Technische Universität Braunschweig
Institut für Analysis und Algebra
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Tutoriumsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Kanonische Literatur für Einsteiger: [Beu94, Fis05, MK08, Dym13]

1 1. Tutoriumsblatt (2. November 2021)

1.1 Aufgaben

Aufgabe 1.1. (a) (Deutsch - Mathe) Seien A und B Teilmengen der reellen Zahlen. Drücken Sie die folgenden Aussagen in mathematischer Formelsprache aus.

(1) Jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 ist größer als ihr Quadrat.

(2) Für eine beliebige reelle Zahl kann man stets eine natürliche Zahl finden, die größer ist.

(3) Es existiert ein Element der Menge A, das kleiner als jedes Element der Menge B ist.

(4) Es gibt keine reelle Zahl, die größer ist als jede natürliche Zahl.

(b) Beweisen Sie folgende Aussage:

Für jede ungerade natürliche Zahl ist ihr Quadrat minus 1 *durch* 8 *teilbar.*

(c) Ein Fehlschluss? Beurteilen Sie folgende Aussage aus Sicht der Logik.

Ich habe doch gesagt: Wenn sie kein Interesse an mir hat, dann wird sie mich nicht anrufen. Sie hat mich nicht angerufen; sie hat also kein Interesse an mir!

(d) (Mathe - Deutsch) Versprachlichen und beweisen Sie folgende Aussage: *Seien* $A, B \subseteq \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$(\forall a \in A, \forall b \in B : a < b) \Rightarrow A \cap B = \emptyset\,.$$

(e) Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln folgende Regeln der Aussagenlogik.

(1) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.

(2) $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Aufgabe 1.2. In jeder der folgenden Situationen (a) – (e) beantworten Sie bitte die Frage, und beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort durch ein logisch einwandfreies Argument.

Der Löwe und das Einhorn blieben dem Wald des Vergessens einen Monat lang fern. Sie waren irgendwo und kämpften eifrig für die Krone. Jedoch waren Zwiddeldum und Zwiddeldei häufige Besucher des Waldes. Nun ist einer der beiden wie der Löwe; er lügt am Montag, Dienstag und Mittwoch und sagt an den anderen Wochentagen die Wahrheit. Der andere ist wie das Einhorn; er lügt donnerstags, freitags und samstags, aber sagt an den anderen Tagen der Woche die Wahrheit. Alice wüsste nicht, welcher der beiden wie der Löwe und welcher wie das Einhorn war. Um die Sache noch schlimmer zu machen, sahen die Brüder einander so ähnlich, dass Alice sie nicht einmal voneinander unterscheiden konnte (es sei denn, sie trugen ihre bestickten Kragen, was sie selten taten). So fand die arme Alice die Situation in der Tat höchst verwirrend!

Hier sind einige von Alices Erlebnissen mit Zwiddeldum und Zwiddeldei.

(a) Eines Tages traf Alice die beiden Brüder, und sie stellten folgendes fest:

Erster: Ich bin Zwiddeldum.
Zweiter: Ich bin Zwiddeldei.
Wer war wirklich Zwiddeldum, und wer war Zwiddeldei?

(b) An einem anderen Tag der gleichen Woche machten die beiden Brüder die folgenden Aussagen:

Erster: Ich bin Zwiddeldum.
Zweiter: Wenn das wirklich wahr ist, dann bin ich Zwiddeldei!
Wer war wer?

(c) Bei einer anderen Gelegenheit machten die Brüder folgende Aussagen:
Erster: (1) Ich lüge samstags. (2) Ich lüge sonntags.
Zweiter: Ich werde morgen lügen.
An welchem Wochentag geschah das?

(d) Eines Tages traf Alice zufällig nur einen der Brüder. Er stellte folgendes fest: "Ich lüge heute, und ich bin Zwiddeldei."
Wer hat das gesagt?

(e) Nehmen wir an, er hätte in (d) stattdessen gesagt: "Ich lüge heute, oder ich bin Zwiddeldei." Lässt sich feststellen, wer er war?

Aufgabe 1.3. (a) Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung: Für jedes $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,. \tag{1.1}$$

Bestimmen Sie damit, ob $1000000000^{1000000000} \geq 1000000001^{999999999}$ wahr ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

(c) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(d) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $2^{4n+3} + 5^{2+n}$ durch 11 teilbar ist.

(e) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ für die $2^n < n!$ wahr ist.

Aufgabe 1.4. Seien X, Y nicht-leere Menge und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie

$$f \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow f(f^{-1}(V)) = V \text{ für alle Teilmengen } V \subseteq Y\,.$$

1.2 Lösungen

Lösung 1.1. (a) (Deutsch - Mathe)

(1) $\forall x \in [0,1] : x \geq x^2$.
(2) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x$
(3) $\exists a \in A\, \forall b \in B : a < b$
(4) $\nexists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : x > n$

(b) Jede ungerade Zahl lässt sich als $2k+1 \in \mathbb{N}$ schreiben, wobei $k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\frac{(2k+1)^2 - 1}{8} = \frac{4k(k+1)}{8} = \frac{k(k+1)}{2}$$

und die rechte Seite ist $\in \mathbb{N}$, da entweder k oder $k+1$ gerade ist.

(c) Natürlich ist das ein Fehlschluss :-) Wir erinnern an *ex falso quodlibet*, oder auf Deutsch: "Aus Falschem kann alles folgen." Sie kann aus vielen Gründen nicht angerufen haben. Z.B. weil ihr Telefon kaputt ist, sie keinen Empfang hat, sie beschäftigt ist, sie erwartet, dass er anruft, sie seine Nummer vergessen oder falsch aufgeschrieben hat, etc..

Etwas formaler: Sei A die Aussage *Sie hat kein Interesse an mir.* und B die Aussage *Sie ruft mich nicht an.* Angenommen $A \Rightarrow B$ ist wahr. Wir erinnern an $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$. Wenn A wahr ist, dann muss B wahr sein. Wenn A aber falsch ist, kann B wahr oder falsch sein. In unserem Fall ist B wahr; das muss aber eben nicht bedeuten, dass auch A wahr ist.

(d) (Mathe - Deutsch) Wir versprachlichen die zusammengesetzte Aussage $(\forall a \in A, \forall b \in B : a < b) \Rightarrow A \cap B = \emptyset$. *Angenommen, dass für alle $a \in A$ und $b \in B$ die Ungleichung $a < b$ wahr ist. Dann ist der Schnitt von A und B leer.*

Wir beweisen die Aussage per Widerspruch. (Für zwei Aussagen X und Y gilt $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X$.) In unserem Fall sind $X := (\forall a \in A, \forall b \in B : a < b)$ und $Y := (A \cap B = \emptyset)$. Das bedeutet $\neg Y = A \cap B \neq \emptyset$ und $\neg X = \exists a \in A \exists b \in B : a \geq b$.

Angenommen also, der Schnitt wäre nicht leer (sprich $\neg Y$ wäre wahr). Dann gäbe es $x \in A \cap B$. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage $(x \in A) \wedge (x \in B)$. Da aber $x = x$ ist, folgt insbesondere $x \geq x$, was zu zeigen war (nämlich $\neg X$).

(e) (1) Wir zeigen $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ mit der Tabelle

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

(2) Wir zeigen $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ mit der Tabelle

A	B	C	$A \Leftrightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

Lösung 1.2. (a) Der erste ist Zwiddeldum, der zweite ist Zwiddeldei.

Dazu überlegt man sich zunächst, dass Sonntag ist. Wäre nicht Sonntag, so würde genau einer von beiden lügen, d.h. beide wären dieselbe Person. Da Sonntag ist, sagen beide die Wahrheit und der erste ist Zwiddeldum und der zweite ist Zwiddeldei.

(b) Der erste ist Zwiddeldei, der zweite ist Zwiddeldum.

Da es nicht Sonntag ist, lügt genau einer von beiden. Würde der erste die Wahrheit sagen, so wäre er Zwiddeldum und der zweite würde lügen, womit er ebenfalls Zwiddeldum wäre. Da nicht beide dieselbe Person sind, muss der erste lügen. Also ist der erste Zwiddeldei und der zweite Zwiddeldum.

(c) Es geschah am Mittwoch.

Wegen (2) ist klar, dass der erste lügt. Aus (1) folgt dann, dass der erste samstags nicht lügt. Da nicht beide gleichzeitig lügen, folgt, dass der zweite die Wahrheit sagt und außerdem am Samstag lügt. Somit lügt der zweite am Donnerstag, Freitag und Samstag. Da er hute die Wahrheit sagt und morgen lügt, muss es Mittwoch sein.

(d) Zwiddeldum hat das gesagt.

Wäre die Aussage wahr, so müsste er lügen, d.h. die Aussage müsste falsch sein, was einen Widerspruch ergibt. Also ist die Aussage falsch, was bedeutet, dass er lügt. Das bedeutet, dass der zweite Teil der Aussage falsch sein muss. Ergo hat Alice Zwiddeldum getroffen.

(e) Ja, es war Zwiddeldei.

Wäre die Aussage falsch, so müssten beide Teile falsch sein und er würde heute nicht lügen, was der Falschheit der Aussage widerspricht. Also ist die Aussage wahr, sprich er ügt nicht. Somit ist der erste Teil der Aussage falsch. Somit muss der zweite Teil wahr sein und er ist Zwiddeldei.

Lösung 1.3. (a) Wir beweisen die Aussage per Induktion. Für $n = 0$ ist sie offenbar wahr. Um den Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ zu zeigen, rechnen wir

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + x(n + 1) + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x\,,$$

wobei wir in der ersten Ungleichung die Induktionsvoraussetzung sowie $x \geq -1$ verwendet haben. (Für $x < -1$ hätten wir sonst die umgekehrte Abschätzung erhalten.) In der letzten Abschätzung haben wir $x^2 \geq 0$ verwendet.

Mit (1.1) zeigen wir, dass die numerische Aussage wahr ist. Sie ist offenbar von der Form $n^n \geq (n + 1)^{n-1}$ (mit $n \geq 1$). Diese Ungleichung ist wahr, denn

$$\begin{aligned}\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} \cdot n = \left(1 + \underbrace{\frac{-1}{n+1}}_{=x>-1}\right)^{n-1} \cdot n \\ &\geq \left(1 + (n-1) \cdot \frac{-1}{n+1}\right) \cdot n = \frac{2n}{n+1} \geq 1\,.\end{aligned}$$

(b) Für $n = 1$ ist die Aussage offenbar wahr. Wir vollziehen nun den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ und erhalten

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

und die rechte Seite ist gleich $(n + 1)(n + 2)(2(n + 1) + 1)/6$ wie man sich durch Ausmultiplizieren überzeugt.

(c) Für $n = 1, 2$ ist die Aussage offenbar wahr. Wir vollziehen nun den Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} k^2 + (n+1)^2 = (-1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

wie behauptet.

(d) Für $n = 1$ ist $2^{4n+3} + 5^{2+n} = 2^7 + 5^3 = 253$ durch 11 teilbar. Wir vollziehen nun den Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$. Wenn die Annahme für n wahr ist, so gibt es $k \in \mathbb{N}$, sodass $2^{4n+3} + 5^{2+n} = 11k$. Damit erhalten wir

$$2^{4(n+1)+3} + 5^{n+3} = 2^4(11k - 5^{n+2}) + 5^{n+3} = 2^4 \cdot 11k - 5^{n+2}(2^4 - 5)$$

und die rechte Seite ist durch 11 teilbar.

(e) Für $n = 1, 2, 3$ ist die Aussage falsch, aber für $n = 4$ ist $4! = 24 > 16 = 2^4$. Wir behaupten, dass die Aussage für alle $n \geq 4$ wahr ist und vollziehen dazu den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$. Dann gilt

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} ,$$

was zu zeigen war.

Lösung 1.4. Aus der Definition

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

folgt sofort $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$, egal ob f surjektiv ist oder nicht.

Es verbleibt also zu zeigen, dass $V \subseteq f(f^{-1}(V))$ genau dann gilt, wenn f surjektiv ist.

"$\Leftarrow$": Angenommen f ist surjektiv und sei $v \in V$ beliebig. Dann gibt es $x \in X$ mit $f(x) = v$. Weil $x \in f^{-1}(V)$ ist, folgt $v = f(x) \in f(f^{-1}(V))$ wie gewünscht.

"$\Rightarrow$": Wir beweisen die Aussage per Widerspruch. Angenommen f wäre nicht surjektiv, d.h. es gäbe $y \in Y$, sodass $y \notin f(X)$. Dann gilt $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, woraus $f(f^{-1}(\{y\})) = \emptyset \subsetneq \{y\}$ folgt. (Die leere Menge ist echte Teilmenge jeder nichtleeren Menge.)

2 2. Tutoriumsblatt (9. November 2021)

2.1 Aufgaben

Aufgabe 2.1. Seien A, B, C, D Mengen.

a) Zeigen Sie $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

b) Gilt $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ für beliebige Mengen A, B, C, D? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.2. Sei M eine Menge und I eine nicht-leere Indexmenge. Für $i \in I$ seien auch A_i, B_i Mengen.

a) Zeigen Sie $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup M = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup M)$

b) Beantworten und begründen Sie, ob $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$ immer gilt.

Definition 2.1. Seien $M, N \neq \emptyset$ Mengen.

1. M und N heißen *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion $\varphi : M \to N$ gibt. (Es ist leicht zu sehen, dass die Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von Mengen ist.)

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass M *genau* n *Elemente hat*, wenn es eine Bijektion $\varphi : \{1, 2, ..., n\} \to M$ gibt. In dem Fall schreiben wir $|M| = n$ und nennen $|M|$ die *Kardinalität* oder *Mächtigkeit* von M.

3. Wir postulieren $|\emptyset| = 0$.

4. M heißt *endlich*, falls es $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $|M| = n$. Andernfalls heißt M *unendlich*.

5. M heißt *abzählbar unendlich*, wenn es eine Bijektion $\varphi : M \to \mathbb{N}$ gibt, sprich die Elemente von M "durchnummeriert" werden können.

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass für endliche Mengen $\emptyset \neq M, N$ mit $M \subseteq N$ und $|M| = |N|$ gilt, dass $M = N$.

Beispiel 2.2.

1. Die Menge der Primzahlen ist abzählbar unendlich, da sie eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist und, nach dem Satz von Euklid, unendlich ist.

2. Die ganzen Zahlen sind abzählbar unendlich.

3. Paare $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, oder allgemeiner n-Tupel, natürlicher Zahlen sind abzählbar. (Beweis der Abzählbarkeit mit Hilfe von Cantors Paarungsfunktion.)

4. Die rationalen Zahlen sind abzählbar. (Beweis mit Cantors Diagonalargument.)

5. Die algebraischen Zahlen (also die Teilmenge von $\mathbb{R}$, die sich aus den Nullstellen von Polynomen $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ mit $a_j \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ ergeben) sind abzählbar.

Aufgabe 2.3. Seien $X, Y \neq \emptyset$ Mengen mit $|X| = |Y| < \infty$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für eine Abbildung $f : X \to Y$ äquivalent sind.

1. f ist bijektiv.

2. f ist injektiv.

3. f ist surjektiv.

Gelten die Äquivalenzen auch für unendliche Mengen?

Aufgabe 2.4. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie

a) Für alle $a, b \in G$ besitzen die Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ jeweils eindeutig bestimmte Lösungen $x, y \in G$.

b) Sei $a \in G$. Dann sind die Abbildungen $\ell_a : G \to G$ mit $x \mapsto \ell_a(x) = a \circ x$ und $r_a : G \to G$ mit $x \mapsto r_a(x) = x \circ a$ jeweils bijektiv.

Aufgabe 2.5 (Weiteres Untergruppenkriterium)**.** Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq U \subseteq G$ eine Teilmenge. Zeigen Sie

$$\big(\forall a, b \in U : a \circ b^{-1} \in U\big) \Leftrightarrow U \text{ ist eine Untergruppe von } G\,.$$

Aufgabe 2.6. Seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und $a \in G$. Zeigen Sie

a) $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $a^{m+n} = a^m \circ a^n$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

c) $\langle a \rangle := \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Untergruppe von G. (Dies ist die von a erzeugte zyklische Untergruppe.)

2.2 Lösungen

Lösung 2.1. Wir erinnern an die Definition

$$M \times N = \{(m, n) : m \in M \wedge n \in N\} = \{x : \exists m \in M \exists n \in N : x = (m, n)\}\,.$$

a) Wir zeigen "$\subseteq$" und "$\supseteq$" und beginnen mit der ersten Inklusion.

"$\subseteq$": Sei also $x \in (A \times B) \cup (C \times D)$. Dann gibt es $a \in A$, $b \in B$, sowie $c \in C$ und $d \in D$, sodass $x = (a, b) = (c, d)$. Das bedeutet aber, dass $a = c$ und $b = d$ gelten. Deshalb sind $a, c \in A \cap C$ und $b, d \in B \cap D$ und daher $x = (a, b) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ per Definition des kartesischen Produkts.

"$\supseteq$": Angenommen $x \in (A \cap C) \times (B \cap D)$, sprich es gibt $u \in A \cap C$ und $v \in B \cap D$, sodass $x = (u, v)$. Insbesondere gelten $u \in A$ und $u \in C$ sowie $v \in B$ und $v \in D$. Also gilt nach Definition des kartesischen Produkts

$$x = (u, v) \in A \times B \quad \text{und} \quad x = (u, v) \in C \times D\,.$$

Per Definition des Schnitts von Mengen gilt also $x \in (A \times B) \cap (C \times D)$, was zu zeigen war.

b) Zwar gilt die Inklusion $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ immer (warum?), jedoch ist die umgekehrte Inklusion im Allgemeinen falsch.

