Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
11. Übungsblatt

Ausgabe am 31.01.2022, Abgabe bis zum 07.02.2022 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen vom 07.02.-11.02.2022

Aufgabe K11.1 (6 Punkte)
Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $X = \{f = a + bx + cx^2 + dx^3 : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ mit Skalarprodukt

$$\langle f|g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\, f,g \in X\,.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des Unterraums $U := \operatorname{span}(\{1, x, x^2\})$.

Aufgabe K11.2 (6 Punkte)
Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \in \mathcal{L}(X)$. Weiterhin genüge σ den Gleichungen

$$\sigma^2 \circ (\mathbb{1}_X - \sigma) = 0\,, \tag{1}$$
$$\sigma \circ (\mathbb{1}_X - \sigma)^2 = 0\,. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass σ eine Projektion ist, d.h., dass $\sigma = \sigma^2$ gilt.

(b) Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $\sigma_{(1)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, für die $\sigma_{(1)}^2 \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} - \sigma_{(1)}) = 0$ und $\sigma_{(1)} \neq \sigma_{(1)}^2$ gelten. (<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie rechte obere Dreieckmatrizen.)

(c) Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $\sigma_{(2)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, für die $\sigma_{(2)} \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} - \sigma_{(2)})^2 = 0$ und $\sigma_{(2)} \neq \sigma_{(2)}^2$ gelten. (<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie rechte obere Dreieckmatrizen.)

Aufgabe K11.3 (6 Punkte)
Gegeben seien $X := \mathbb{R}^3$ und Vektoren $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

(a) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig?

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$ mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens.

Aufgabe K11.4 (6 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definieren wir

$$\|A\|_{p,p} \;:=\; \sup\left\{ \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \,:\, x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\} ,$$

wobei $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$ für $x \in \mathbb{C}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass alle $\|\cdot\|_p$-Normen auf $\mathbb{C}^n$ äquivalent sind, d.h. geben Sie zu $p, q \in [1, \infty]$ Konstanten $0 < r_{p,q,n} \leq s_{p,q,n} < \infty$ so an, dass

$$\forall\, x \in \mathbb{C}^n : \quad r_{p,q,n}\, \|x\|_p \;\leq\; \|x\|_q \;\leq\; s_{p,q,n}\, \|x\|_p$$

gilt.

Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie die Hölderungleichung

$$\sum_{j=1}^n |\overline{a_j} \cdot b_j| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_{p'} , \quad a, b \in \mathbb{C}^n$$

für alle $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ und $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{C}^n$ sowie $1 \leq p \leq \infty$ und p', die $1/p + 1/p' = 1$ erfüllen (mit der Konvention $p' = 1$ falls $p = \infty$ und umgekehrt) verwenden.

(b) Zeigen Sie, dass $\|AB\|_{p,p} \leq \|A\|_{p,p} \|B\|_{p,p}$ für alle $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt.

(c) Sei $\|A\|_{p,p} < 1$. Zeigen Sie, dass $\ker[\mathbb{1}_{\mathbb{C}^n} - A] = \{0\}$ ist und folgern Sie, dass $\mathbb{1}_{\mathbb{C}^n} - A$ invertierbar ist.