Phi^m = 0$, so besitzt Φ genau den Eigenwert 0.

(c) Sind $p = \sum_{k=0}^n a_k t^k \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von Φ, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(\Phi) := \sum_{k=0}^n a_k \Phi^k$.

Aufgabe K12.2 (6 Punkte)
Gegeben seien die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und der Vektor $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) := \det[A - \lambda \cdot \mathbb{1}]$ von A.

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{v}_1$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

(c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ von A und zeigen Sie, dass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ paarweise verschieden sind. (Hinweis: Verwenden Sie, dass λ_1 ein Eigenwert ist.)

(d) Berechnen Sie durch Anwendung des Gauß-Algorithmus' alle weiteren Eigenvektoren von A, d.h. für jedes $i \in \{2, 3\}$ alle Vektoren $\vec{v}_i \in \mathbb{C}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, für die $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ gilt.

Aufgabe K12.3 (6 Punkte)
Seien die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ wie in Aufgabe K12.2 und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{C}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(a) Verifizieren Sie, dass $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{C}^3$ linear unabhängig ist.

(b) Sei die Matrix $H := (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ durch die Eigenvektoren als Spalten gegeben. Berechnen Sie die inverse Matrix H^{-1} von H.

(c) Verifizieren Sie, dass $H^{-1}AH = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{smallmatrix}\right)$ gilt.

Aufgabe K12.4 (6 Punkte)
Seien der komplexe Vektorraum $X := \ell^2(\mathbb{N}_0) = \left\{ (a_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \,\middle|\, \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 < \infty \right\}$ und die lineare Abbildung $\Phi \in \mathcal{L}(X)$ definiert durch

$$\forall (a_n)_{n=0}^\infty \in X : \quad \Phi\big[(a_0, a_1, a_2, \ldots)\big] \ := \ (0, a_0, a_1, \ldots)\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Φ besitzt keine Eigenwerte.

(b) Ist $\lambda \in \overline{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le 1\}$, so ist $\Phi - \lambda \cdot \mathbb{1}$ nicht surjektiv.