Beispiel: $A = B = \{1\}$ und $C = D = \{2\}$. Dann sind $A \times B = \{(1, 1)\}$ und $C \times D = \{2, 2\}$, also $(A \times B) \cup (C \times D) = \{(1, 1), (2, 2)\}$. Andererseits ist $A \cup C = B \cup D = \{1, 2\}$ also $(A \cup C) \times (B \cup D) = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$. Dies zeigt $(A \times B) \cup (C \times D) \subsetneq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Lösung 2.2. a) Es gilt

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup M &\Leftrightarrow x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \wedge x \in M \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in I : x \in A_i) \wedge x \in M \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I : (x \in A_i \wedge x \in M) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I : x \in A_i \cup M \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (A_i \cup M) \end{aligned}$$

Wir haben hierbei die Tautologie

$$\forall x \in M : [A(x) \vee B] \Leftrightarrow [\forall x \in M :\ A(x)] \vee B$$

für zwei Aussagen $A(x)$ und B verwendet.

b) Dies ist im Allgemeinen falsch. Seien $I = \{1, 2\}$, $A_1 = B_2 = \mathbb{N}$, $A_2 = B_1 = \mathbb{Z}$. Dann sind $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \mathbb{N}$ und $A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2 = \mathbb{Z}$. Damit gilt offenbar nur nur

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subsetneq \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)\,.$$

Die Lösung dieser Aufgabe beruht auf der Tatsache, dass zwar

$$[\forall x \in M :\ A(x)] \vee [\forall x \in M :\ B(x)] \Rightarrow \forall x \in M :\ [A(x) \vee B(x)]$$

eine Tautologie ist, jedoch die Umkehrung im Allgemeinen falsch ist.

Lösung 2.3. Offenbar genügt es (2) $\Leftrightarrow$ (3) zu zeigen.

(2) $\Rightarrow$ (3): Da $f : X \to Y$ injektiv ist, ist die Funktion $\hat{f} : X \to f(X)$, $x \mapsto \hat{f}(x) = f(x)$ mit eingeschränktem Bild $f(X) \subseteq Y$ bijektiv. Per Definition folgt $|X| = |f(X)|$ und damit $|f(X)| = |Y|$. Zusammen mit $f(X) \subseteq Y$ folgt daraus $f(X) = Y$, sprich f ist surjektiv.

(3) $\Rightarrow$ (2): Sei $f : X \to Y$ surjektiv, sprich $f(X) = Y$. Angenommen f wäre nicht injektiv, sprich für paarweise verschiedene $x_1, ..., x_n$ wären $f(x_1), ..., f(x_n)$ nicht paarweise verschieden. Das impliziert $|f(X)| < |X| = |Y|$, was aber im Widerspruch zu $f(X) = Y$. $\square$

Für unendliche Mengen implizieren die jeweils alleinige Injektivität oder Surjektivität noch nicht die Bijektivität.

Beispiel:

- $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ mit $f(n) = 2n$ ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv, also insbesondere nicht bijektiv.
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(1) = 1$ und $f(n) = n - 1$ für $n \geq 2$ ist zwar surjektiv, aber nicht injektiv, also insbesondere nicht bijektiv.

Lösung 2.4. 1. Wir zeigen in beiden Gleichungen jeweils Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen. Angenommen $x \in G$ löst $a \circ x = b$, dann gilt

$$x = e \circ x = (a^{-1} \circ a) \circ x = a^{-1} \circ (a \circ x) = a^{-1} \circ b\,, \tag{2.1}$$

d.h. wenn es eine Lösung gibt, dann kann diese nur $x = a^{-1} \circ b$ sein. Dieses x löst tasächlich $a \circ x = b$, denn

$$a \circ (a^{-1} \circ b) = (a \circ a^{-1}) \circ b = e \circ b = b\,.$$

Die Eindeutigkeit haben wir in (2.1) schon gezeigt. Man kann aber auch alternativ (klassisch) vorgehen. Angenommen also $a \circ x = b$ hätte zwei Lösungen $x_1, x_2 \in G$, sprich $a \circ x_1 = b$ und $a \circ x_2 = b$. Wir zeigen dann, dass $x_1 = x_2$ sein muss. Aus der Annahme folgt $a \circ x_1 = a \circ x_2$, sprich

$$x_1 = e \circ x_1 = (a^{-1} \circ a) \circ x_1 = a^{-1} \circ (a \circ x_1) = a^{-1} \circ (a \circ x_2) = (a^{-1} \circ a) \circ x_2 = e \circ x_2 = x_2\,.$$

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der zweiten Gleichung $y \circ a = b$ wird analog bewiesen. Wenn $y \in G$ eine Lösung ist, dann folgt

$$y = y \circ e = y \circ (a \circ a^{-1}) = (y \circ a) \circ a^{-1} = b \circ a^{-1}\,.$$

Wenn es also eine Lösung gibt, so kann sie nur $y = b \circ a^{-1}$ sein. Dies ist tatsächlich auch eine Lösung, denn

$$(b \circ a^{-1}) \circ a = b \circ (a^{-1} \circ a) = b \circ e = b\,.$$

Der alternativen, klassische Eindeutigkeitsbeweis wird wie oben geführt.

2. Zunächst bemerken wir, dass die Abbildungen wohldefiniert sind, denn für alle $a, x \in G$ sind auch $a \circ x, x \circ a \in G$.

   - Injektivität von ℓ_a: Wir zeigen für alle $u, v \in G$ die Implikation $\ell_a(u) = \ell_a(v) \Rightarrow u = v$. Angenommen also $\ell_a(u) = \ell_a(v)$, sprich $a \circ u = a \circ v$. Dann folgt

   $$u = e \circ u = (a^{-1} \circ a) \circ u = a^{-1} \circ (a \circ u) = a^{-1} \circ (a \circ v) = v\,,$$

   was zu zeigen war.
   - Injektivität von r_a: analog
   - Surjektivität von ℓ_a: Sei $b \in G$ beliebig. Wir zeigen nun, dass es $x \in G$ gibt, sodass $b = \ell_a(x) = a \circ x$. Nach Aufgabenteil a) hat die Gleichungen $a \circ x = b$ (genau) eine Lösung x, nämlich $x = a^{-1} \circ b$. Also gilt

   $$\forall b \in G: \ \ell_a(a^{-1} \circ b) = a \circ (a^{-1} \circ b) = (a \circ a^{-1}) \circ b = b\,.$$

   - Surjektivität von r_a: analog

Lösung 2.5. Wir verwenden das Untergruppenkriterium (Lemma II.9 in der Vorlesung), sprich

$$\emptyset \neq U \subseteq G \text{ Untergruppe von } G \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a, b \in U & : a \circ b \in U \\ \forall a \in U & : a^{-1} \in U \\ e \in U \end{cases}.$$

Die Implikation "$\Leftarrow$" ist offenbar, es verbleibt also "$\Rightarrow$" zu zeigen.

1. Wir zeigen zunächst, dass das neutrale Element $e \in G$ in U liegt. Da $U \neq \emptyset$ gibt es $u \in U$. Per Voraussetzung ist daher $u \circ u^{-1} \in U$, sprich $e \in U$.
2. Da $e \in U$, folgt aus der Voraussetzung $a^{-1} = e \circ a^{-1} \in U$.
3. Für $a, b \in U$ sind $b^{-1} \in U$ und damit auch $a, b^{-1} \in U$. Per Voraussetzung ist $a \circ (b^{-1})^{-1} \in U$. Da $(b^{-1})^{-1} = b$ (nachprüfen) folgt $a \circ b \in U$.

Dies schließt den Beweis.

Lösung 2.6. Wir verwenden $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$. (Denn $(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = e$ mit Assoziativität.)

a) Es genügt zu zeigen, dass $(a^{-1})^n$ das zu a^n rechtsinverse Element ist, sprich

$$a^n \circ (a^{-1})^n = e\,.$$

Wir induzieren über $n \in \mathbb{N}$ und stellen fest, dass die Aussage für $n = 1$ wahr ist. Angenommen die Aussage gilt für n. Dann

$$\begin{aligned} a^{n+1} \circ (a^{-1})^{n+1} &= \underbrace{a \circ \ldots \circ a}_{n+1 \text{ mal}} \circ (\underbrace{a^{-1} \circ \ldots \circ a^{-1}}_{n+1 \text{ mal}}) = [(\underbrace{a \circ \ldots \circ a}_{n \text{ mal}}) \circ a] \circ [a^{-1} \circ (\underbrace{a^{-1} \circ \ldots \circ a^{-1}}_{n \text{ mal}})] \\ &= [a^n \circ a] \circ [a^{-1} \circ (a^{-1})^n] = a^n \circ (a \circ a^{-1}) \circ (a^{-1})^n = a^n \circ (a^{-1})^n = e\,. \end{aligned}$$

b) Wir zeigen zunächst

$$a^{-\ell} = (a^{-1})^\ell = (a^\ell)^{-1} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.2}$$

Für $\ell \in \mathbb{N}$ ist dies die Aussage der vorigen Teilaufgabe. Für $\ell = 0$ ist die Aussage offenbar (da $e^{-1} = e$). Für $\ell \in -\mathbb{N}$ gilt

$$a^{-\ell} = a^{|\ell|} = \left(\left(a^{|\ell|}\right)^{-1}\right)^{-1} = \begin{cases} (a^{-|\ell|})^{-1} = (a^{\ell})^{-1} & \text{per Definition} \\ (a^{-1})^{-|\ell|} = (a^{-1})^{-\ell} & \text{per Teil a)} \end{cases},$$

wobei wir im ersten Schritt $(x^{-1})^{-1} = x$ und im zweiten Schritt Aufgabenteil a) mit $|\ell| > 0$ verwendet haben.

Nun kommen wir zum Beweis der eigentlichen Aussage, die wir per Induktion beweisen. Wir beginnen mit den Vorbereitungen zu den Induktionsanfängen $n = 1$. Wir zeigen

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : \ a^{m+1} = a^m \circ a \quad \text{und} \tag{2.3}$$

$$\forall m \in \mathbb{N} : \ a^{-m+1} = a^{-m} \circ a\,. \tag{2.4}$$

Zu (2.3): Für $m = 0$ folgt dies aus $a^{0+1} = a^1 = a = e \circ a = a^0 \circ a$. Für $m \geq 1$ folgt dies aus $a^{m+1} = a \circ ... \circ a = (a \circ ... \circ a) \circ a = a^m \circ a$.

Zu (2.4): Dies folgt aus der ersten Aussage, denn

$$\begin{aligned} a^{-m+1} &= a^{-(m-1)} \overset{m-1\geq 0,(2.2)}{=} (a^{-1})^{m-1} = (a^{-1})^{m-1} \circ e = (a^{-1})^{m-1} \circ (a^{-1} \circ a) \\ &= \left((a^{-1})^{m-1} \circ a^{-1}\right) \circ a \overset{m-1\geq -,(2.3)}{=} (a^{-1})^{(m-1)+1} \circ a = (a^{-1})^m \circ a \overset{(2.2)}{=} a^{-m} \circ a\,. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zum Beweis der eigentlichen Behauptung, die wir in $n \in \mathbb{N}_0$ und $n \in -\mathbb{N}$ zerlegen. Wir zeigen zunächst die Aussage

$$\forall m \in \mathbb{Z} : \ \left[\forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{m+n} = a^m \circ a^n\right] \tag{2.5}$$

per Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ ist die Aussage $a^{m+0} = a^m = a^m \circ e = a^m \circ a^0$ offenbar. Nun zum Induktionsschritt: angenommen die Aussage sei für $n \in \mathbb{N}_0$ wahr, d.h. es gelte $a^{m+n} = a^m \circ a^n$. Dann folgt

$$a^{m+(n+1)} = a^{(m+n)+1} \overset{(2.3),(2.4)}{=} a^{m+n} \circ a \overset{\text{Ind.vor.}}{=} (a^m \circ a^n) \circ a = a^m \circ (a^n \circ a) \overset{(2.3)}{=} a^m \circ a^{n+1}\,.$$

Es verbleibt die Behandlung von $n \in -\mathbb{N}$, sprich der Beweis der Aussage

$$\forall m \in \mathbb{Z} \ \forall n \in -\mathbb{N} : a^{m+n} = a^m \circ a^n\,.$$

Diese folgt aus

$$a^{m+n} = a^{m-|n|} \overset{(2.2)}{=} (a^{-1})^{-m+|n|} \overset{(2.5)}{=} (a^{-1})^{-m} \circ (a^{-1})^{|n|} \overset{(2.2)}{=} (a^{-(-m)} \circ a^{-|n|} = a^m \circ a^n\,.$$

c) Wir verwenden das Untergruppenkriterium aus Aufgabe 2.5, sprich

$$\left(\forall x, y \in U : \ x \circ y^{-1} \in U\right) \Rightarrow U \text{ ist eine Untergruppe.}$$

Seien also $x, y \in \langle a \rangle$. Dann gibt es $k, \ell \in \mathbb{Z}$, sodass $x = a^k$ und $y = a^\ell$. Nach Aufgabenteil b) gilt $a^m \circ a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = e$. Da das inverse Element eindeutig ist, folgt $(a^m)^{-1} = a^{-m}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt

$$x \circ y^{-1} = a^k \circ (a^\ell)^{-1} = a^k \circ a^{-\ell} = a^{k-\ell} \in \langle a \rangle\,,$$

da $k - \ell \in \mathbb{Z}$. Dies zeigt, dass $\langle a \rangle$ eine Untergruppe ist.

2.3 Auswahl wichtiger, elementarer Sätze der Gruppentheorie

Wir fassen an dieser Stelle noch einige wichtige Sätze zur Gruppentheorie zusammen.

Satz 2.3 (Kleiner Fermat für endliche Gruppen). *Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe. Dann gilt für jedes $a \in G$, dass $a^{|G|} = e$.*

Um diesen Satz zu zeigen, treffen wir einige Vorbereitungen, allen voran Behauptung 2.4 und den Satz von Lagrange (Satz 2.5).

Behauptung 2.4. *Sei $(G, \circ)$ eine endliche zyklische Gruppe mit Erzeuger a, sprich $G = \langle a \rangle$, und neutralem Element e. Dann gilt $a^{|G|} = e$.*

Beweis. Da $|G| < \infty$ können die Elemente $e, a^1, a^2, ...$ nicht alle voneinander verschieden sein. Daher gibt es $m, i \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq i < m$ und $a^i = a^m$, wobei wir i und m der Reihe nach minimal wählen. Mit den Potenzgesetzen gilt

$$a^{m-i} = a^m \circ a^{-i} = a^m \circ (a^i)^{-1} = a^i \circ (a^i)^{-1} = e\,.$$

Die minimale Wahl von i gibt $i = 0$, also $a^m = a^i = a^0 = e$. Weiter besagt die Minimalität von m, dass $a^j \neq e$ für alle $1 \leq j < m$.

Als Nächstes behaupten wir, dass die Elemente $e, a, a^2, ..., a^{m-1}$

1. paarweise voneinander verschieden sind und
2. tatsächlich alle Elemente von G sind.

Sobald wir diese beiden Aussagen gezeigt haben, folgt die Behauptung und $|G| = m$.

Angenommen die Elemente $e, a, a^2, ..., a^{m-1}$ wären nicht paarweise verschieden. Dann gäbe es $0 \leq j < k < m$ mit $a^j = a^k$ und wie zuvor folgte $a^{k-j} = e$ für $0 < k - j \leq k < m$. Dies widerspricht jedoch der Minimalität von m. Somit müssen die Elemente $e, a, a^2, ..., a^{m-1}$ paarweise voneinander verschieden sein.

Schließlich ist tatsächlich $G = \{e, a, ..., a^{m-1}\}$. Sei dazu $k \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann gibt es $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < m$ und $k = mq + r$ und die Potenzgesetze geben

$$a^k = a^{qm+r} = a^{qm} \circ a^r = (a^m)^q \circ a^r = e^q \circ a^r = a^r \in \{e, a, ..., a^{m-1}\}\,,$$

da $0 \leq r < m$. Dies schließt den Beweis. □

Satz 2.5 (Satz von Lagrange). *Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Wenn $|G| < \infty$, dann gibt es $k \in \mathbb{N}$, sodass $|G| = k|U|$, sprich $|U|$ teilt $|G|$.*

Für den Beweis bereiten wir zwei Lemmata vor.

Lemma 2.6. *Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Untergruppe. Dann wird durch*

$$a \sim b :\Leftrightarrow a \circ b^{-1} \in U$$

für $a, b \in G$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge G definiert.

Beweis. Wir weisen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität nach.

- Reflexivität: Für $a \in G$ ist auch $a \circ a^{-1} = e \in U$, da U eine Untergruppe ist. Daraus folgt $a \sim a$.
- Symmetrie: Angenommen $a \sim b$, sprich $a \circ b^{-1} \in U$. Da U eine Untergruppe ist, folgt auch

  $$b \circ a^{-1} = (b^{-1})^{-1} \circ a^{-1} = (a \circ b^{-1})^{-1} \in U\,,$$

  was aber gerade $b \sim a$, also die Symmetrie zeigt.

- Transitivität: Angenommen $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann gilt

$$a \circ c^{-1} = a \circ (b^{-1} \circ b) \circ c^{-1} = (a \circ b^{-1}) \circ (b \circ c^{-1}) \in U\,,$$

da U eine Untergruppe ist, weshalb die Verknüpfung zweier Elemente in U wieder in U liegt.

