Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
9. Übungsblatt

Ausgabe am 17.01.2022, Abgabe bis zum 24.01.2022 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen vom 24.01.-28.01.2022

Aufgabe K9.1 (6 Punkte)
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie die Elementarmatrizen $G_1, G_2, \widehat{G}_2, \widehat{G}_3, S^{(1,j_1)}, S^{(2,j_2)} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß Vorlesung so, dass

$$D = \widehat{G}_2\, \widehat{G}_3\, G_2\, S^{(2,j_2)}\, G_1\, S^{(1,j_1)}\, A$$

eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe K9.2 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix durch Anwendung des Gauß-Algorithmus:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Aufgabe K9.3 (6 Punkte)
Sei $\mathbb{F}$ ein Körper und $A = (\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m) \in \mathbb{F}^{n\times m}$ mit Spaltenvektoren $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m \in \mathbb{F}^n$ sowie $\vec{b} \in \mathbb{F}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ genau dann lösbar ist, wenn $\dim \operatorname{span}(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m) = \dim \operatorname{span}(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m, \vec{b})$ gilt.

(b) Geben Sie die Bedingungen an $b_1, ...b_4 \in \mathbb{R}$ an, unter denen das reelle Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= b_1\,, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= b_2\,, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= b_3\,, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

lösbar ist, und bestimmen Sie in diesem Fall die allgemeine Lösung.

Aufgabe K9.4 (6 Punkte) Seien $\mathbb{F}$ ein Körper und $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{1} - A^m \;=\; (\mathbb{1} - A)\left(\sum_{j=0}^{m-1} A^j\right) \;=\; \left(\sum_{j=0}^{m-1} A^j\right)(\mathbb{1} - A)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Sei A *nilpotent*, d.h. es existiere ein $N \in \mathbb{N}$ mit $A^N = 0$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\mathbb{1} - A$ invertierbar ist, und bestimmen Sie $(\mathbb{1} - A)^{-1}$.

(c) Bestimmen Sie (z.B. mit den vorigen Teilaufgaben) die Inverse von

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{3\times 3},$$