Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
5. Übungsblatt

Ausgabe am 06.12.2021, Abgabe bis zum 13.12.2021 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen vom 13.12.-17.12.2021

Aufgabe K5.1 (6 Punkte)
Seien die Unterräume U, W von $\mathbb{R}^5$ gegeben durch:

$$U := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\4\\4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\3\\4\end{pmatrix}\right\},\ W := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\-3\\5\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\\-5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\6\\-1\\-9\\5\end{pmatrix}\right\}$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $U, W, U + W$ und $U \cap W$

Aufgabe K5.2 (6 Punkte)
Geben Sie für die folgenden Vektorräume jeweils eine Basis an:

(a) $\{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(b) $\operatorname{span}(X^2, X^2 + 1, X + 1, X^2 + X + 1, X^4 + X^3) \subset \mathbb{R}[X]$

(c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Anmerkung: $\mathbb{R}[X] := \{\sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_i X^i \mid (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0},\ a_i \neq 0 \text{ für endlich viele } i \in \mathbb{N}_0\}$, bezeichnet den Polynomring über $\mathbb{R}$, welcher bzgl. punktweiser/gliedweiser Multiplikation aber auch einen Vektorraum bildet (Siehe auch Aufgabe K4.4 sowie K5.3 (d)).

Aufgabe K5.3 (6 Punkte)
Sei $\mathbb{F}$ ein beliebiger Körper. Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Vektorräume über den jeweiligen Körpern:

(a) $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$

(b) $\mathbb{F}^{m\times n} := \{(a_{ij})_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n} \mid a_{ij} \in \mathbb{F}\}$ über $\mathbb{F}$

(c) $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ (*Hinweis*: Erinnern Sie sich an den Hinweis in K2.4)

(d) $\mathbb{F}[X] := \{\sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_i X^i \mid (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}_0},\ a_i \neq 0$ für endlich viele $i \in \mathbb{N}_0\}$ über $\mathbb{F}$.

Hinweis: Begründen Sie Ihre Antwort durch die Angabe einer Basis respektive einer unendlichen linear unabhängigen Teilmenge.

Aufgabe K5.4 (6 Punkte)
Sei $V \neq \{0\}$ ein $\mathbb{F}$-Vektorraum, und $B \subseteq V$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) B ist eine Basis von V.

(b) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V, d.h. $\operatorname{span}(B) = V$ und für alle $w \in B$ gilt $\operatorname{span}(B \setminus \{w\}) \neq V$.

(c) Zu jedem $v \in V$ gibt es ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}$, $v_1, ..., v_n \in B$ paarweise verschieden, und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{F}$ mit $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$.

(d) B ist maximal linear unabhängig in V, sprich B ist linear unabhängig und für alle $v \in V \setminus B$ ist $B \cup \{v\}$ linear abhängig.