Dies schließt den Beweis. □

Lemma 2.7. *Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, U eine Untergruppe und $b \in G$. Dann gilt*

$$[b] := \{x \in G :\, x \sim b\} = \{x \circ b :\, x \in U\}\,.$$

Beweis. Für $x \in G$ ist $x \circ b^{-1} \in U$ äquivalent zu

$$x = x \circ e = x \circ (b^{-1} \circ b) = (x \circ b^{-1}) \circ b \in U \circ b\,,$$

sprich es gilt

$$[b] = \{x \in G :\, x \sim b\} = \{x \in G :\, x \circ b^{-1} \in U\} = U \circ b\,,$$

was zu zeigen war. □

Beweis des Lagrangeschen Satzes 2.5. Für $b \in G$ gilt

$$|[b]| = |U \circ b| = |\{x \circ b : x \in U\}| = |U|\,,$$

sprich jede zu U assoziierte Äquivalenzklasse hat genauso viele Elemente wie U. Da G die disjunkte Vereinigung dieser Äquivalenzklassen ist (siehe Satz I.8 im Skript), folgt

$$|G| = |U| \cdot (\text{Anzahl der Äquivalenzklassen von } \sim)\,.$$

Insbesondere ist $|U|$ ein Teiler von $|G|$. □

Beweis des Fermatschen Satzes 2.3. Für $a \in G$ sei $U := \langle a \rangle$ die von a erzeugte zyklische Untergruppe von G. Dann ist nach Aufgabe 2.6 U eine Untergruppe von G. Nach Behauptung 2.4 gilt $a^{|U|} = e$. Dank des Lagrangeschen Satzes 2.5 gibt es $k \in \mathbb{N}$, sodass $|G| = k|U|$. Das bedeutet aber

$$a^{|G|} = a^{k|U|} = (a^{|U|})^k = e^k = e\,,$$

wie behauptet. □

Satz 2.8 (Satz von Cayley)**.** *Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit n Elementen. Dann ist $(G, \circ)$ isomorph zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe $(\mathcal{S}_n, *)$.*

Beweis. Sei $\mathrm{id} : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ das neutrale Element in $(\mathcal{S}_n, *)$. Es genügt einen injektiven Gruppenhomomorphismus $F : G \to \{1, ..., n\}$ zu finden, für den

- $\mathrm{id} \in F(G)$,
- für alle $g, h \in G$ gilt $F(g) * F(h) \in F(G)$ sowie
- für alle $g \in G$ ist $F(g)^{-1} \in F(G)$

gelten. In dem Fall ist G isomorph zu $F(G)$ und $F(G)$ ist eine Untergruppe von $\mathcal{S}_n$.

Da $|G| = n < \infty$ kann G mit einer Bijektion $\iota : G \to \{1, ..., n\}$ durchnummeriert werden. Für $g \in G$ definiere $\mu_g : G \to G$ durch $\mu_g(h) = g \circ h$, welches (nach Aufgabe 2.4 b)) ebenfalls eine Bijektion ist. Daraus folgt insbesondere, dass $\iota\mu_g\iota^{-1} : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ bijektiv ist. Dies motiviert den Ansatz

$$\begin{aligned} &F : G \to \{1, ..., n\} \qquad g \mapsto F(g)\,, \quad \text{wobei} \\ &F(g) : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} \qquad j \mapsto F(g)[j] = (\iota\mu_g\iota^{-1})(j)\,. \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, dass $F : G \to \{1, ..., n\}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Für $g, h \in G$ gilt in der Tat

$$(F(g) * F(h))[j] = (\iota\mu_g\iota^{-1}) * (\iota\mu_h\iota^{-1})[j] = (\iota\mu_g \circ \mu_h\iota^{-1})[j] = F(g \circ h)[j] \quad \text{für alle } j \in \{1, ..., n\} \tag{2.6}$$

was zeigt, dass F ein Gruppenhomomorphismus ist. Dieser ist injektiv, denn für $g, h \in G$ mit $F(g) = F(h)$ gilt

$$F(g)[j] = F(h)[j] \Leftrightarrow (\iota\mu_g\iota^{-1})[j] = (\iota\mu_h\iota^{-1})[j] \Leftrightarrow g \circ (\iota^{-1}[j]) = h \circ (\iota^{-1}[j]) \Leftrightarrow g = h$$

für alle $j \in \{1, ..., n\}$. Hierbei haben wir die Bijektivität von ι und anschließend die Bijektivität der Rechtsmultiplikation auf G (also die Bijektivität von μ_g bzw. μ_h, siehe Aufgabe 2.4) verwendet.

Wir zeigen noch die definierenden Untergruppenkriterien. Zunächst gilt für das neutrale Element $e_G \in G$, dass

$$F(e_G)[j] = (\iota\mu_{e_G}\iota^{-1})[j] = \iota\iota^{-1}[j] = j\,,$$

sprich $F(e_G) = \mathrm{id} \in F(G)$. Weiter gilt wegen (2.6), dass $F(g) * F(h) = F(g \circ h) \in F(G)$. Schließlich ist für jedes $g \in G$ auch $F(g)^{-1} \in F(G)$, denn

$$F(g) * F(g^{-1}) = F(g \circ g^{-1}) = F(e_G) = \mathrm{id}\,,$$

sprich $F(g)^{-1} = F(g^{-1}) \in F(G)$. □

3 3. Tutoriumsblatt (16. November 2021)

3.1 Aufgaben

Aufgabe 3.1. Geben Sie die Verknüpfungstafel von $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{\overline{0}\}, \cdot)$ an und bestimmen Sie alle zyklischen Untergruppen von ihr.

Aufgabe 3.2. a) Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ Gruppen. Zeigen Sie, dass $G \times H$ mit der Verknüpfung $\diamond : (G \times H) \times (G \times H) \to G \times H$, $(g_1, h_1, g_2, h_2) \mapsto (g_1, h_1) \diamond (g_2, h_2) := (g_1 \circ g_2, h_1 * h_2)$ eine Gruppe bildet.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$ (aufgefasst als $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \diamond)$ mit der Operation $\diamond$ aus Teil a)) isomorph zu $(\mathbb{Z}_6, +)$ ist. (Hinweis: Finden Sie zu beiden Gruppen ein erzeugendes Element.)

Aufgabe 3.3. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ für alle $a, c \in K$ und $b, d \in K \setminus \{0\}$.

b) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ für alle $a \in K$ und $b, c, d \in K \setminus \{0\}$.

3.2 Lösungen

Lösung 3.1. Für die Verknüpfungstafel verwenden wir die Konvention

$\circ$	a	b
a	$a \circ a$	$a \circ b$
b	$b \circ a$	$b \circ b$

Damit ist

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Weiter gilt mit $|\mathbb{Z}_7 \setminus \{\overline{0}\}| = 6$, Aufgabe 2.6 und dem Satz von Fermat (Satz 2.3) für $\mathbb{Z} \ni k = 6m + r$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, 1, ..., |\mathbb{Z}_7 \setminus \{\overline{0}\}| - 1\} = \{0, 1, ..., 5\}$, dass

$$a^k = a^{6m+r} = a^{6m} \circ a^r = (a^6)^m \circ a^r = a^r\,, \quad a \in \mathbb{Z}_7\,.$$

Somit

$$\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{a^r : r = 0, 1, ..., 5\}\,.$$

Damit berechnen wir die zyklischen Untergruppen und erhalten

- $\langle \overline{1} \rangle = \{(\overline{1})^r : 0 \leq r < 6\} = \{\overline{1}\}$
- $\langle \overline{2} \rangle = \{(\overline{2})^r : 0 \leq r < 6\} = \{\overline{2}^0, \overline{2}^1, \overline{2}^2, \overline{2}^3, \overline{2}^4, \overline{2}^5\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$
- $\langle \overline{3} \rangle = \{(\overline{3})^r : 0 \leq r < 6\} = \{\overline{3}^0, \overline{3}^1, \overline{3}^2, \overline{3}^3, \overline{3}^4, \overline{3}^5\} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{6}, \overline{4}, \overline{5}\} = \mathbb{Z}_7 \setminus \{\overline{0}\}$
- $\langle \overline{4} \rangle = \{(\overline{4})^r : 0 \leq r < 6\} = \{\overline{4}^0, \overline{4}^1, \overline{3}^2, \overline{4}^3, \overline{4}^4, \overline{4}^5\} = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{2}\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$
- $\langle \overline{5} \rangle = \{(\overline{5})^r : 0 \leq r < 6\} = \{\overline{5}^0, \overline{5}^1, \overline{3}^2, \overline{5}^3, \overline{5}^4, \overline{5}^5\} = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{2}, \overline{3}\} = \mathbb{Z}_7 \setminus \{\overline{0}\}$

- $\langle \overline{6} \rangle = \{(\overline{6})^r : 0 \leq r < 6\} = \{\overline{6}^0, \overline{6}^1, \overline{3}^2, \overline{6}^3, \overline{6}^4, \overline{6}^5\} = \{\overline{1}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{6}\} = \{\overline{1}, \overline{6}\}$

Lösung 3.2. a) Zunächst ist $\diamond$ in $G \times H$ wegen der Wohldefiniertheit der Operationen $\circ$ in G und $*$ in H wieder wohldefiniert. Nun zu den Gruppenaxiomen.

- Assoziativität:

$$\begin{aligned}(g_1, h_1) \diamond ((g_2, h_2) \diamond (g_3, h_3)) &= (g_1, h_1) \diamond (g_2 \circ g_3, h_2 * h_3) \\ &= (g_1 \circ (g_2 \circ g_3), h_1 * (h_2 * h_3)) = ((g_1 \circ g_2) \circ g_3, (h_1 * h_2) * h_3) \\ &= (g_1 \circ g_2, h_1 * h_2) \diamond (g_3, h_3) = ((g_1, h_1) \diamond (g_2, h_2)) \diamond (g_3, h_3)\,.\end{aligned}$$

- Neutrales Element: Es bezeichnen e_G und e_H die neutralen Elemente in G und H. Dann ist das neutrale Element in $G \times H$ gerade (e_G, e_H), denn für alle $g \in G$ und $h \in H$ gilt

$$(g, h) \diamond (e_G, e_H) = (g \circ e_G, h * e_H) = (g, h) = (e_G \circ g, e_H \circ h)\,.$$

- Inverses Element: Seien $g \in G$ und $h \in H$ mit inversen Elementen $g^{-1} \in G$ und $h^{-1} \in H$. Dann ist das zu (g, h) inverse Element in $G \times H$ gerade (g^{-1}, h^{-1}), denn

$$(g, h) \diamond (g^{-1}, h^{-1}) = (g \circ g^{-1}, h * h^{-1}) = (e_G, e_H)\,.$$

Da dieses Element rechtsinvers ist, ist es automatisch auch linksinvers.

b) (Bemerkung: Eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ zu finden ist offenbar nicht hoffnungslos, da $|\mathbb{Z}_6| = |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3| = 6$.)

Für $n \in \mathbb{N}$ wird $(\mathbb{Z}_n, +)$ von $\overline{1}$ erzeugt, denn

$$\langle \overline{1} \rangle = \{\overline{k \cdot 1} : \; k \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{k} : k \in \mathbb{Z}\} \ni \{\overline{1}, ..., \overline{n}\} = \mathbb{Z}_n\,.$$

Insbesondere gilt dies für $n = 6$. Wir suchen nun nach einem Erzeuger von

$$(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_3, +) = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{2})\}\,.$$

Es bietet sich an $(\overline{1}, \overline{1})$ auszuprobieren. In der Tat erhält man

$$\begin{aligned}\langle (\overline{1}, \overline{1}) \rangle &= \{0 \cdot (\overline{1}, \overline{1}), 1 \cdot (\overline{1}, \overline{1}), 2 \cdot (\overline{1}, \overline{1}), 3 \cdot (\overline{1}, \overline{1}), 4 \cdot (\overline{1}, \overline{1}), 5 \cdot (\overline{1}, \overline{1})\} \\ &= \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{2})\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3\,.\end{aligned}$$

Wir finden nun einen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, der mit den Gruppenoperationen auf $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ verträglich ist. Durch Versuch und Irrtum oder geschicktes Hinschauen, kommt man auf die Wahl

$$\varphi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \qquad \varphi(r \cdot \overline{1}) = r \cdot (\overline{1}, \overline{1}) = r\varphi(\overline{1})$$

Da $\mathbb{Z}_6 = \{r \cdot \overline{1} : \; r = 0, 1, ..., 5\}$ und $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{r \cdot (\overline{1}, \overline{1}) : \; r = 0, 1, ..., 5\}$, ist φ offenbar surjektiv und, wegen $|\mathbb{Z}_6| = |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3|$ und Aufgabe 2.3, auch bijektiv.

Es verbleibt nachzuweisen, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist, sprich $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ für $x, y \in \mathbb{Z}_6$. Da $\mathbb{Z}_6$ durch $\overline{1}$ erzeugt wird, gibt es $r, s \in \{0, 1, ..., 5\}$, sodass $x = r \cdot \overline{1}$ und $y = s \cdot \overline{1}$. Zwar sind $r, s \in \{0, 1, ..., 5\}$, doch kann damit bereits $r + s \geq 6$ sein. Wir schreiben also $r + s = 6q + \ell$ für $\in \mathbb{N}_0$ und $\ell \in \{0, 1, ..., 5\}$ und erhalten, dank Aufgabe 2.6 und Fermat (Satz 2.3),

$$x + y = r \cdot \overline{1} + s \cdot \overline{1} = (r + s) \cdot \overline{1} = (6q + \ell) \cdot \overline{1} = q \cdot \left[6 \cdot \overline{1}\right] + \ell \cdot \overline{1} = \ell \cdot \overline{1}\,.$$

Daraus folgt einerseits

$$\varphi(x + y) = \varphi(\ell \cdot \overline{1}) = \ell \cdot (\overline{1}, \overline{1})\,.$$

Andererseits gilt wieder mit Aufgabe 2.6 und Fermats Satz 2.3,

$$\begin{aligned}\varphi(x) + \varphi(y) &= \varphi(r \cdot \overline{1}) + \varphi(s \cdot \overline{1}) = r \cdot (\overline{1}, \overline{1}) + s(\overline{1}, \overline{1}) = (r + s) \cdot (\overline{1}, \overline{1}) \\ &= (6q + \ell) \cdot (\overline{1}, \overline{1}) = q \cdot \left[6 \cdot (\overline{1}, \overline{1})\right] + \ell \cdot (\overline{1}, \overline{1}) = \ell \cdot (\overline{1}, \overline{1})\,,\end{aligned}$$

was den Beweis schließt.

Lösung 3.3. a) Nach Definition in der Vorlesung ist $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= a \cdot 1 \cdot b^{-1} + c \cdot 1 \cdot d^{-1} = a \cdot (d \cdot d^{-1}) \cdot b^{-1} + c \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot d^{-1} \\ &= (ad) \cdot (d^{-1}b^{-1}) + (cb) \cdot (b^{-1}d^{-1}) = (ad) \cdot (bd)^{-1} + (cb) \cdot (db)^{-1} \\ &= (ad) \cdot (bd)^{-1} + (cb) \cdot (bd)^{-1} = (ad + cb) \cdot (bd)^{-1} = \frac{ad + cb}{bd}\,.\end{aligned}$$

b) Per Definition gilt

$$\begin{aligned}\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{a \cdot b^{-1}}{c \cdot d^{-1}} = (ab^{-1}) \cdot (cd^{-1})^{-1} = (ab^{-1}) \cdot ((d^{-1})^{-1}c^{-1}) = (ab^{-1}) \cdot (dc^{-1}) \\ &= (ad) \cdot (c^{-1}b^{-1}) = (ad) \cdot (bc)^{-1} = \frac{ad}{bc}\,.\end{aligned}$$

3.3 Ringe, Rechenregeln, Körper

Definition 3.1. Eine Menge R mit Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + &: R \times R \to \mathbb{R}\,, \quad (a, b) \mapsto a + b \quad (\text{“Addition”}) \\ \cdot &: R \times R \to \mathbb{R}\,, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b \quad (\text{“Multiplikation”})\end{aligned}$$

heißt Ring, wenn

(a) $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist,

(b) die Multiplikation $\cdot$ assoziativ ist (“$(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe”) und

(c) für alle $a, b, c \in R$ die Distributivgesetze

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \\ c \cdot (a + b) &= c \cdot a + c \cdot b\end{aligned}$$

gelten.

Das neutrale Element der Addition wird mit 0 bezeichnet und heißt Nullelement. Das zu $a \in R$ inverse Element bzgl. der Addition wird mit $-a$ bezeichnet.

Wir definieren $a - b := a + (-b)$ (“Subtraktion”).

◇

Definition 3.2 (Kommutativer Ring, Einselement, nullteilerfrei)**.** Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

(a) R heißt *kommutativ* (abelsch), falls

$$\forall a, b \in R:\ a \cdot b = b \cdot a\,.$$

(b) Ein Element $1 \in R$ heißt *Einselement*, falls

$$\forall a \in R:\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a\,.$$

(c) R heißt *nullteilerfrei*, falls

$$\forall a, b \in R:\ a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \lor b = 0\,.$$

Bemerkung 3.3. Wie beim neutralen Element von Gruppen ist das Einselement in Ringen eindeutig bestimmt, wenn es existiert.

Beispiel 3.4. 1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein abelscher, nullteilerfreier Ring mit Einselement.

2. $(m \cdot \mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ ein abelscher, nullteilerfreier Ring ohne Einselement.

3. $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ist für $m \geq 2$ ein abelscher Ring mit Einselement. Er ist nullteilerfrei genau dann, wenn m eine Primzahl ist.

   Beweis. Dass $(\mathbb{Z}_m, +)$ eine Gruppe und $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ eine Halbgruppe ist, hatten wir im Tutorium angeschnitten. (Einfacher Nachweis der Gruppenaxiome.) Weiter sind der Nachweis der Distributivgesetze und der Nachweis der Kommutativität leicht. Schließlich ist auch klar, dass [1] das Einselement ist. (Freiwillige Hausaufgabe)

   Nun zur Nullteilerfreiheit. Seien also $[a], [b] \in \mathbb{Z}_m$ so, dass $[a] \cdot [b] = [a \cdot b] = 0 = [m]$.

