Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
6. Übungsblatt

Ausgabe am 13.12.2021, Abgabe bis zum 20.12.2021 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen und der Zentralübung vom 20.12.-22.12.2021

Aufgabe K6.1 (6 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

(a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (3x + 2y, x)$

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$

(c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x, -y)$ (über $\mathbb{R}$)

(d) $\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z = x + \mathrm{i}y \mapsto \bar{z} := x - \mathrm{i}y$ (über $\mathbb{C}$)

(e) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(1)$ (über $\mathbb{R}$)

(f) $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ p \mapsto p \cdot (X^3 + X)$.

Aufgabe K6.2 (6 Punkte)
Sei die Matrixdarstellung $\mathcal{M}[\Phi] =: F$ einer linearen Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie Basen $A = \{\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ von $\mathbb{R}^3$ sowie $B = \{\vec{w}, \vec{w}'\}$ von $\mathbb{R}^2$ so, dass $\operatorname{Ker} F = \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ und $\operatorname{Ran} F = \operatorname{span}(\vec{w}')$.

(b) Geben Sie für jeden Vektor $\vec{y} = (y_1, y_2)^T \in \operatorname{Ran}[\Phi]$ eine explizite Parametrisierung der Menge $\Phi^{-1}(\vec{y}) \subset \mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe K6.3 (6 Punkte)
Sei V ein $\mathbb{F}$-Vektorraum. Ein Endomorphismus $P : V \to V$ heißt *Projektion*, falls $P^2 = P$ gilt. Sei P eine Projektion, zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Ran} P = \{v \in V \mid P(v) = v\}$.

(b) $V = \operatorname{Ran} P \oplus \operatorname{Ker} P \quad (:\Leftrightarrow\ \operatorname{Ran} P + \operatorname{Ker} P = V\ \wedge\ \operatorname{Ran} P \cap \operatorname{Ker} P = \{\vec{0}\})$.

(c) $1 - P := \mathbb{1}_V - P$ ist eine Projektion, wobei $\mathbb{1}_V : V \to V, v \mapsto v$ die Identitätsabbildung auf V notiert.

(d) $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$ ist eine Projektion.

Aufgabe K6.4 (6 Punkte)
Sei $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ die lineare Abbildung, für die $\Phi(\vec{e}_1) = \frac{9}{25}\vec{e}_1 + \frac{12}{25}\vec{e}_3$, $\Phi(\vec{e}_2) = \vec{0}$ und $\Phi(\vec{e}_3) = \frac{12}{25}\vec{e}_1 + \frac{16}{25}\vec{e}_3$ sind.

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\mathcal{M}[\Phi]$ bezüglich der Standardbasen.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Matrixdarstellung $\mathcal{M}[\Phi]$, dass Φ eine Projektion ist (s. Aufgabe K6.3).

(c) Sei $\mathcal{Y} := \{2\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Basis ist.

(d) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $A := \mathcal{M}_{\mathcal{Y},\mathcal{E}}[\Phi]$ bezüglich der Basis $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^3$ und der Standardbasis $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und berechnen Sie $A^2 - A$.