Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
3. Übungsblatt

Ausgabe am 22.11.2021, Abgabe bis zum 29.11.2021 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen vom 29.11.-03.12.2021

Aufgabe K3.1 (6 Punkte)
Gegeben Sei die Menge $K := \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ zusammen mit der Addition

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y'),$$

sowie Multiplikation

$$(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ einen Körper mit multiplikativem Inversen $(x, y)^{-1} := (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ bildet.

Anmerkung: Mit der Identifikation $i := (0, 1)$ bezeichnen wir K auch als Körper der *komplexen* Zahlen $\mathbb{C}$.

Aufgabe K3.2 (6 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mitsamt der Relation $R : (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \to \{\text{w,f}\}$, definiert durch:

$$\forall (p, q), (r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \ (p, q) \sim (r, s) :\Leftrightarrow R((p, q), (r, s)) = \text{w} :\Leftrightarrow ps = qr.$$

(a) Zeigen Sie, dass R ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ist.

(b) Damit seien nun die *rationalen* Zahlen $\mathbb{Q} := {}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}/_{\sim}$ definiert. Zeigen Sie die Wohldefiniertheit (Unabhängigkeit vom Repräsentanten) der folgenden Verknüpfungen auf $\mathbb{Q}$:

$$\forall \left[(p, q)\right], \left[(r, s)\right] \in \mathbb{Q} : \ \left[(p, q)\right] + \left[(r, s)\right] := \left[(ps + qr, qs)\right]$$

$$\forall \left[(p, q)\right], \left[(r, s)\right] \in \mathbb{Q} : \ \left[(p, q)\right] \cdot \left[(r, s)\right] := \left[(pr, qs)\right].$$

(*Hinweis:* Die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ist durch folgende Aussage definiert:
Für alle $[(p, q)], [(r, s)], [(p', q')], [(r', s')] \in \mathbb{Q}$ *mit* $[(p, q)] = [(p', q')]$ *und* $[(r, s)] = [(r', s')]$ *gelten* $[(ps + qr, qs)] = [(p's' + q'r', q's')]$ *und* $[(pr, qs)] = [(p'r', q's')]$.)

Aufgabe K3.3 (6 Punkte)
Sei K eine Menge mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$. Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ noch kein Körper zu sein braucht, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

(3) $\forall a, b, c \in K: \ a(b + c) = ab + ac$.

(*Hinweis:* Finden Sie durch geeignete Wahl von $+, \cdot$ ein Gegenbeispiel für $K := \{0, 1\}$.)

Aufgabe K3.4 (6 Punkte)
Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Körper mit genau 4 Elementen.

(*Hinweis:* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $K = \{0, 1, a, b\}$. Untersuchen Sie, inwieweit $(K, +, \cdot)$, d.h. K zusammen mit Addition und Multiplikation dann bereits durch die Körperaxiome notwendig bestimmt ist. Sie dürfen natürlich den Satz von Lagrange aus dem Tutorium verwenden, welcher besagt, dass die Ordnung $|G|$ durch die Ordnung $|U|$ jeder Untergruppe U von G geteilt wird. Insbesondere trifft dies auf die zyklischen Gruppen, die von Elementen von G erzeugt werden, zu.)