   - Angenommen $m \geq 2$ wäre keine Primzahl. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{N}$, sodass $m = a \cdot b$. Daraus folgt, dass $[a] \cdot [b] = [a \cdot b] = [m] = 0$. Jedoch sind $[a] \neq 0$ und $[b] \neq 0$, da m weder a noch b teilt.
   - Angenommen $m \geq 2$ wäre doch eine Primzahl. Dann gilt $[a] \cdot [b] = [a \cdot b] = 0 \Leftrightarrow m | ab \Rightarrow m | a \vee m | b \Leftrightarrow [a] = 0 \vee [b] = 0$

   □

Satz 3.5 (Rechenregeln in Ringen)**.** *Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $a, b, c \in R$. Dann gelten*

(a) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

(b) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.

(c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

(d) R hat ein Einselement $\Rightarrow -a = (-1) \cdot a = a \cdot (-1)$.

(e) R ist nullteilerfrei $\Rightarrow \begin{cases} (c \neq 0 \wedge a \cdot c = b \cdot c) \Rightarrow a = b \\ (c \neq 0 \wedge c \cdot a = c \cdot b) \Rightarrow a = b \end{cases}$ *(Kürzungsregel)*

Beweis. Übungsblatt. □

Erinnerung:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,, \quad n \in \mathbb{N} \,, \quad a_1, a_2, ..., a_n \in R \,.$$

Satz 3.6 (Rechenregeln für Summenzeichen)**.** *Seien R ein Ring und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gelten*

(a) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

(b) $b \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (b \cdot a_i)$ *und* $(\sum_{i=1}^{n} a_i) \cdot b = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b)$.

(c) $\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij})$, *wobei $a_{ij} \in R$ für alle $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., n$.*

(d) Seien $a_i, b_j \in R$ für $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., n$. Dann

$$(\sum_{i=1}^{m} a_i) \cdot (\sum_{j=1}^{n} b_j) = \sum_{i=1}^{m} (a_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} (a_i \cdot b_j)) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} (a_i \cdot b_j)) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_i) \cdot b_j$$

Beweis. Freiwillige Hausaufgabe. □

Satz 3.7. *Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit $1 \neq 0$. Seien $a, b \in R$ mit $a \cdot b = b \cdot a$. Mit der Definition $r^n = r \cdot ... \cdot r$ (n mal) und $r^0 := 1$ für $r \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ gelten*

(a)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \,, \quad n \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{3.1}$$

(b)

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \cdot b^k\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{3.2}$$

Beweis. Induktion. Vielleicht in Analysis 1. □

Bemerkungen 3.8.

1. Das Einselement des Rings wird benötigt, damit Ausdrücke wie $a^0 \cdot b^n$ oder $a^n \cdot b^0$ eine Bedeutung haben.

2. Die Bedingung $a \cdot b = b \cdot a$ ist wesentlich. Dies ist aus den Identitäten

$$(a+b)^2 = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2$$
$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b \cdot a + a \cdot b - b^2$$

ersichtlich.

3. Nur im Nullring $(\{0\}, +, \cdot)$ stimmen Eins- und Nullement überein.

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $R = \{0\}$. Dann stimmen Eins- und Nullelement überein.

"$\Leftarrow$": Sei $a \in R$ beliebig und angenommen es gelte $1 = 0$. Dann gelten $a \cdot 1 = a$ (per Definition des Einselements) und $a \cdot 0 = 0$ (wegen Satz 3.5). Aus diesen beiden Beobachtungen und $1 = 0$ folgt $a = 0$, sprich $R = \{0\}$ notwendigerweise. □

In einem Körper sind Null- und Einselement per Definition voneinander verschieden wie wir gleich sehen werden.

Definition 3.9 (Körper)**.** $(K, +, \cdot)$ heißt Körper, wenn

(a) $(K, +, \cdot)$ ist ein Ring

(b) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

Mit 1 bezeichnen wir das neutrale Element von $K \setminus \{0\}$. Weiter definieren wir $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$, wobei b^{-1} das zu b inverse Element bzgl. der Multiplikation bezeichnet.

Satz 3.10. *(a) Jeder Körper ist ein kommutativer nullteilerfreier Ring mit* 1 *als Einselement und* $1 \neq 0$.

(b) Endliche nullteilerfreie kommutative Ringe mit $1 \neq 0$ *sind Körper.*

Beweis. (a) Dass K ein kommutativer Ring mit Einselement ist, folgt aus der Definition und dem Satz 3.5.

Wie wir oben gesehen hatten, ist der einzige Ring, in dem Null- und Einselement übereinstimmen der Nullring. Da aber K per Definition mindestens zwei Elemente besitzt, muss $1 \neq 0$ sein.

Der Beweis der Nullteilerfreiheit ist Teil des Übungsblatts. (Der Vollständigkeit halber: zu zeigen ist $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$. Wenn $a = 0$ ist, sind wir fertig. Wenn $a \neq 0$ ist, dann folgt aber $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0$, also $b = 0$.)

(b) Siehe bspw. **Wiki**.

□

Beispiel 3.11.

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper.

2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

3. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann ist $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ ein Körper.

4. Falls $m \in \mathbb{N}$ keine Primzahl ist, dann ist $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ kein Körper, da die Nullteilerfreiheit nicht gegeben ist.

4 4. Tutoriumsblatt (23. November 2021)

4.1 Aufgaben

Aufgabe 4.1. Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil von

(a) $\frac{1-2i}{2+3i}$,

(b) $\frac{i}{\sqrt{2}+\frac{2}{1+i}}$,

(c) $(2-i)^5$ und $(1-i)^{17}$, und

(d) $\sum_{\ell=0}^{n} i^\ell$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 4.2. Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms $\mathbb{C} \ni z \mapsto 1 + z^3$.

Aufgabe 4.3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{2n} i^k \cdot k = \begin{cases} n(1-i)\,, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -(n+1)+ni\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Diese Aufgabe zeigt, dass die in den imaginären Einheiten versteckten Oszillationen zu Auslöschungen innerhalb der Summe führen. (Naiv, bspw. mit Hilfe des Integralkriteriums $\sum_{k\leq n} F(k) \sim \int\limits_{x\leq n} F(x)$ für steigendes $F(k)$, würde man $|\sum_{k=0}^{2n} i^k \cdot k| \sim n^2$ erwarten.)

Aufgabe 4.4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $|a+ib| \leq |a|+|b| \leq \sqrt{2}|a+ib|$.

In Analysis haben Sie gelernt/lernen Sie, dass $|\cdot| : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mit $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ und $|\cdot|_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mit $|a+ib|_1 := |a|+|b|$ Normen auf $\mathbb{C}$ sind. Diese Aufgabe ist ein Beispiel für die Tatsache, dass alle Normen auf endlichdimensionalen Vektorräumen äquivalent zueinander sind.

Aufgabe 4.5. Angenommen $\theta \in \mathbb{R}$ ist so, dass $\sin(\theta/2) \neq 0$. Zeigen Sie die trigonometrische Identität von Lagrange

$$1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin(\theta/2)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(Die rechte Seite$-1/2$ heißt “Dirichlet-Kern”.)

4.2 Lösungen

Lösung 4.1. (a)

$$\frac{1-2i}{2+3i} = \frac{(1-2i)(2-3i)}{4+9} = \frac{-4}{13} + \frac{-7}{13} \cdot i\,.$$

(b)

$$\frac{i}{\sqrt{2}+\frac{2}{1+i}} = \frac{i}{\sqrt{2}+\frac{2(1-i)}{1+1}} = \frac{i}{\sqrt{2}+1-i} = \frac{i(\sqrt{2}+1+i)}{(\sqrt{2}+1)^2+1} = \frac{\sqrt{2}-2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot i$$

(c) Wir geben zwei Lösungsmöglichkeiten. (Die Zweitere ist offensichtlich effizienter.)

- Binomische Formel: Da $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper (Übungsblatt) und damit insbesondere ein kommutativer Ring mit Einselement $1 \neq 0$ ist, gilt die binomische Formel

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}, \quad u, v \in \mathbb{C},$$

siehe (3.1). Wir erinnern daran, dass $i^n = i^{4k+r} = (i^4)^k \cdot i^r = i^r$ für $\mathbb{Z} \ni n = 4k + r$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}(2-i)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^k i^{5-k} \\ &= \binom{5}{0} 2^0 i^5 + \binom{5}{1} 2^1 i^4 + \binom{5}{2} 2^2 i^3 + \binom{5}{3} 2^3 i^2 + \binom{5}{4} 2^4 i^1 + \binom{5}{5} 2^5 i^0 \\ &= -38 - 41i\,.\end{aligned}$$

- Polardarstellung: Wir schreiben $z = (1 - i) = |z|e^{i\varphi}$, wobei $|z|^2 = 1^2 + |i|^2 = 2$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ durch $\sqrt{2}\cos\varphi = 1$ und $\sqrt{2}\sin\varphi = -i$, also $\varphi = -\pi/4$ bestimmt ist. Somit ist

$$z = (1-i) = \sqrt{2}e^{i \cdot \frac{-\pi}{4}}$$

und daher

$$\begin{aligned}(1-i)^{17} &= 2^{\frac{17}{2}} e^{-17i\pi/4} = 2^8 \cdot \sqrt{2}(\cos(-17\pi/4) + i\sin(-17\pi/4)) \\ &= 2^8 \cdot \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + \sin(-\pi/4)) = 2^8 - 2^8 i\end{aligned}$$

dank $17\pi/4 = 2\pi \cdot \frac{16+1}{8} = 2\pi \cdot (2 + \frac{1}{8})$.

(d) Sei $n = 4k + r$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Mit $\sum_{\ell=0}^{3} i^\ell = 0$ sowie $i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$ erhalten wir

$$\sum_{\ell=0}^{n} i^\ell = \sum_{\ell=0}^{4k-1} i^\ell + \sum_{\ell=4k}^{4k+r} i^\ell = 0 + \sum_{i=0}^{r} i^\ell = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } r = 0 \\ 1 + i\,, & \text{falls } r = 1 \\ i\,, & \text{falls } r = 2 \\ 0\,, & \text{falls } r = 3 \end{cases}.$$

Lösung 4.2. Mit dem Fundamentalsatz der Algebra (auch bekannt als Satz von D'Alembert oder Satz von D'Alembert und Gauss) hat $1 + z^3$ genau drei Nullstellen. Diese sind $-e^{\frac{1}{3}\cdot 2\pi i}$, $-e^{\frac{2}{3}\cdot 2\pi i}$ und $-e^{\frac{3}{3}\cdot 2\pi i} = -1$.

Lösung 4.3. Wir beweisen die Behauptung per Induktion über n und stellen fest, dass sie für $n = 0$ und $n = 1$ wahr ist, denn $i^0 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot (1 - i)$ und $i^1 \cdot 1 + i^2 \cdot 2 = i - 2 = -(1 + 1) + i$. Wir vollziehen nun den Induktionsschritt und nehmen an, dass die Aussage für $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist. Wir zerlegen zuerst

$$\sum_{k=0}^{2n+2} i^k \cdot k = \sum_{k=0}^{2n} i^k \cdot k + (2n+1)i^{2n+1} + (2n+2)i^{2n+2}$$

und unterscheiden nun zwischen den Fällen, wo n gerade oder ungerade ist.

- n gerade: Dann gilt dank der Induktionshypothese

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n+2} i^k \cdot k &= n(1-i) + (2n+1)i^{2n+1} + (2n+2)i^{2n+2} = n(1-i) + (2n+1)i - (2n+2) \\ &= -n - 2 + (n+1)i = -(n+1+1) + (n+1)i\end{aligned}$$

wie behauptet.

- n ungerade: Dann gelten $i^{2n+2} = i^4 = 1$ sowie $i^{2n+1} = -i$ (schreibe z.B. $n = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$) und dank der Induktionshypothese

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n+2} i^k \cdot k &= -(n+1) + ni + (2n+1)i^{2n+1} + (2n+2)i^{2n+2} \\ &= -(n+1) + ni + -(2n+1)i + 2n + 2 = n + 1 - (n+1)i = (n+1)(1-i)\end{aligned}$$

  wie behauptet.

Lösung 4.4. Die erste Ungleichung $|a+ib| \le |a| + |b|$ ist äquivalent zu $\sqrt{a^2+b^2} \le |a| + |b|$ und folgt aus $a^2 + b^2 \le (|a| + |b|)^2$.

Die zweite Ungleichung $\sqrt{2}|a+ib| \ge |a|+|b|$ ist äquivalent zu $2(a^2+b^2) \ge a^2+b^2+2|a||b|$ und folgt aus $2|a||b| \le a^2+b^2$ dank der binomischen Formel und $(|a|-|b|)^2 \ge 0$. (Dies ist ein Beispiel für die Youngsche Ungleichung $ab \le a^p/p + b^{p'}/p'$ für $a, b \ge 0$, $1 < p < \infty$ und $1/p + 1/p' = 1$. Für $p = 2$ wird sie auch manchmal als **"Peter–Paul-Ungleichung"** bezeichnet.)

Lösung 4.5. Wir induzieren über $n \in \mathbb{N}_0$ und stellen fest, dass $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ wahr ist. Angenommen, die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \cos(k\theta) &= \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin(\theta/2)} + \cos((n+1)\theta) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) + 2\sin(\frac{\theta}{2})\cos((n+1)\theta)}{2\sin(\theta/2)}\end{aligned}$$

dank der Induktionshypothese. Mit der **trigonometrischen Identität**

$$\begin{aligned}\cos(a)\sin(b) &= \frac{(\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{-ia})(\mathrm{e}^{ib} - \mathrm{e}^{-ib})}{4i} = \frac{\mathrm{e}^{i(a+b)} - \mathrm{e}^{-i(a+b)} - (\mathrm{e}^{i(a-b)} - \mathrm{e}^{-i(a-b)})}{4i} \\ &= \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}\end{aligned}$$

folgt (mit $a = (n+1)\theta$ und $b = \theta/2$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \cos(k\theta) &= \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) + \sin\left(\frac{2n+3}{2}\theta\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{2\sin(\theta/2)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta\right)}{2\sin(\theta/2)}\end{aligned}$$

wie behauptet.

4.3 Komplexe Zahlen

Kanonische Literatur für Einsteiger: [Ahl78, MH87, SS03, BN10]

4.3.1 Kurzer historischer Überblick

- Reelle Zahlen resultieren aus der Suche nach einem System (einer abstrakten Menge zusammen mit gewissen Regeln), welches $\mathbb{Q}$ enthält und Lösungen für polynome Gleichungen wie $x^2 - 2 = 0$ bereitstellt.

- 16. Jahrhundert: Cardano betrachtete quadratische (und kubische) Gleichungen wie $x^2 + 2x + 2 = 0$, welche durch keine reelle Zahl x gelöst werden. Formal wird diese Gleichung durch $-1 \pm \sqrt{-1}$ gelöst. Cardano bemerkte, dass, wenn diese "komplexen Zahlen" wie "übliche Zahlen" behandelt würden mit der zusätzlichen Bedingung $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = 1$, dann würde der Ausdruck $-1 \pm \sqrt{-1}$ tatsächlich $x^2 + 2x + 2 = 0$ lösen. Man nannte $i := \sqrt{-1}$. (Elektrotechniker schreiben $j := \sqrt{-1}$, da i für sie den elektrischen Strom bezeichnet.)

- 18. Jahrhundert: Euler zeigte $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ für $\theta \in \mathbb{R}$ und damit einen tiefen Zusammenhang zwischen komplexen Zahlen und trigonometrischen Funktionen. Die Regel $\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\theta_2}$ führte zu den heute bekannten trigonometrischen Identitäten bspw. für $\cos(x+y)$ und $\sin(x+y)$ etc..

- 19. Jahrhundert: Cauchy, Dirichlet, Weierstrass und Riemann entwickelten das wichtige Themengebiet der *Funktionentheorie*, also der Analysis auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Diese Theorie war damals wichtig, um bspw. die Wärmeleitung und andere Probleme in Thermodynamik, Hydrodynamik etc. zu behandeln. Konkretere Beispiele umfassen die Integrale $\int_0^\infty x^{-2}\sin^2 x = \pi/2$, $\int_0^\infty (1+x)^{-1}x^{\alpha-1} = \pi/\sin(\alpha\pi)$ für $0 < \alpha < 1$ etc. welche mit klassischen Methoden nur mit großer Anstrengung zu zeigen sind.

- Anwendungen heutzutage: Physik (Quantenmechanik, Elektrodynamik, Optik, ...), Ingenieurwissenschaften, ...

4.3.2 Definition, Körper, Fundamentalsatz der Algebra

Definition 4.1. Das System der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ zusammen mit den üblichen Regeln für Vektoraddition und skalarer Multiplikation mit reellen Zahlen, sprich

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)+(x_2,y_2) &= (x_1+x_2, y_1+y_2)\\ a(x,y) &= (ax,ay)\,, \quad a\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

sowie der *komplexen Multiplikation*, die durch

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

definiert ist.

Satz 4.2. *Die komplexen Zahlen $(\mathbb{C},+,\cdot)$ mit der oben definierten komplexen Multiplikation $\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ bilden einen Körper.*

Beweis. Übungsblatt. □

Satz 4.3 (Fundamentalsatz der Algebra von D'Alembert–Gauss)**.** *Sei $z\in\mathbb{C}$. Dann gibt es zwei Lösungen $w\in\mathbb{C}$, sodass $w^2 = z$.*

Allgemeiner gibt es für alle $n\in\mathbb{N}$ und $c_0,\dots,c_{n-1}\in\mathbb{C}$ komplexe Zahlen $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (nicht notwendigerweise verschieden voneinander), sodass

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j = \prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)$$

für alle $z\in\mathbb{C}$ gilt.

Beweis. Wir zeigen nur den ersten, einfachen Teil der Aussage.

