Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
8. Übungsblatt

Ausgabe am 10.01.2022, Abgabe bis zum 17.01.2022 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen vom 17.01.-21.01.2022

Aufgabe K8.1 (6 Punkte)
Wir beginnen mit etwas Notation.

Definition 1. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ ein Körper und $A = (\alpha_{n,m})_{n\in\mathbb{Z}_1^N, m\in\mathbb{Z}_1^M} \in \mathbb{F}^{N\times M}$ eine $N \times M$-Matrix. Für $n \in \mathbb{Z}_1^N$ und $m \in \mathbb{Z}_1^M$ seien weiterhin

$$\vec{a}_m := \begin{pmatrix} \alpha_{1,m} \\ \vdots \\ \alpha_{N,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{N\times 1} \quad \text{und} \quad \vec{b}_n := \begin{pmatrix} \alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,M} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{1\times M}$$

Spalten- und Zeilenvektoren (bzw. $N \times 1$- und $1 \times M$-Matrizen), sodass

$$A = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_M \end{pmatrix}.$$

Wir definieren dann folgende Objekte:

$$\begin{aligned} \text{Spaltenraum}(A) &:= \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_M\}, & \text{Spaltenrang}(A) &:= \dim \text{Spaltenraum}(A), \\ \text{Zeilenraum}(A) &:= \operatorname{span}\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_N\}, & \text{Zeilenrang}(A) &:= \dim \text{Zeilenraum}(A). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\text{Spaltenraum}(A) = \operatorname{ran}(\Phi)$ und dementsprechend $\text{Spaltenrang}(A) = \dim \operatorname{ran}(\Phi)$ gelten.

(b) Zeigen Sie, dass $\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A^T)$ gilt.

(c) Bestimmen Sie $\text{Zeilenrang}(A)$ und $\text{Spaltenrang}(A)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe K8.2 (6 Punkte)
Folgenden Satz dürfen Sie als gegeben betrachten.

Satz 2 (Satz und Definition – Rang von A)**.** *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ ein Körper und $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ eine Matrix. Dann gilt*

$$\textit{Zeilenrang}(A) = \textit{Spaltenrang}(A)$$

und diese Zahl wird als Rang von A *bezeichnet. Man schreibt* $\operatorname{rang}(A) := \textit{Spaltenrang}(A)$.

Seien nun $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ ein Körper, $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{F}^{n\times r}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 2 folgende Aussagen.

(a) $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$.

(b) $\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.

(c) $\operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}$.

Aufgabe K8.3 (6 Punkte)
Beweisen Sie Satz VIII.1 mit vollständiger Induktion für $L > 2$.

Aufgabe K8.4 (6 Punkte)
Seien $\mathbb{F}$ ein Körper, $N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{F}$. Beweisen Sie (mit vollständiger Induktion), dass

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & \ldots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}\right] = \prod_{1\leq i<j\leq N} (x_j - x_i)\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie z.B. elementare Spaltenumformungen.