Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
4. Übungsblatt

Ausgabe am 29.11.2021, Abgabe bis zum 06.12.2021 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen vom 06.12.-10.12.2021

Aufgabe K4.1 (6 Punkte)
Sind die folgenden Mengen von Vektoren in dem jeweiligen Vektorraum linear abhängig?

(a) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$

(b) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$

(c) $\{1, \sqrt{\frac{1}{2}}, 3+\sqrt{2}\}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$

(d) $\{(1,2),(3,4)\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$

(e) $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$

(f) $\{(a,b),(c,d)\}$ mit $ad-bc=0$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe K4.2 (6 Punkte)
Welche der folgenden Mengen sind Unterräume der jeweils angegebenen Vektorräume?

(a) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2 = x_3\} \subset \mathbb{R}^3$

(b) $\{(1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

(c) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

(d) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \leq x_3\} \subset \mathbb{R}^3$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe K4.3 (6 Punkte)
Sei K ein Körper.

(a) Sei $K^{\mathbb{N}_0} := \{f : \mathbb{N}_0 \to K\}$ die Menge aller Folgen in K (der sog. *Folgenraum*). Zeigen Sie, dass $K^{\mathbb{N}_0}$ einen K-Vektorraum bzgl. punktweiser Addition und skalarer Multiplikation

$$\forall\, f = (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}, g = (b_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in K^{\mathbb{N}_0},\ \lambda \in K :$$

$$f + g := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}_0}, \quad \lambda \cdot f := (\lambda a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$$

bildet.

(b) Sei X eine abstrakte Unbestimmte. Dann definieren wir die Menge der *Polynome über* K als
$$K[X] := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in K^{\mathbb{N}_0} \mid a_i \neq 0 \text{ für endlich viele } i \in \mathbb{N}_0\},$$
wobei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in K[X]$ formell mit $p(X) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ identifiziert wird.

Zeigen Sie, dass $K[X]$ ein Unterraum von $K^{\mathbb{N}_0}$ ist.

Aufgabe K4.4 (Fortsetzung von Aufgabe K4.3) (6 Punkte)
Sei $K[X]$ wie in Aufgabe K4.3 definiert und versehen mit punktweiser Addition sowie dem *Cauchy*-Produkt:

$$\forall\, p = (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}, q = (b_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in K[X] : \quad p \cdot q := (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0},$$

mit
$$c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass $K[X]$ damit einen kommutativen Ring (mit Einselement) bildet.