Seien $z = a+bi$ und $w = x+iy$. Wir lösen dann $(x+iy)^2 = x^2-y^2+2xyi = a+bi$, sprich $x^2-y^2 = a$ und $2xy = b$. Daraus folgen $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2+b^2$ und daher $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$. Daraus folgen $x^2 = (a+\sqrt{a^2+b^2})/2$ und $y^2 = (-a+\sqrt{a^2+b^2})/2$. Seien nun

$$\alpha = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \quad\text{und}\quad \beta = \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,.$$

Dies führt zu folgenden Fällen.

- Falls $b\geq 0$, dann gilt $x=\alpha$, $y=\beta$, oder $x=-\alpha$, $y=-\beta$.

- Falls $b<0$, dann gilt $x=\alpha$, $y=-\beta$, oder $x=-\alpha$, $y=\beta$.

Daraus folgt, dass $w^2 = z$ die Lösungen $w = \pm(\alpha+\mu\beta i)$, wobei $\mu = 1$, falls $b\geq 0$ und $\mu=-1$, falls $b<0$. Dies schließt den Beweis des einfacheren Teils. □

4.3.3 Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen

Die Funktionen

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$
$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \cos(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j}$$

sind auf ganz $\mathbb{R}$ wohldefiniert, da die sie definierenden Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergieren. Dies kann sofort aus der absoluten Konvergenz der Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x) = \mathrm{e}^x = \sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ abgeleitet werden. (Beweis in Analysis 1.)

Diese Funktionen können auch auf ganz $\mathbb{C}$ definiert werden. Wir beginnen mit der Exponentialfunktion. Obwohl wir weder die Definition von Konvergenz einer Reihe in $\mathbb{R}$ noch in $\mathbb{C}$ kennen, ist es natürlich e^{iy} für $y \in \mathbb{R}$ durch die Reihe

$$1 + \frac{(iy)}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \cdots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right), \quad y \in \mathbb{R}$$

zu definieren. Tatsächlich stellt diese Reihe für jedes $y \in \mathbb{R}$ eine wohldefinierte komplexe Zahl dar, wie man später lernt. Akzeptiert man dies, verstehen wir also e^x und e^{iy} für $x, y \in \mathbb{R}$. Wie definiert man also $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy}$ für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$?

Definition 4.4. Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$ definieren wir $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos(y) + i\sin(y))$. (Diese Formel ist auch als *Eulers Formel* bekannt.)

Satz 4.5. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gelten folgende Aussagen.*

1. $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$.
2. $\mathrm{e}^z \neq 0$.
3. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathrm{e}^x > 1$ für $x > 0$ und $\mathrm{e}^x < 1$ für $x < 0$.*
4. $|\mathrm{e}^{x+iy}| = \mathrm{e}^x$.
5. $\mathrm{e}^{i\pi/2} = i$, $\mathrm{e}^{\pi i} = -1$, $\mathrm{e}^{3\pi i/2} = -i$ *und* $\mathrm{e}^{2\pi i = 1}$.
6. *$z \mapsto \mathrm{e}^z$ ist periodisch und jede Periode ist von der Form $i \cdot 2\pi n$ für $n \in \mathbb{Z}$. (Das heißt $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z+w}$ für alle $w \in 2\pi i \cdot \mathbb{Z}$.)*
7. *$\mathrm{e}^z = 1$ genau dann, wenn $z \in i \cdot 2\pi\mathbb{Z}$.*

Dieser Satz impliziert

$$\cos(y) = \frac{\mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{-iy}}{2} = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{iy}) \quad \text{und} \quad \sin(y) = \frac{\mathrm{e}^{iy} - \mathrm{e}^{-iy}}{2i} = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{iy})$$

und erlaubt eine geometrische Anschauung der komplexen Zahlen.

Definition 4.6. Sei $z \in \mathbb{C}$.

1. Wir definieren *die Norm/den Absolutbetrag* $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ durch $|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

2. Der Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ zwischen $z \in \mathbb{C}$ und der reellen Achse in der komplexen Ebene ist durch

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \quad \text{und} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

gegeben.

3. Nach Einschränkung von $\theta \in \mathbb{R}$ auf ein Intervall $(a-\pi, a+\pi]$ oder $[a-\pi, a+\pi)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ wird θ auch als *Argument von z* bezeichnet und man schreibt $\theta = \arg(z)$ mit $\arg(z) \in (a-\pi, a+\pi]$ oder $\arg(z) \in [a-\pi, a+\pi)$.

Bemerkung 4.7. Populäre Wahlen für das $\arg(z)$ definierende Intervall sind $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ und $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$.

Sobald ein Intervall für den Winkel θ einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ festgelegt wurde, ist, wegen der 2π-Periodiziät von $\cos\theta$ und $\sin\theta$, das Argument $\arg(z)$ eindeutig festgelegt. Offensichtlich kann jeder Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ durch Addition von $2\pi \cdot n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ in eine Zahl in $[a-\pi, a+\pi)$ oder $(a-\pi, a+\pi]$ übergeführt werden. Wir erhalten somit die *Polardarstellung*

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\mathrm{e}^{i\theta} = |z|\mathrm{e}^{i(\theta+2\pi n)} = |z|\mathrm{e}^{i\arg(z)} = |z|\mathrm{e}^{i(\arg(z)+2\pi n)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Satz 4.8. *Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und ein das Argument definierendes Intervall $(a-\pi, a+\pi]$ oder $[a-\pi, a+\pi)$ gegeben. Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$, sodass*

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und

2. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi i n$.

Insbesondere gilt für $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ mit $r > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$, dass $z^n = r^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta))$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (Dies ist die Formel von de Moivre*.)*

Betrachte bspw. $z_1 = -1$ und $z_2 = -i$ und das $\arg(z)$ definierende Intervall sei $[0, 2\pi)$. Dann sind $\arg(z_1) = \pi$ und $\arg(z_2) = 3\pi/2$ und $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(i) = \pi/2 = \pi + \frac{3\pi}{2} - 1 \cdot 2\pi = \arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi$.

Beweis. Folgt aus der Polardarstellung sowie den Additionstheoremen für $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$, die aus der Eulerschen Formel $\mathrm{e}^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$ hergeleitet werden können. □

Korollar 4.9. *Sei $w = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$. Dann sind die n-ten Wurzeln von w durch die n komplexen Zahlen*

$$z_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right], \quad k \in \{0, 1, ..., n-1\}$$

gegeben.

Wir erinnern an die komplexe Konjugation

$$\overline{z} = \overline{a + ib} := a - ib$$

für alle $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Satz 4.10. *1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.*

2. $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.

3. $\overline{z/z'} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ für $z' \neq 0$.

4. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

5. Falls $z \neq 0$, dann $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$.

6. $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$.

7. $\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$ *und* $\mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/(2i)$.

8. $\overline{\overline{z}} = z$.

Satz 4.11. 1. $|zz'| = |z||z'|$.

2. *Falls* $z' \neq 0$, *dann* $|z/z'| = |z|/|z'|$.

3. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ *und* $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

4. $|\overline{z}| = |z|$.

5. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

6. $|z - z'| \geq ||z| - |z'||$.

7. $|z_1 w_1 + ... + z_n w_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + ... + |z_n|^2} \cdot \sqrt{|w_1|^2 + ... + |w_n|^2}$.

5 5. Tutoriumsblatt (30. November 2021)

5.1 Aufgaben

Aufgabe 5.1. In der Vorlesung (Seite 42–43) haben Sie bereits gesehen, dass $\mathbb{R}^N$ bzgl. komponentenweiser Addition und Multiplikation mit einem Skalar (aus $\mathbb{R}$) zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ wird.

Zeigen Sie, dass auch die Menge $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen

$$\begin{aligned} (x_1, x_2)^T + (y_1, y_2)^T &:= (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)^T \\ \lambda \cdot (x_1, x_2)^T &:= (\lambda x_1 + \lambda - 1, \lambda x_2 + \lambda - 1)^T \end{aligned}$$

für $x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda \in \mathbb{R}$ einen Vektorraum darstellt.

Aufgabe 5.2. Entscheiden Sie bei den folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, ob es sich um Untervektorräume (mit der Standarddefinition der Addition und der skalaren Multiplikation) des $\mathbb{R}^3$ handelt.

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 4y = 0, z = 0, 2x - y = 0\}$

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y - z = 1\}$

(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Aufgabe 5.3. Gegeben sind die folgenden drei Vektoren (ausgedrückt in der Standardbasis) in $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 3)^T$, $v_2 = (2, 4, 6)^T$ und $v_3 = (-1, -1, 0)^T$.

1. Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$? (Hinweis für die nächste Aufgabe: Sind v_1 und v_2 linear unabhängig voneinander?)

2. Finden Sie einen neuen Vektor $v_2' \in \mathbb{R}^3$, sodass $\{v_1, v_2', v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet.

Aufgabe 5.4. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine nicht-leere Familie von Untervektorräumen. Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein Untervektorraum.

2. Seien $r \in \mathbb{N}$ und $U_1, ..., U_r$ Untervektorräume. Dann ist auch $U_1 + U_2 + \cdots + U_r := \{u_1 + u_2 + \cdots + u_r : u_j \in U_j \,\forall\, j \in \{1, 2, ..., r\}\}$ ein Untervektorraum.

3. Für zwei Untervektorräume U_1, U_2 ist $U_1 \cup U_2$ im Allgemeinen kein Untervektorraum.

Aufgabe 5.5. Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass $\dim(U) \leq \dim(V)$.

5.2 Lösungen

Lösung 5.1.

- Additive abelsche Gruppe:
  - **Abgeschlossenheit** ist klar
  - **Assoziativität** durch Nachrechnen auch klar, denn

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + y_1 + 1) + z_1 + 1 \\ (x_2 + y_2 + 1) + z_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (y_1 + z_1 + 1) + 1 \\ x_2 + (y_2 + z_2 + 1) + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + z_1 + 1 \\ y_2 + z_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

- Das **neutrale Element** ist $\vec{0} = (-1,-1)^T$, denn

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 1 + 1 \\ x_2 - 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Sei $(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann folgt durch Auflösen der Gleichungen für die beiden Komponenten, dass das zu $(x_1,x_2)^T$ **inverse Element** durch $(-x_1-2,-x_2-2)^T$ gegeben ist.
- Die **Kommutativität** ist auch klar, denn

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 + 1 \\ y_2 + x_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Skalare Multiplikation:
  - **Assoziativität**: Nachrechnen zeigt für $\lambda,\gamma \in \mathbb{R}$ und $x = (x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, dass

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\gamma \cdot x) = \lambda \begin{pmatrix} \gamma x_1 + \gamma - 1 \\ \gamma x_2 + \gamma - 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda(\gamma x_1 + \gamma - 1) + \lambda - 1 \\ \lambda(\gamma x_2 + \gamma - 1) + \lambda - 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \lambda\gamma(x_1+1) - 1 \\ \lambda\gamma(x_2+1) - 1 \end{pmatrix} = (\lambda\gamma) \cdot x \end{aligned}$$

  - **Distributivitätsgesetze**: Nachrechnen zeigt für $\lambda,\gamma \in \mathbb{R}$ und $x,y \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x_1 + x_2) = \lambda \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + y_1 + 1) + \lambda - 1 \\ \lambda(x_2 + y_2 + 1) + \lambda - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + \lambda - 1) + (\lambda y_1 + \lambda - 1) + 1 \\ (\lambda x_2 + \lambda - 1) + (\lambda y_2 + \lambda - 1) + 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \end{aligned}$$

  und

$$\begin{aligned} (\lambda + \gamma) \cdot x &= \begin{pmatrix} (\lambda+\gamma)x_1 + (\lambda+\gamma) - 1 \\ (\lambda+\gamma)x_2 + (\lambda+\gamma) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + \lambda - 1) + (\gamma x_1 + \gamma - 1) + 1 \\ (\lambda x_2 + \lambda - 1) + (\gamma x_2 + \gamma - 1) + 1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot x + \gamma \cdot x \end{aligned}$$

  - Das neutrale Element in $\mathbb{R}$ ist die reelle Zahl 1 und für sie gilt auch $1 \cdot (x_1,x_2) = (x_1 + 1 - 1, x_2 + 1 - 1)^T = (x_1,x_2)^T$, wie in (v) in Definition IV.1 gefordert.

Lösung 5.2. (a) Explizites Auflösen der Gleichungen zeigt, dass sich $x = y = z = 0$ als einzige Lösung der A definierenden Gleichungen ergibt, sprich $A = \{(0,0,0)^T\}$ ist der triviale Unterraum.

(b) Die Menge B enthält nicht das Nullelement, denn die Komponenten des Nullvektors $(x,y,z)^T = (0,0,0)^T$ lösen nicht die Gleichung $x^2 + 2y - z = 0$.

(c) Die Menge C ist die abgeschlossene Einheitskugel; sie enthält offenbar nicht alle möglichen Linearkombinationen. Beispielsweise sind sowohl $v_1 = (1,0,0)^T$ als auch $v_2 = (0,1,0)^T$ in C enthalten, jedoch nicht $v_1 + v_2 = (1,1,0)$, denn $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 1$.

Lösung 5.3. Damit v_1,v_2,v_3 eine Basis bilden, muss gezeigt werden, dass sie linear abhängig sind und ein Erzeugendensystem bilden. Die lineare Unabhängigkeit ist verletzt. Wir lösen dazu $\sum_{j=1}^3 a_j v_j = 0$ nach $a_j \in \mathbb{R}$ auf und erhalten

1. $a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$
2. $2a_1 + 4a_2 - a_3 = 0$

3. $3a_1 + 6a_2 = 0$, woraus $a_2 = -a_1/2$ folgt.

4. Gleichsetzen der ersten beiden Gleichungen impliziert $a_3 = 0$

5. Daraus folgt $\sum_{j=1}^{3} a_j v_j = a_1(v_1 - v_2/2) = 0$ für beliebiges $a_1 \in \mathbb{R}$, sprich $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist linear abhängig.

Wir erstzen nun v_2 durch $v_2' = (2, 4, 1)^T$ und stellen fest, dass die lineare Abhängigkeit gegeben ist. In der Tat erhalten wir aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 - a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 4a_2 - a_3 &= 0 \\ 3a_1 + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

durch Abziehen der ersten von der zweiten Gleichung, dass $a_1 + 2a_2 = 0$, also $a_1 = -2a_2$ sein muss. Durch Einsetzen in die dritte Gleichung folgt $3 \cdot (-2a_2) + a_2 = 0$, also $a_2 = a_1 = a_3 = 0$, wie behauptet.

Die Tatsache, dass $\{v_1, v_2', v_3\}$ eine Basis bildet, folgt aus Satz 5.22.

Lösung 5.4. 1. Wegen $0 \in U_i$ folgt auch $0 \in \bigcap_{i\in I} U_i$. Seien nun $u, v \in \bigcap_{i\in I} U_i$ und $\lambda \in K$. Dann folgen

$$u, v \in U_i \ (i \in I) \Rightarrow u + v \in U_i \ (i \in I) \Rightarrow u + v \in \bigcap_{i\in I} U_i$$

und

$$\lambda u \in U_i \ (i \in I) \Rightarrow \lambda u \in \bigcap_{i\in I} U_i$$

aus der Tatsache, dass jeder U_i ein Untervektorraum ist.

2. Wegen $0 \in U_i$ folgt auch $0 \in U_1 + ... + U_r$. Seien nun $\lambda \in K$ und $u, v \in U_1 + ... + U_r$, sprich $u = u_1 + ... + u_r$ und $v = v_1 + ... + v_r$ mit $u_j, v_j \in U_j$ für alle $j = 1, ..., r$. Da jedes U_j ein Untervektorraum ist, ist $u_j + v_j \in U_j$ für jedes $u_j, v_j \in U_j$ und $j = 1, ..., r$. Daraus folgt

$$(u_1 + v_1) + ... + (u_r + v_r) \in U_1 + ... + U_r \Rightarrow u + v \in U_1 + ... + U_r\,.$$

Schließlich folgt auch

$$\lambda u = \lambda u_1 + ... + \lambda u_r \in U_1 + ... + U_r$$

aus der Tatsache, dass jedes U_j ein Untervektorraum ist.

3. Man nehme $U_1 = \{\alpha \cdot (1, 1)^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$ und $U_2 = \{\alpha \cdot (1, -1)^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Diese Mengen können geometrisch als "Strahlen", die senkrecht aufeinander stehen und durch den Ursprung laufen, veranschaulicht werden. Dann sind U_1, U_2 Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ und $(1, 1)^T, (1, -1)^T \in U_1 \cup U_2$, jedoch ist bereits $(1, 1)^T + (1, -1)^T = (2, 0)^T \notin U_1 \cup U_2$, da $(2, 0)$ auf keinem der beiden "Strahlen" U_1 oder U_2 liegt.

Lösung 5.5. OBdA seien $U, V \neq \{0\}$. Für jede linear unabhängige Aufzählung $u_1, ..., u_r \in U \subseteq V$ gilt nach dem Basisergänzungssatz $r \leq n := \dim(V)$. Da $U \neq \{0\}$ können wir daher linear unabhängige $u_1, ..., u_r \in U$ mit *maximalem* $r \in \{1, ..., n\}$ finden.

Wir behaupten nun, dass jedes beliebige $u \in U$ ein Element von $\operatorname{span}(u_1, ..., u_r)$ ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es $u_{r+1} \in U$ mit $u_{r+1} \notin \operatorname{span}(u_1, ..., u_r)$. Nach (4) in Lemma 5.7 wäre dann aber auch $u_1, ..., u_{r+1}$ linear unabhängig, was der geforderten Maximalität von r widerspricht.

Damit haben wir gezeigt, dass $u_1, ..., u_r$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis von U bildet. Per Definition ist $\dim(U) = r$ und wegen $\dim(U) = r \leq n = \dim(V)$ folgt die Aussage.

