Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
1. Übungsblatt

Ausgabe am 08.11.2021, Abgabe bis zum 15.11.2021 um 9.00 Uhr, Besprechung in den kleinen Übungen vom 15.11.-19.11.2021

Hinweise zur Bearbeitung der Hausaufgaben:

- Zulässig sind ausschließlich handschriftliche Einzelabgaben als PDF in studIP. Ein fachlicher Gedankenaustausch mit Ihren Kommilitonen ist aber nicht nur zulässig, sondern oftmals auch empfehlenswert.
- Ihre Lösungen sollten in lesbarer und verständlicher Form angefertigt sein.
- Auf jeder Abgabe sind **Name**, **Matrikelnummer** sowie **Übungsgruppe** deutlich zu kennzeichnen.

Aufgabe K1.1 (6 Punkte)
Sei M eine n-elementige Menge. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n, dass M für alle $0 \leq k \leq n$ genau $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ verschiedene k-elementige Teilmengen besitzt.

Aufgabe K1.2 (6 Punkte)
Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Seien $\mathrm{id}_X : X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) := x$ und $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$, $\mathrm{id}_Y(y) := y$ die *identischen* Abbildungen auf X, Y. Zeigen Sie:

(i) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $\varphi : Y \to X$ gibt mit $\varphi \circ f = \mathrm{id}_X$.

(ii) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $\psi : Y \to X$ gibt mit $f \circ \psi = \mathrm{id}_Y$.

Aufgabe K1.3 (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Menge aller Polynome des Grades 1 auf $\mathbb{R}$,

$$G := \{f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_{a,b}(x) := ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$$

eine Gruppe bezüglich der Komposition/Verkettung von Abbildungen

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

darstellt.
Ist $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe K1.4 (6 Punkte)
Sei $\mathcal{S}_5$ die Menge der Permutationen von $\mathbb{Z}_1^5 := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Gegeben seien die zwei Permutationen π_1, $\pi_2 \in \mathcal{S}_5$ mit:

$$\pi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie damit:

(i) $\pi_1 \circ \pi_2$

(ii) $\pi_2 \circ \pi_1$

(iii) π_1^{-1}

(iv) π_2^{-1}.