Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
10. Übungsblatt

Ausgabe am 24.01.2022, Abgabe bis zum 31.01.2022 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen vom 31.01.-04.02.2022

Aufgabe K10.1 (6 Punkte)
Sei $X := C([-\pi, \pi], \mathbb{C}) := \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \mid f \,\text{stetig}\}$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der stetigen Funktionen von $[-\pi, \pi]$ nach $\mathbb{C}$. Man kann zeigen, dass

$$\langle f|g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t)\, dt$$

ein Skalarprodukt auf X definiert, wobei die rechte Seite durch das Riemann-Integral gegeben ist.
Berechnen Sie $\langle f|g\rangle$ für alle möglichen Paare von $f, g \in \{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t\}$.

Hinweis: Sie können die Symmetrien des Skalarprodukts sowie der trigonometrischen Funktionen ausnutzen.

Aufgabe K10.2 (6 Punkte)
Sei $A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ \overline{a_{1,2}} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ mit $a_{1,1}, a_{2,2} > 0$ und $a_{1,2} \in \mathbb{C}$ so, dass $|a_{1,2}| < \min\{a_{1,1}, a_{2,2}\}$.
Zeigen Sie, dass durch

$$Q_A : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}\,, \qquad Q_A\left[\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] := (\overline{w}_1\,,\, \overline{w}_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ definiert wird.

Aufgabe K10.3 (6 Punkte)
Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Q : X \times X \to \mathbb{K}$ eine symmetrische quadratische Form. Zeigen Sie folgende Gleichheiten.

(a) Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt für alle $x, y \in X$

$$Q(x, y) = \frac{1}{4}\left[Q(x + y, x + y) - Q(x - y, x - y)\right]$$

(b) Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt für alle $x, y \in X$

$$Q(x, y) = \frac{1}{4}\left[Q(x + y, x + y) - \mathrm{i}Q(x + \mathrm{i}y, x + \mathrm{i}y) - Q(x - y, x - y) + \mathrm{i}Q(x - \mathrm{i}y, x - \mathrm{i}y)\right]$$

(c) Entscheiden Sie, ob die Symmetrie von Q in einem der beiden Fälle verzichtbar ist und geben Sie eine logische Begründung für Ihre Antwort.

Aufgabe K10.4 (6 Punkte)
Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und dadurch induzierter Norm $\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}$.

(a) Zeigen Sie die, dass für alle $\vec{x}, \vec{y} \in X$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$

gilt.

(b) Folgern Sie, dass die p-Norm $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ für $p \in [1,\infty)\setminus\{2\}$ *nicht* durch ein Skalarprodukt induziert wird.

Hinweis: Suchen Sie ein Beispiel, welches (a) verletzt.