5.3 span, Erzeugendensystem, lineare Unabhängigkeit und Basen

Seien V ein K-Vektorraum und $b_1, ..., b_r \in V$ (fest). Fragestellungen:

1. Gibt es für jedes $v \in V$ genau ein r-Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in K^r$, sodass $v = \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j$? In dem Fall nennt man $\{v_1, ..., v_r\}$ Basis.
2. Gibt es für jedes $v \in V$ mindestens ein r-Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in K^r$, sodass $v = \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j$? In dem Fall nennt man $\{v_1, ..., v_r\}$ Erzeugendensystem.
3. Gibt es für jedes $v \in V$ höchstens ein r-Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in K^r$, sodass $v = \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j$? In dem Fall nennt man $\{v_1, ..., v_r\}$ linear unabhängig.

Definition 5.1 (span, Erzeugendensystem)**.** Seien V ein K-Vektorraum und $b_1, ..., b_r \in V$ (fest).

1. Die Menge aller Linearkombinationen der $b_1, ..., b_r$ wird mit $\operatorname{span}(b_1, ..., b_r) := \{\sum_{j=1}^r \lambda_j b_j : \lambda_j \in K\}$ bezeichnet.
2. Die Vektoren $b_1, ..., b_r$ heißen *Erzeugendensystem von* V genau dann, wenn $V = \operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$.
3. Der Vektorraum V heißt *endlich erzeugt* genau dann, wenn es ein Erzeugendensystem von V gibt.

Bemerkung 5.2. Offensichtlich gilt

$$(b_1, ..., b_r) \text{ Erzeugendensystem von } V \Leftrightarrow \forall\, v \in V\, \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_r : \, v = \sum_{j=1}^r \lambda_j b_j \,,$$

sprich für jedes $v \in V$ gibt es mindestens ein $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in K^r$, sodass $v = \sum_{j=1}^r \lambda_j b_j$. (Um dies explizit zu sehen, sollte man "$\subseteq$" und "$\supseteq$" in $V = \operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$ zeigen.)

Lemma 5.3. *Seien V ein K-Vektorraum und $b_1, ..., b_r \in V$. Dann ist* $\operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$ *der kleinste Untervektorraum von V, der $b_1, ..., b_r$ enthält, sprich für jeden Untervektorraum U von V mit $b_1, ..., b_r \in U$ gilt* $\operatorname{span}(b_1, ..., b_r) \subseteq U$.

Beweis. Aus der Definition von Untervektorraum (oder Lemma IV.3 im Skript) folgt, dass $\operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$ ein Untervektorraum von V ist. Sei nun U ein Untervektorraum mit $b_1, ..., b_r \in U$. Dann folgt aus den Unterraumkriterien, dass $\sum_{j=1}^r \lambda_j b_j \in U$ für alle $\lambda_j \in K$, also insbesondere, dass $\operatorname{span}(b_1, ..., b_r) \subseteq U$, was behauptet war. □

Definition 5.4 (Lineare Unabhängigkeit)**.** Seien V ein K-Vektorraum und $b_1, ..., b_r \in V$.

1. $b_1, ..., b_r$ linear unabhängig $:\Leftrightarrow \forall\, \lambda_1, ..., \lambda_r \in K : \Big(\sum_{j=1}^r \lambda_j b_j = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0\Big)$
2. $b_1, ..., b_r$ linear abhängig $:\Leftrightarrow b_1, ..., b_r$ sind *nicht* linear unabhängig
3. $v \in V$ linear abhängig von $b_1, ..., b_r :\Leftrightarrow v \in \operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$

Korollar 5.5. *Seien V ein K-Vektorraum und $b_1, ..., b_r \in V$. Dann gilt:*
$b_1, ..., b_r$ *linear unabhängig* $\Leftrightarrow \forall\, \lambda, \mu \in K^r : \Big(v := \sum_{j=1}^r \lambda_j b_j = \sum_{j=1}^r \mu_j b_j \Rightarrow \lambda_j = \mu_j \; (j = 1, ..., r)\Big)$,
sprich für jedes $v \in V$ gibt es höchstens *ein $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in K^r$ mit $v = \sum_{j=1}^r \lambda_j b_j$.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Aus der Annahme $\sum_{j=1}^r \lambda_j b_j = \sum_{j=1}^r \mu_j b_j$ folgt $\sum_{j=1}^r (\lambda_j - \mu_j) b_j = 0$. Da die b_j linear unabhängig sind, muss $\lambda_j = \mu_j$ für alle $j = 1, ..., r$ gelten.

"$\Leftarrow$": Man wähle $\mu_1 = ... = \mu_r = 0$. Dann stimmt die resultierende Aussage des Lemmas, sprich $\Big(v := \sum_{j=1}^r \lambda_j b_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = \mu_j \; (j = 1, ..., r)\Big)$ gerade mit der Definition von linearer Unabhängigkeit überein. □

Korollar 5.6. *Seien V ein K-Vektorraum und $b_1, ..., b_r \in V$. Dann gilt:*
$b_1, ..., b_r$ *linear abhängig* $\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_r \in K, k \in \{1, ..., r\} : \sum_{j=1}^r \lambda_j b_j = 0 \wedge \lambda_k \neq 0.$

Lemma 5.7. *Seien V ein K-Vektorraum und $b_1, ..., b_r \in V$. Dann gelten folgende Aussagen.*

1. *Sei $b \in V$. Dann gilt: b linear abhängig $\Leftrightarrow b = 0$*
2. *Sei $r \geq 2$, dann gilt*
$$b_1, ..., b_r \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow \exists k \in \{1, ..., r\} : b_k \in \operatorname{span}(b_1, ..., b_{k-1}, b_{k+1}, ..., b_r)$$
3. *Sei $r \geq 1$ und auch $b_{r+1} \in V$, dann gilt*
$$b_{r+1} \text{ linear abhängig von } b_1, ..., b_r \Leftrightarrow \operatorname{span}(b_1, ..., b_{r+1}) = \operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$$
4. *Sei $r \geq 1$ und auch $b_{r+1} \in V$, dann gilt*
$$b_1, ..., b_r \text{ linear unabhängig und } b_{r+1} \notin \operatorname{span}(b_1, ..., b_r) \Rightarrow b_1, ..., b_{r+1} \text{ linear unabhängig}$$

Beweis. 1. Für den Beweis der beiden Implikationen verwenden wir Korollar 5.6.
"$\Rightarrow$": b linear abhängig $\Leftrightarrow \exists \lambda \in K \setminus \{0\} : \lambda \cdot b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot b) = 0$.
"$\Leftarrow$": $b = 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \wedge 1 \neq 0 \Rightarrow b$ linear abhängig.

2. "$\Rightarrow$": Wenn $b_1, ..., b_r$ linear abhängig sind, dann folgt aus Korollar 5.6, dass es ein geeignetes $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in K^r$ mit $\lambda_k \neq 0$ gibt, sodass $\lambda_k b_k + \sum_{j=1, j\neq k}^r \lambda_j b_j = 0$ gilt. Daraus folgt
$$b_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{r} (-\frac{\lambda_j}{\lambda_k}) \cdot b_j \in \operatorname{span}(b_1, ..., b_{k-1}, b_{k+1}, ..., b_r)\,.$$
"$\Leftarrow$": Angenommen $b_k \in \operatorname{span}(b_1, ..., b_{k-1}, b_{k+1}, ..., b_r)$. Dann gibt es geeignete Skalare $\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, ..., \lambda_r \in K$, sodass $b_k = \sum_{j=1, j\neq k}^r \lambda_j b_j$. Definiert man $\lambda_k := -1$, so folgt $\sum_{j=1}^r \lambda_j b_j = 0$, womit $b_1, ..., b_r$ linear abhängig sein müssen.

3. Per Definition ist b_{r+1} genau dann linear abhängig von $b_1, ..., b_r$, wenn $b_{r+1} \in \operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$. Wir behaupten, dass dies äquivalent zu $\operatorname{span}(b_1, ..., b_r) = \operatorname{span}(b_1, ..., b_{r+1})$ ist.
"$\Leftarrow$": Offenbar ist $b_{r+1} \in \operatorname{span}(b_1, ..., b_{r+1})$. Da aber $\operatorname{span}(b_1, ..., b_r) = \operatorname{span}(b_1, ..., b_{r+1})$, folgt daraus die Behauptung $b_{r+1} \in \operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$.
"$\Leftarrow$": Angenommen es gibt geeignete $\mu_1, ..., \mu_r \in K$, sodass $b_{r+1} = \sum_{j=1}^r \mu_j b_k$. Wir zeigen dann $\operatorname{span}(b_1, ..., b_r) = \operatorname{span}(b_1, ..., b_{r+1})$ indem wir "$\subseteq$" und "$\supseteq$" zeigen. Offenbar ist nur "$\supseteq$" nicht-trivial. Sei also $v \in \operatorname{span}(b_1, ..., b_{r+1})$, sprich es gibt geeignete $\lambda_1, ..., \lambda_{r+1} \in K$, sodass
$$\begin{aligned} v = \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j b_j &= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j b_j + \lambda_{r+1} b_{r+1} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j b_j + \lambda_{r+1} \sum_{j=1}^{r} \mu_j b_j \\ &= \sum_{j=1}^{r} (\lambda_j + \lambda_{r+1}\mu_j) \cdot b_j \in \operatorname{span}(b_1, ..., b_r)\,, \end{aligned}$$
was zu zeigen war.

4. Sei $\sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j b_j = 0$. Zu zeigen ist $\lambda_1 = ... = \lambda_{r+1} = 0$.
   (a) 1. Fall: $\lambda_{r+1} \neq 0$. Dann ist $b_{r+1} = \sum_{j=1}^r \left(-\frac{\lambda_j}{\lambda_{r+1}}\right) \in \operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$, was der Annahme $b_{r+1} \notin \operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$ widerspricht.
   (b) 2. Fall: $\lambda_{r+1} = 0$. Dann ist $\sum_{j=1}^r \lambda_j b_j = 0$. Aus der linearen Unabhängigkeit von $b_1, ..., b_r$ folgt aber $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$.

$\square$

Definition 5.8. Seien V ein K-Vektorraum und $b_1, ..., b_r \in V$. Dann heißt $\{b_1, ..., b_r\}$ *eine Basis* von V genau dann, wenn $\{b_1, ..., b_r\}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist. Für den Vektorraum $\{0\}$ wird die leere Aufzählung (also die leere Menge) $\emptyset$ als Basis festgelegt.

Aus den Definitionen von Erzeugendensystem und linearer Unabhängigkeit folgt unmittelbar

Korollar 5.9. *Seien V ein K-Vektorraum und $b_1, ..., b_r \in V$. Dann gilt*

$$b_1, ..., b_r \text{ Basis von } V \Leftrightarrow \forall\, v \in V\, \exists^! \,(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in K^r : \, v = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j b_j\, .$$

Satz 5.10 (Basisauswahlsatz)**.** *Seien $V \neq \{0\}$ ein endlich erzeugter Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$ und $b_1, ..., b_r \in V$ ein Erzeugendensystem von V, sprich $V = \operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$. Dann gibt es $\mathbb{N} \ni n \leq r$, sodass (ggf. nach geeigneter Umnummerierung) $b_1, ..., b_n$ eine Basis von V bildet.*

[Knapp ausgedrückt: durch Weglassen passender Vektoren (evtl. gar keiner) aus einem Erzeugendensytem erhält man eine Basis.]

Beweis. Sei $b_1, ..., b_r$ ein Erzeugendensystem von $V \neq \{0\}$.

OBdA seien $b_1, ..., b_r \neq 0$. (Durch Weglassen der Nullvektoren ändert sich nichts am Wert einer Linearkombination für Nichtnullvektoren. Es können auch nicht alle $b_j = 0$ sein, da sonst $V = \operatorname{span}(b_1, ..., b_r) = \{0\}$ folgen würde.)

1. Fall 1: $b_1, ..., b_r$ linear unabhängig. Dann ist $b_1, ..., b_r$ eine Basis von V und wir sind fertig.

2. Fall2 : $b_1, ..., b_r$ linear abhängig. Wegen $b_1 \neq 0, ..., b_r \neq 0$ ist $r \geq 2$, denn andernfalls wäre b_1 linear abhängig, was aber notwendigerweise $b_1 = 0$ implizieren würde (siehe 1. in Lemma 5.7).

   Nach 2. in Lemma 5.7 gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass b_k linear abhängig von $b_1, ..., b_{k-1}, b_{k+1}, ..., b_r$ ist. Wir benennen b_k in b_r und b_r in b_k um. Mit der neuen Bezeichnung ist b_r linear abhängig von $b_1, ..., b_{r-1}$. Nach 3. in Lemma 5.7 folgt $\operatorname{span}(b_1, ..., b_{r-1}) = \operatorname{span}(b_1, ..., b_r)$, also ist $(b_1, ..., b_{r-1})$ auch ein Erzeugendensystem von V.

   Wir wiederholen diesen Schluß nun so lange, bis wir zu einem Erzeugendensystem $b_1, ..., b_n$ gelangt sind, das linear unabhängig ist. Das ist wegen $b_1 \neq 0$ $(i = 1, ..., r)$ und 1. in Lemma 5.7 spästens der Fall, wenn $n = 1$. Die gesuchte Basis ist dann $(b_1, ..., b_n)$.

□

Lemma 5.11. *Seien V, W zwei K-Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Dann ist f genau dann injektiv, wenn $\ker(f) = \{0\}$.*

Beweis. "$\Rightarrow$": $v \in \ker(f) \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) = f(0) \Rightarrow v = 0$, wobei wir zunächst die Linearität und dann die angenommene Injektivität von f verwendet haben.

"$\Leftarrow$": $f(v) = f(w) \Leftrightarrow f(v - w) = 0 \Leftrightarrow v - w \in \ker(f)$ dank der Linearität von f. In diesem Fall folgt aber aus der Annahme $\ker(f) = \{0\}$, dass $v - w = 0$, also $v = w$ sein muss. □

Mit Lemma 5.11 können wir folgende interessante Aussage in <u>endlichdimensionalen Vektorräumen</u> zeigen.

Behauptung 5.12. *Seien V, W zwei K-Vektorräume, $f : V \to W$ linear und $b_1, ..., b_n$ eine Basis von V. Dann gelten folgende Aussagen.*

1. *f injektiv $\Leftrightarrow f(b_1), ..., f(b_n)$ linear unabhängig in W*

2. *f surjektiv $\Leftrightarrow f(b_1), ..., f(b_n)$ Erzeugendensystem von W*

3. *f bijektiv $\Leftrightarrow f(b_1), ..., f(b_n)$ Basis von W*

Beweis. Teil der Zentralübung.

1. Wegen der Linearität gilt $\sum_{j=1}^n \lambda_j f(b_j) = f(\sum_{j=1}^n \lambda_n b_n)$. Wir verwenden im Folgenden Lemma 5.11.

   "$\Rightarrow$": Da f injektiv ist und $b_1, ..., b_n$ eine Basis bildet (und damit insbesondere linear unabhängig ist), folgt

   $$\sum_{j=1}^n \lambda_j f(b_j) = f(\sum_{j=1}^n \lambda_n b_n) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0 \,.$$

   Dies zeigt, dass auch $f(b_1), ..., f(b_n)$ linear unabhängig sein muss.

   "$\Leftarrow$": Wegen der Linearität von f gilt immer, dass $0 \in \ker(f)$. Es verbleibt zu zeigen, dass $(a \in \ker(f) \Rightarrow a = 0)$. Sei also $a \in \ker(f)$. Da $b_1, ..., b_n$ eine Basis bildet, gibt es eindeutige $\mu_1, ..., \mu_n \in K$, sodass $a = \sum_{j=1}^n \mu_j b_j$. Daraus folgt $0 = f(a) = f(\sum_{j=1}^n \mu_j b_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j f(b_j)$. Per Voraussetzung (der linearen Unabhängigkeit der $f(b_1), ..., f(b_n)$), muss dann $\mu_1 = ... = \mu_n = 0$ sein. Das zeigt $a = 0$ wie behauptet.

2. "$\Rightarrow$": Angenommen f ist surjektiv. Dann gibt es für jedes $w \in W$ ein $v \in V$, sodass $f(v) = w$. Da $b_1, ..., b_n$ eine Basis, also insbesondere ein Erzeugendensystem von V bildet, gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, sodass $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$. Aus der Linearität von f folgt

   $$w = f(v) = f(\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(b_j) \,,$$

   was zeigt, dass $f(b_1), ..., f(b_n)$ ein Erzeugendensystem in W bildet.

   "$\Leftarrow$": Angenommen $f(b_1), ..., f(b_n)$ bildet ein Erzeugendensystem in W. Dann gibt es für beliebiges $w \in W$ Koeffizienten $\mu_1, ..., \mu_n$, sodass $w = \sum_{j=1}^n \mu_j f(b_j) = f(\sum_{j=1}^n \mu_j b_j)$. Dies zeigt aber insbesondere, dass f surjektiv ist, da wir ein $v \in V$, nämlich $v = \sum_{j=1}^n \mu_j b_j$, gefunden haben, für das $w = f(v)$ gilt.

3. Folgt aus (1) und (2).

□

Lemma 5.13. *Seien V ein K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, ..., b_n \in V$. Sei $(e_1, ..., e_n)$ die Standardbasis von K^n. Dann gilt*

$$b_1, ..., b_n \textit{ Basis von } V \Rightarrow \exists\, f : K^n \to V \textit{ linear und bijektiv mit } f(e_j) = b_j \,\forall\, j = 1, ..., n \,.$$

Beweis. Wir definieren

$$f : K^n \to V \,, \quad K^n \ni \lambda \mapsto f(\lambda) := \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \,.$$

Dann ist f offenbar linear (nachprüfen!) und es gilt $f(e_j) = \sum_{\ell=1}^n \delta_{j,\ell} b_\ell = b_j$ für alle $j = 1, ..., n$.

