Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
2. Übungsblatt

Ausgabe am 15.11.2021, Abgabe bis zum 22.11.2021 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen vom 22.11.-26.11.2021

Aufgabe K2.1 (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Menge $R := \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid p,q \in \mathbb{Z},\ q \text{ ungerade}\}$ bezüglich der üblichen Verknüpfungen $(+,\cdot)$ einen kommutativen Ring bildet, der kein Körper ist.

Aufgabe K2.2 (6 Punkte)
Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

(a) $\forall a \in R: \quad a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

(b) $\forall a \in R: \quad a \cdot (-1) = -a = (-1) \cdot a$

(c) $\forall a, b \in R: \quad a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$

(d) $\forall a, b \in R: \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Sei nun K ein Körper, zeigen Sie des Weiteren:

(e) K ist *nullteilerfrei*, d.h.: $\forall\, a, b \in K: \quad a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \ \vee\ b = 0$

(f) $\forall a, b, c \in K: \quad a \cdot b = a \cdot c \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$

Aufgabe K2.3 (6 Punkte)
Sei G eine Gruppe und $A \subseteq G$ eine Teilmenge. Die von A *erzeugte* Untergruppe $\mathrm{erz}(A)$ sei definiert als:

$$\mathrm{erz}(A) := \{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in A \vee a_k^{-1} \in A \text{ für alle } k = 1, \ldots, n\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{erz}(A)$ die kleinste Untergruppe von G ist, welche A enthält, d.h.:

(a) $\mathrm{erz}(A)$ ist eine Untergruppe von G mit $A \subseteq \mathrm{erz}(A)$.

(b) Ist $U \subseteq G$ eine Untergruppe von G mit $A \subseteq U$, so folgt $\mathrm{erz}(A) \subseteq U$.

Aufgabe K2.4 (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass $K := \mathbb{Q}+\sqrt{2}\cdot\mathbb{Q} := \{\alpha+\sqrt{2}\cdot\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ bezüglich der üblichen Verknüpfungen $(+,\cdot)$ einen Körper bildet.
Warum hingegen stellt $M := \mathbb{Q} + \pi \cdot \mathbb{Q} := \{\alpha + \pi \cdot \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ bzgl. den Verknüpfungen $(+,\cdot)$ noch nicht einmal ein Ring dar?
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass π *transzendent* ist, d.h. dass für kein $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ mit rationalen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{Q}, \forall 1 \leq k \leq n$ sowie $a_n \neq 0$ existiert, welches $p(\pi) = 0$ erfüllt.