Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
7. Übungsblatt

Ausgabe am 20.12.2021, Abgabe bis zum 10.01.2022 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen vom 10.01.-14.01.2022

Aufgabe K7.1 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe K7.2 (6 Punkte)
Seien $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\Phi_\lambda : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix

$$A_\lambda \;:=\; \mathcal{M}[\Phi_\lambda] \;=\; \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -i & \lambda+i & 1 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Geben Sie diejenigen Werte von λ an, für die A_λ invertierbar ist und bestimmen Sie $\dim \operatorname{ran}(\Phi)$ für diese λ.

Aufgabe K7.3 (6 Punkte)
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $A := \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie $\det[A]$.

(b) Bestimmen Sie die Matrix der Minoren A_{Minor}.

(c) Bestimmen Sie damit die Inverse A^{-1}.

Aufgabe K7.4 (6 Punkte)
Seien $N \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(N) \;&:=\; \left\{ U \in \mathbb{C}^{N\times N} \;\middle|\; \det(U) \neq 0\,, \quad U^{-1} = U^* \right\}, \\ \mathcal{S}(N) \;&:=\; \left\{ A \in \mathbb{Z}^{N\times N} \;\middle|\; \det(A) = 1 \right\}, \end{aligned}$$

wobei $U^* = (v_{i,j})_{i,j=1}^N$ aus $U = (u_{i,j})_{i,j=1}^N$ durch Transposition und komplexe Konjugation aller Matrixelemente hervorgeht, also $v_{i,j} := \overline{u_{j,i}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}(N) \subset GL(N, \mathbb{C})$ und $\mathcal{S}(N) \subset GL(N, \mathbb{C})$ jeweils Untergruppen (bezüglich Matrixmultiplikation) sind.

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{R}(2)$ und $\mathcal{S}(2)$.

(c) Bestimmen Sie $\mathcal{R}(2) \cap \mathcal{S}(2)$.

Wir wünschen Ihnen frohe Feiertage und einen guten Rutsch!