Weiter ist f injektiv, denn $f(\lambda) = 0$ ist äquivalent zu $\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j = 0$ (siehe Lemma 5.11). Aus der linearen Unabhängigkeit der $b_1, ..., b_n$ folgt daraus $\lambda = 0$, sprich $\ker(f) = 0$.

Schließlich ist f surjektiv, denn $b_1, ..., b_n$ ist ein Erzeugendensystem von V. □

Lemma 5.14. *Seien V, W zwei K-Vektorräume und $f : V \to W$ linear und bijektiv. Dann ist auch $f^{-1} : W \to V$ linear und bijektiv.*

Lemma 5.15. *Folgende Aussagen gelten.*

(a) $f : X \to Y$ bijektiv $\Leftrightarrow$ f besitzt eine Umkehrabbildung.

(b) $f : X \to Y$ bijektiv $\Rightarrow$ f^{-1} bijektiv und $(f^{-1})^{-1} = f$.

Beweis. Analysis 1 (hoffentlich). □

Beweis von Lemma 5.14. Die Bijektivität von f^{-1} folgt aus Teil (b) des vorigen Lemmas. Nun zur Linearität von f^{-1}. Seien also $w_1, w_2, w \in W$ und $\lambda \in K$. Dann folgen aus der Linearität von f sowohl

$$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(f(f^{-1}(w_1)) + f(f^{-1}(w_2))) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)\,,$$

als auch

$$f^{-1}(\lambda w) = f^{-1}(\lambda f(f^{-1}(w))) = f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(w))) = \lambda f^{-1}(w)$$

was zu zeigen war. □

Definition 5.16. Zwei K-Vektorräume V und W heißen *isomorph* zueinander, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V \to W$ gibt.

Definition 5.17 (Satz und Definition der Dimension eines Vektorraums)**.** Jeder endlich erzeugte Vektorraum V besitzt eine Basis (Satz IV.12 im Skript, mittels Zorn oder Auswahlaxiom). Falls es mehrere gibt, so haben sie alle dieselbe Zahl von Elementen. Diese Zahl wird mit $\dim(V)$, der *Dimension von* V bezeichnet. Weiter bezeichnen wir endlich erzeugte Vektrräume auch als *endlichdimensional*.

Beispiel 5.18. $\dim(\{0\}) = 0$ und $\dim(K^n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus der Definition der Dimension und der Tatsache, dass es für jeden endlich erzeugten Vektorraum V mit $\dim(V)$ und beliebiger Basis $b_1, ..., b_n$ eine lineare Abbildung gibt, die die Einheitsbasis von K^n in $b_1, ..., b_n$ überführt, folgt unmittelbar

Satz 5.19. *Jeder K-Vektorraum V mit $\dim(V) = n$ ist isomorph zu K^n.*

Beweis. Folgt aus Lemma 5.13 und Definition/Satz 5.17. □

Satz 5.20 (Basisergänzungssatz)**.** *Seien V ein K-Vektorraum mit einer Basis $b_1, ..., b_n$ und seien $a_1, ..., a_r$ mit $\mathbb{N} \in r \leq n$ linear unabhängige Vektoren. Dann gibt es $\{a_{r+1}, ..., a_n\} \in \{b_1, ..., b_n\}$, sodass auch $\{a_1, ..., a_n\}$ eine Basis von V ist.*

[Knapp ausgedrückt: linear unabhängige Vektoren $a_1, ..., a_r$ lassen sich durch passende Vektoren aus einer vorhandenen Basis zu einer neuen Basis ergänzen.]

Bemerkung 5.21. Im Fall $r = n$ besagt der Satz, dass $a_1, ..., a_n$ eine Basis ist. Es ist üblich, diesen Fall einzuschließen, obwohl zu $a_1, ..., a_n$ keine weiteren Basiselemente hinzukommen.

Beweis.

1. 1. Fall: Für alle $j \in \{1, ..., n\}$ ist $b_j \in \operatorname{span}(a_1, ..., a_r)$.

   In diesem Fall gilt $\operatorname{span}(b_1, ..., b_n) \subseteq \operatorname{span}(a_1, ..., a_r)$, sprich $a_1, ..., a_r$ ist notwendigerweise ein Erzeugendensystem von V. Wegen der linearen Unabhängigkeit der $a_1, ..., a_r$ ist damit $a_1, ..., a_r$ eine Basis und nach Definition/Satz 5.17 folgt $r = n$.

2. 2. Fall: Es gibt $j \in \{1, ..., n\}$ für das $b_j \notin \operatorname{span}(a_1, ..., a_r)$.

   Wir setzen $a_{r+1} := b_j$. Nach 4. in Lemma 5.7 sind $a_1, ..., a_{r+1}$ linear unabhängig. Durch fortgesetzte Wiederholung finden wir (unter Hinzunahme geeigneter b_j), dass $a_1, ..., a_{r+m}$ mit $m \in \mathbb{N}$ linear unabhängig ist und es gilt $b_1, ..., b_n \in \operatorname{span}(a_1, ..., a_{r+m})$. Wie im 1. Fall folgt daraus, dass $a_1, ..., a_{r+m}$ eine Basis ist. Also ist $r + m = n$ und insbesondere $r < n$.

□

Der Basisauswahlsatz und der Basisergänzungssatz erlaubt den Beweis folgender Aussage für endlich erzeugte Vektorräume.

Satz 5.22. *Seien V ein K-Vektorraum mit $n = \dim(V) \in \mathbb{N}$ und $b_1, ..., b_n \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $b_1, ..., b_n$ bildet eine Basis.

(b) $b_1, ..., b_n$ *sind linear unabhängig.*

(c) $b_1, ..., b_n$ *bildet ein Erzeugendensystem.*

Beweis.
- (a) $\Rightarrow$ (b) und (c) ist offenbar.
- Wegen des Basisergänzungssatzes 5.20 mit $r = n$, folgt (b) $\Rightarrow$ (a).
- Der Basisauswahlsatz 5.10 und Definition/Satz 5.17 implizieren (c) $\Rightarrow$ (a).

$\square$

Satz 5.23. *Sei* V *ein endlich erzeugter* K*-Vektorraum und* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann ist* U *endlich erzeugt und es gilt* $\dim(U) \leq \dim(V)$*.*

Beweis. Teil der Zentralübung.

OBdA seien $U, V \neq \{0\}$. Für jede linear unabhängige Aufzählung $u_1, ..., u_r \in U \subseteq V$ gilt nach dem Basisergänzungssatz (Satz 5.20) $r \leq n := \dim(V)$. Da $U \neq \{0\}$ können wir daher linear unabhängige $u_1, ..., u_r \in U$ mit *maximalem* $r \in \{1, ..., n\}$ finden.

Wir behaupten nun, dass jedes beliebige $u \in U$ ein Element von $\mathrm{span}(u_1, ..., u_r)$ ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es $u_{r+1} \in U$ mit $u_{r+1} \notin \mathrm{span}(u_1, ..., u_r)$. Nach (4) in Lemma 5.7 wäre dann aber auch $u_1, ..., u_{r+1}$ linear unabhängig, was der geforderten Maximalität von r widerspricht.

Damit haben wir gezeigt, dass $u_1, ..., u_r$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis von U bildet. Per Definition ist $\dim(U) = r$ und wegen $\dim(U) = r \leq n = \dim(V)$ folgt die Aussage. $\square$

Die Existenz eines *maximalen* $r \in \{1, ..., n\}$ ist durch das *Zornsche Lemma* gesichert. Dieses ist ein wichtiges Beweismittel beim Studium unendlicher Mengen und wird beispielsweise benutzt um zu zeigen, dass jeder K-Vektorraum eine Basis besitzt. Es ist äquivalent zum Auswahlaxiom, siehe bspw. **Wiki** für eine Einführung.

Definition 5.24. Sei $\mathbf{S}$ eine Menge von nichtleeren Mengen. Dann heißt F eine *Auswahlfunktion* für $\mathbf{S}$, falls F jedem Element $X \in \mathbf{S}$ ein Element von X zuordnet, sprich F hat Definitionsbereich $\mathbf{S}$ und es gilt

$$\forall\, X \in \mathbf{S} : \; F(X) \in X\,.$$

Axiom 5.25 (Auswahlaxiom)**.** Für jede Menge nichtleerer Mengen gibt es mindestens eine Auswahlfunktion.

Beispiel 5.26. Sei $\mathbf{S} = \{\{0, 2\}, \{1, 2, 5, 7\}, \{4\}\}$. Die auf $\mathbf{S}$ definierte Funktion

$$F(\{0, 2\}) = 2\,, \quad F(\{1, 2, 5, 7\}) = 2\,, \quad F(\{4\}) = 4$$

definierte Funktion ist eine Auswahlfunktion.

Um das Zornsche Lemma zu formulieren, brauchen wir noch folgende Begriffe.

Definition 5.27. Sei $\mathbf{S}$ ein nicht-leeres Mengensystem, sprich eine Menge von Mengen.

Eine nicht-leere Teilmenge $\mathbf{K}$ von $\mathbf{S}$ heißt *Kette/total geordnete Teilmenge*, wenn die Aussage

$$\forall\, M_1, M_2 \in \mathbf{K} \Rightarrow (M_1 \subseteq M_2 \;\vee M_2 \subseteq M_1)$$

gilt.

Eine Menge $M \in \mathbf{S}$ heißt *maximales Element von* $\mathbf{S}$, wenn die Aussage

$$(N \in \mathbf{S} \;\wedge\; M \subseteq N) \Rightarrow M = N$$

gilt.

Das Lemma von Zorn garantiert die Existenz eines maximalen Elements in einem Mengensystem $\mathbf{S}$, wenn für jede Kette $\mathbf{K}$ auch die Vereinigungsmenge $\bigcup\{K : K \in \mathbf{K}\}$, die aus allen Mengen der Kette besteht, wieder im Mengensystem $\mathbf{S}$ enthalten ist.

Lemma 5.28 (Zorn). *Sei* $\mathbf{S}$ *ein Mengensystem. Wenn für jede Kette* $\mathbf{K}$ *gilt, dass*

$$\bigcup\{K : K \in \mathbf{K}\} \in \mathbf{S}\,,$$

dann besitzt $\mathbf{S}$ *ein maximales Element.*

[Allgemeiner: Jede nichtleere, halbgeordnete Menge (hier das Mengensystem $\mathbf{S}$*), in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.]*

Satz 5.29. *Sei* M *eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums* V *über einem Körper* $\mathbb{K}$*. Dann gibt es eine Basis* B *von* V *mit* $M \subseteq B$*.*

Beweis. Angenommen zunächst, dass V endlich erzeugt wäre mit endlichem Erzeugendemsystem $E \subseteq V$. Wir entfernen dann solange Vektoren aus E bis E kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn wir den letzten so entfernten Vektor wieder hinzufügen, erhalten wir ein minimales Erzeugendensystem, dass nach der Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (b) in Hausaufgabe K5.4[1] eine Basis ist. (Dieses Verfahren ist konstruktiv und ermöglicht es, aus einem endlichen Erzeugendensystem eine Basis zu konstruieren.)

Angenommen nun, V sei nicht endlich erzeugt. Dann bezeichne $\mathbf{S}$ das System aller linear unabhängigen Teilmengen T von V mit $M \subseteq T$. Wegen $M \in \mathbf{S}$ ist $\mathbf{S}$ nicht leer. Weiter sei $\mathbf{K}$ eine beliebige Kette von Teilmengen T aus $\mathbf{S}$, und $W = \bigcup\{T | T \in \mathbf{K}\}$ ihre Vereinigungsmenge.

Wäre W nicht linear unabhängig, dann enthielte W eine endliche Teilmenge $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_r$ von Vektoren aus V, die linear abhängig wären. Zu jedem $\mathbf{w}_j$ gibt es eine Teilmenge $T_j \in \mathbf{K}$ mit $\mathbf{w}_j \in T_j$ für $j = 1, 2, ..., r$. Da $\mathbf{K}$ eine Kette ist, existiert unter diesen endlich vielen Mengen eine Teilmenge – etwa T_1 –, die alle anderen enthält. Also gilt $\mathbf{w}_j \in T_1$ für $j = 1, 2, ..., r$, was der linearen Unabhängigkeit von $T_1 \in \mathbf{S}$ widerspricht. Daher ist W linear unabhängig über $\mathbb{K}$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es in $\mathbf{S}$ ein maximales Element B, sprich B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V. (Das bedeutet, dass B linear unabhängig ist und für alle $v \in V \setminus B$ die Vereinigungsmenge $B \cup \{v\}$ linear abhängig ist.) Also ist B eine Basis von V nach der Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (d) in Hausaufgabe K5.4[2] mit $M \subseteq B$. □

Korollar 5.30. *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper. Dann besitzt jeder* $\mathbb{K}$*-Vektorraum eine Basis.*

Beweis. Wir verwenden vorigen Satz mit $M = \emptyset$. □

[1] Es gilt: B Basis von $V \Leftrightarrow \operatorname{span}(B) = V$ und für alle $w \in B$ gilt $\operatorname{span}(B \setminus \{w\}) \subsetneq V$.

[2] Es gilt: B Basis von $V \Leftrightarrow B$ ist maximal linear unabhängig.

6 6. Tutoriumsblatt (7. Dezember 2021)

6.1 Aufgaben

Aufgabe 6.1. Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}$ und den zugehörigen Vektorraum (Übungsaufgabe!) der Polynome über $\mathbb{R}$, definiert durch

$$\mathbb{F}[X] := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}_0} |\, a_i \neq 0 \text{ für endlich viele } i \in \mathbb{N}_0\}\,,$$

wobei X eine abstrakte Unbestimmte ist. Formell wird die Abbildung/Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{F}[X]$ mit $p(X) := \sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_i X^i$ identifiziert. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $\tau_n := (0, 0, ..., 1, 0, ...)$ als die Folge, die eine Eins auf der n-ten Stelle sitzen hat und sonst nur Nulleinträge besitzt. (Formell wird also τ_n mit $\tau_n(X) := X^n$ identifiziert.) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\tau_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Basis von $\mathbb{F}[X]$ ist.

<u>Hinweis:</u> Mit der obigen formellen Identifikation ist $\mathbb{F}[X] = \{\sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_i X^i |\, (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}_0}, a_i \neq 0 \text{ für endlich viele } i \in \mathbb{N}_0\}$.

Aufgabe 6.2. (a) Sei $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ und $U := \operatorname{span}(\sin, \cos, f, g)$ der darin aufgespannte $\mathbb{C}$-Untervektorraum bestehend aus den Funktionen

$$\begin{aligned} \sin &: \mathbb{R} \to \mathbb{C} & \cos &: \mathbb{R} \to \mathbb{C} & f &: \mathbb{R} \to \mathbb{C} & g &: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sin(x) & x &\mapsto \cos(x) & x &\mapsto \mathrm{e}^{ix} & x &\mapsto x^2\mathrm{e}^{ix}\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\dim(U)$.

(b) Sei $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich selbst und zu $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto f_n(x) := \cos(nx)$. Zeigen Sie, dass $\{f_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig in V ist.

Aufgabe 6.3. Seien V, W zwei K-Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Dann ist f genau dann injektiv, wenn $\ker(f) = \{0\}$.

Aufgabe 6.4. Seien V, W zwei K-Vektorräume, $f : V \to W$ linear und $b_1, ..., b_n$ eine Basis von V. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) f injektiv $\Leftrightarrow f(b_1), ..., f(b_n)$ linear unabhängig in W

(b) f surjektiv $\Leftrightarrow f(b_1), ..., f(b_n)$ Erzeugendensystem von W

(c) f bijektiv $\Leftrightarrow f(b_1), ..., f(b_n)$ Basis von W

Aufgabe 6.5. Seien V ein K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, ..., b_n \in V$. Sei $(e_1, ..., e_n)$ die Standardbasis von K^n. Dann gilt

$$b_1, ..., b_n \text{ Basis von } V \Rightarrow \exists\, f : K^n \to V \text{ linear und bijektiv mit } f(e_j) = b_j \,\forall\, j = 1, ..., r\,.$$

6.2 Lösungen

Lösung 6.1. Wir zeigen als Erstes, dass $\operatorname{span}(\{\tau_n : n \in \mathbb{N}_0\}) = \mathbb{F}[X]$. Dies folgt unmittelbar aus $\mathbb{F}[X] = \{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell : n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}\}$ und der Definition von span, denn $\operatorname{span}(\{\tau_n : n \in \mathbb{N}_0\}) = \{\sum_{\ell=0}^{n} \lambda_\ell \cdot \tau_\ell : n \in \mathbb{N}_0, \lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{F}\}$ und der formellen Identifikation von $\sum_{\ell=0}^{n} \lambda_\ell \cdot \tau_\ell$ mit $\sum_{\ell=0}^{n} \lambda_\ell X^\ell$.

Wir zeigen nun noch, dass die Menge $\{\tau_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig ist. Angenommen also es gilt $\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \tau_\ell = 0$ mit $a_\ell \in \mathbb{F}$. Daraus folgt aber, dass $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$ sein muss. Dies sieht man bspw., indem man das Polynom $\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \tau_\ell$ als Folge $(a_0, a_1, ..., a_n, 0, ...) = a_0 \cdot (1, 0, ...) + a_1(0, 1, 0, ...) + ... + a_n(0, ..., 0, 1, 0, ...) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}_0}$ auffasst, wobei die Folge mit Koeffizient a_j lediglich eine 1 an der j-ten Stelle stehen hat und sonst nur Nulleinträge hat. Daraus ist die lineare Unabhängigkeit (sowie die Tatsache, dass $\{\tau_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Erzeugendensystem bildet) ersichtlich.

Lösung 6.2. (a) Da $f(x) = \mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, folgt $U = \operatorname{span}(\sin, \cos, g)$, sprich $\{\sin, \cos, g\}$ erzeugt U. Wir behaupten nun, dass diese Menge auch noch linear unabhängig ist, womit gezeigt wäre, dass $\dim(U) = 3$ ist.

Seien also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ und angenommen

$$\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 x^2 \mathrm{e}^{ix} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.1}$$

Wir behaupten, dass daraus $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ folgt. In der Tat ist $\lambda_2 = 0$, was man durch Setzen von $x = 0$ in (6.1) sieht, denn dann gilt $\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 0^2 \cdot 1 = 0$. Andererseits folgt durch Setzen von $x = 2\pi$, dass $\lambda_1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (2\pi)^2 \lambda_3 = 0$, sprich $\lambda_3 = 0$. Schließlich folgt auch $\lambda_1 = 0$, denn für $x = \pi/2$ ist $\lambda_1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (\pi/2)^2 \mathrm{e}^{i\pi/2} = 0$. Dies schließt den Beweis.

(b) Wir zerlgen das Problem in drei Teile.

Schritt 1: Sei $\tilde{V} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$ der Raum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ und $\tilde{f}_n \in \tilde{V}$ durch $\tilde{f}_n(x) := \mathrm{e}^{ixn}$ definiert. Wir behaupten, dass $\mathcal{L} := \operatorname{span}\{\tilde{f}_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig in $\tilde{V}$ ist.

Beweis. Seien $\tilde{f}_{n_1}, ..., \tilde{f}_{n_j} \in \mathcal{L}$ und $\lambda_{n_1}, ..., \lambda_{n_j} \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_{n_1} \tilde{f}_{n_1} + ... + \lambda_{n_j} \tilde{f}_{n_j} = 0$. OBdA (z.B. indem wir einige der Koeffizienten $\lambda_{n_k} \equiv 0$ setzen), dürfen wir

$$\lambda_0 \tilde{f}_0 + ... + \lambda_n \tilde{f}_n = 0$$

annehmen, sprich

$$\lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{e}^{ix} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2ix} + ... + \lambda_n \mathrm{e}^{inx} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Wir zeigen nun, dass $\lambda_0 = ... = \lambda_n = 0$ ist. Dazu argumentieren wir per Widerspruch und nehmen an, dass mindestens eines der $\lambda_j \neq 0$ ist. (OBdA könnten wir $\lambda_0 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ und $\lambda_1 \neq 0$ oder alle $\lambda_j \neq 0$ annehmen). Dann garantiert verwenden wir den Fundamentalsatz der Algebra, dass das Polynom $p(\mathrm{e}^{ix}) := \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \mathrm{e}^{ijx}$ genau n (nicht notwendigerweise verschiedene) Nullstellen $w_1, w_2, ..., w_n \in \mathbb{C}$ besitzt (und die Faktorisierung $p(z) = (z - w_1)...(z - w_n)$ mit $z = \mathrm{e}^{ix}$ gilt). Das bedeutet

$$p(\mathrm{e}^{ix}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{ix} \in \{w_1, ..., w_n\}\,.$$

Unsere Annahme "$p(\mathrm{e}^{ix}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$" impliziert damit $\{\mathrm{e}^{ix} : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \{w_1, ..., w_n\}$, was offenbar widersprüchlich ist, da die Menge auf der rechten Seite der Mengeninklusion n Elemente und die Menge auf der linken Seite der Inklusion (überabzählbar) unendlich viele Elemente besitzt. □

Schritt 2: Wir behaupten, dass die Menge $\mathcal{Z} := \{\tilde{f}_n : n \in \mathbb{Z}\}$ linear unabhängig in $\tilde{V}$ ist.

Beweis. Seien $\tilde{f}_{n_1}, ..., \tilde{f}_{n_j} \in \mathcal{Z}$ und $\lambda_{n_1}, ..., \lambda_{n_j} \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_{n_1}\tilde{f}_{n_1} + ... + \lambda_{n_j}\tilde{f}_{n_j} = 0$. OBdA nehmen wir wieder $n_1 < n_2 < ..., n_j$ annehmen. Falls $n_1 \geq 0$ folgt $\lambda_{n_1} = ... = \lambda_{n_j} = 0$ nach Schritt 1. Falls $n_1 < 0$ multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung $\lambda_{n_1}\tilde{f}_{n_1} + ... + \lambda_{n_j}\tilde{f}_{n_j} = 0$ mit der Funktion $z \mapsto \mathrm{e}^{-n_1 z}$. Daraus erhalten wir die Gleichung $\lambda_{n_1} + \lambda_{n_2}\tilde{f}_{n_2 - n_1} + ... + \lambda_{n_j}\tilde{f}_{n_j - n_1} = 0$, welche wieder $\lambda_{n_1} = ... = \lambda_{n_j} = 0$ impliziert wegen Schritt 1 und der Tatsache, dass $n_\ell - n_1 \geq 0$ für alle $\ell = 2, 3, ...j$. □

Schritt 3: Wir behaupten schließlich, dass $\{f_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig in $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, dem Raum aller reellwertigen Abbildungen ist.

Beweis. Seien $\lambda_{n_1}, ..., \lambda_{n_j} \in \mathbb{R}$ und angenommen $\lambda_{n_1} f_{n_1} + ... \lambda_{n_j} f_{n_j} = 0$. Da $f_{n_\ell} = (\tilde{f}_{n_\ell} + \tilde{f}_{-n_\ell})/2$ ist, ist die Annahme gleichbedeutend zu

$$\lambda_{n_1}(\tilde{f}_{n_1} + \tilde{f}_{-n_1}) + ... + \lambda_{n_j}(\tilde{f}_{n_j} + \tilde{f}_{-n_j}) = 0$$

sprich

$$\lambda_{n_1}\tilde{f}_{n_1} + \lambda_{n_1}\tilde{f}_{-n_1} + ... + \lambda_{n_j}\tilde{f}_{n_j} + \lambda_{n_j}\tilde{f}_{-n_j} = 0\,.$$

Aus Schritt 2 folgt $\lambda_{n_1} = ... = \lambda_{n_j} = 0$ wie behauptet. □

Lösung 6.3. “$\Rightarrow$”: $v \in \ker(f) \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) = f(0) \Rightarrow v = 0$, wobei wir zunächst die Linearität und dann die angenommene Injektivität von f verwendet haben.

“$\Leftarrow$”: $f(v) = f(w) \Leftrightarrow f(v - w) = 0 \Leftrightarrow v - w \in \ker(f)$ dank der Linearität von f. In diesem Fall folgt aber aus der Annahme $\ker(f) = \{0\}$, dass $v - w = 0$, also $v = w$ sein muss.

Lösung 6.4.

1. Wegen der Linearität gilt $\sum_{j=1}^n \lambda_j f(b_j) = f(\sum_{j=1}^n \lambda_n b_n)$. Wir verwenden im Folgenden die Aussage (f injektiv $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$).

   “$\Rightarrow$”: Da f injektiv ist und $b_1, ..., b_n$ eine Basis bildet (und damit insbesondere linear unabhängig ist), folgt

   $$\sum_{j=1}^n \lambda_j f(b_j) = f(\sum_{j=1}^n \lambda_n b_n) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0\,.$$

   Dies zeigt, dass auch $f(b_1), ..., f(b_n)$ linear unabhängig sein muss.

   “$\Leftarrow$”: Wegen der Linearität von f gilt immer, dass $0 \in \ker(f)$. Es verbleibt zu zeigen, dass ($a \in \ker(f) \Rightarrow a = 0$). Sei also $a \in \ker(f)$. Da $b_1, ..., b_n$ eine Basis bildet, gibt es eindeutige $\mu_1, ..., \mu_n \in K$, sodass $a = \sum_{j=1}^n \mu_j b_j$. Daraus folgt $0 = f(a) = f(\sum_{j=1}^n \mu_j b_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j f(b_j)$. Per Voraussetzung (der linearen Unabhängigkeit der $f(b_1), ..., f(b_n)$), muss dann $\mu_1 = ... = \mu_n = 0$ sein. Das zeigt $a = 0$ wie behauptet.

2. “$\Rightarrow$”: Angenommen f ist surjektiv. Dann gibt es für jedes $w \in W$ ein $v \in V$, sodass $f(v) = w$. Da $b_1, ..., b_n$ eine Basis, also insbesondere ein Erzeugendensystem von V bildet, gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, sodass $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$. Aus der Linearität von f folgt

   $$w = f(v) = f(\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(b_j)\,,$$

   was zeigt, dass $f(b_1), ..., f(b_n)$ ein Erzeugendensystem in W bildet.

   “$\Leftarrow$”: Angenommen $f(b_1), ..., f(b_n)$ bildet ein Erzeugendensystem in W. Dann gibt es für beliebiges $w \in W$ Koeffizienten $\mu_1, ..., \mu_n$, sodass $w = \sum_{j=1}^n \mu_j f(b_j) = f(\sum_{j=1}^n \mu_j b_j)$. Dies zeigt aber insbesondere, dass f surjektiv ist, da wir ein $v \in V$, nämlich $v = \sum_{j=1}^n \mu_j b_j$, gefunden haben, für das $w = f(v)$ gilt.

3. Folgt aus (1) und (2).

Lösung 6.5. Wir definieren

$$f : K^n \to V\,, \quad K^n \ni \lambda \mapsto f(\lambda) := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j\,.$$

Dann ist f offenbar wohldefiniert und linear und es gilt $f(e_j) = \sum_{\ell=1}^{n} \delta_{j,\ell} b_\ell = b_j$ für alle $j = 1, ..., n$.

Weiter ist f injektiv, denn $f(\lambda) = 0$ ist äquivalent zu $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j = 0$. Aus der linearen Unabhängigkeit der $b_1, ..., b_n$ folgt daraus $\lambda = 0$, sprich $\ker(f) = \{0\}$ (siehe Lemma 5.11).

Schließlich ist f surjektiv, denn $b_1, ..., b_n$ ist ein Erzeugendensystem von V.

6.3 Lineare Abbildungen in Vektorräumen

6.3.1 Inverse Matrix

Definition 6.1 (Definition und Lemma (inverse Matrix))**.** Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Dann heißt $A \in K^{n\times n}$ genau dann *invertierbar*, wenn es ein $A' \in K^{n\times n}$ gibt, sodass $AA' = A'A = \mathbf{1}_n$. In dem Fall ist A' eindeutig bestimmt und heißt *inverse Matrix zu* A und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Beweis. 1. Wir betrachten $GL(n, K) := \{A \in K^{n\times n} : A \text{ invertierbar}\}$ ("general linear group"). Wir zeigen, dass $GL(n, K)$ eine Gruppe bzgl. Matrizenmultiplikation ist. Die Assoziativität und Existenz eines neutralen und inversen Elements sind klar. Insbesondere gehört auch das zu einem $A \in GL(n, K)$ inverse Element $A' \in K^{n\times n}$ wieder zu $GL(n, K)$, denn das zu A' gehörende inverse Element ist gerade A, mit welchem wir begonnen hatten. Wir zeigen nun die Wohldefiniertheit. Klarerweise ist auch $A \cdot B \in K^{n\times n}$ für $A, B \in K^{n\times n}$, sprich es verbleibt zu zeigen, dass auch AB invertierbar ist. Wir behaupten, dass $B'A'$ das linksinverse Element zu AB ist. In der Tat gilt $B'A'AB = B'\mathbf{1}_n B = B'B = \mathbf{1}_n$ wie behauptet. Analog zeigt man $ABB'A' = \mathbf{1}_n$, sprich $B'A'$ ist auch das rechtsinverse Element zu AB.

2. Aus der eindeutigen Bestimmtheit (folgt aus Gruppeneigenschaft, wie wir in Aufgabe 2.4 gesehen hatten) des inversen Elements in $GL(n, K)$ folgt $A^{-1} = A'$.

□

(Erinnere: für $A \in K^{n\times n}$ ist die Transponierte A^T durch $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ definiert.)

Lemma 6.2 (Rechenregeln für inverse Matrizen)**.** *Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(a) A, B invertierbar $\Rightarrow$ $A \cdot B$ invertierbar mit $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(b) A invertierbar $\Rightarrow$ A^{-1} invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$.

(c) A invertierbar $\Rightarrow$ A^T invertierbar mit $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis. (a) $A, B \in GL(n, K)$ und $GL(n, K)$ Gruppe $\Rightarrow$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(b) Folgt ebenfalls aus Tatsache, dass $GL(n, K)$ eine Gruppe ist.

(c) Wir verwenden $(AB)^T = B^T A^T$. Dann
$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}_n \Rightarrow (A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = \mathbf{1}_n^T = \mathbf{1}_n \Rightarrow A^T \in GL(n, K)$ mit $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

□

6.3.2 Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen

Die folgenden drei Matrizen heißen *Elementarmatrizen*. Es handelt sich dabei um quadratische Matrizen, die sich nur an wenigen Stellen von der Einheitsmatrix unterscheiden.

$$S_i(\lambda) = \text{diag}(1, 1, ..., \underbrace{\lambda}_{i\text{-te Stelle}}, 1, ..., 1) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

In der folgenden Matrix wird λ auf die i-te Zeile und j-te Spalte gesetzt

$$Q_i^j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & \lambda & & \\ & & & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(In dieser Darstellung ist bspw. $i < j$.)

Die folgende Matrix ist symmetrisch (sprich $A = A^T$) und es wird eine 1 auf die i-te Zeile und die j-te Spalte sowie die j-te Zeile und i-te Spalte gesetzt, wobei $i \neq j$

$$P_i^j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Wir untersuchen nun die Wirkungen dieser Matrizen auf $A \in K^{m \times n}$ in der Darstellung $A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, wobei $a^{(i)} \in K^n$ mit $i \in \{1, ..., m\}$ Spaltenvektoren und $a_j \in K^m$ mit $j \in \{1, ..., n\}$ Zeilenvektoren sind.

Zeilenumformungen

(Zu Hause nachrechnen..)

El. Matrix	Inverse	Matrizenmultiplikation	element. Zeilenumformung	Kürzel
$S_i(\lambda) \in K^{m\times m}$	$S_i(1/\lambda)$	$S_i(\lambda)\cdot A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda a^{(i)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$	Multipl. der i-ten Zeile mit λ	EZU I
$Q_i^j(\lambda) \in K^{m\times m}$	$Q_i^j(-\lambda)$	$Q_i^j(\lambda)\cdot A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(i)} + \lambda a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$	Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile	EZU II
$P_i^j \in K^{m\times m}$	P_i^j	$P_i^j \cdot A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(i)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$	Vertauschung der i-ten und der j-ten Zeile	EZU III

Spaltenumformungen

(Zu Hause nachrechnen..)

El. Matrix	Inverse	Matrizenmultiplikation	element. Zeilenumformung	Kürzel
$S_i(\lambda) \in K^{m\times m}$	$S_i(1/\lambda)$	$A \cdot S_i(\lambda) = (a_1, ..., \lambda a_i, ..., a_n)$	Multipl. der i-ten Spalte mit λ	ESU I
$Q_i^j(\lambda) \in K^{m\times m}$	$Q_i^j(-\lambda)$	$A \cdot Q_i^j(\lambda) = (a_1, ..., a_i + \lambda a_j, ..., a_n)$	Addition des λ-fachen der j-ten Spalte zur i-ten Spalte	ESU II
$P_i^j \in K^{m\times m}$	P_i^j	$A \cdot P_i^j = (a_1, ..., a_j, ..., a_i, ..., a_n)$	Vertauschung der i-ten und der j-ten Spalte	ESU III

6.3.3 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität linearer Abbildungen

Lemma 6.3. *Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, K ein Körper und $A \in K^{m\times n}$ mit $a_{11} \neq 0$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(a) Es existiert $G \in K^{m\times m}$ invertierbar und $\tilde{A} \in K^{(m-1)\times(n-1)}$, sodass

$$A = G \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

(b) Außerdem existieren invertierbare $G \in K^{m\times m}$ und $H \in K^{n\times n}$ und $\hat{A} \in K^{(m-1)\times(n-1)}$, sodass

$$A = G \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot H$$

Beweis. (a) EZU II liefern das Resultat, denn

$$G = \left[Q^1_m\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right)\cdot Q^1_{m-1}\left(-\frac{a_{m-1,1}}{a_{11}}\right)\cdot \ldots \cdot Q^1_2\left(-\frac{a_{2,1}}{a_{11}}\right)\right]^{-1}$$

[Die Anwendung von $Q^1_i(-\frac{a_{i,1}}{a_{11}})$ auf A bewirkt die Annullierung von a_{i1}.] Da jede einzelne Elementarmatrix invertierbar, ist G ebenfalls invertierbar (und natürlich wohldefiniert).

(b) Wir wenden ESU II und ESU I an und erhalten

$$H = \left[Q^2_1\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\cdot Q^3_1\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)\cdot \ldots \cdot Q^n_1\left(-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\cdot S\left(\frac{1}{a_{11}}\right)\right]^{-1}$$

wobei $S\left(\frac{1}{a_{11}}\right)$ eine Reskalierung auf 1 bewirkt.

□

Satz 6.4 (Äquivalenznormalform)**.** *Seien $n, m \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in K^{m\times n}$. Dann gibt es invertierbare Matrizen $G \in K^{m\times m}$ und $H \in K^{n\times n}$ und $r \in \{0, 1, ..., \min(m, n)\}$, sodass*

$$A = G \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in K^{m\times n}} H\,.$$

Bemerkung 6.5. Wir lassen explizit die Fälle $r = 0$, $r = m$ und $r = n$ zu, was zum Verschwinden von $\mathbf{1}_r$, bzw. der Nullzeilen oder Nullspalten führt.

Beweis. 1. Fall: $A = 0$: In diesem Fall gilt $r = 0$ und $A = \mathbf{1}_m \cdot 0 \cdot \mathbf{1}_n$.
2. Fall: $A \neq 0$:

(a) $a_{11} \neq 0$. Wende Teil (b) in Lemma 6.3 an.

(b) $a_{11} = 0$. Wegen $A \neq 0$ existiert mindestens ein Matrixelement $a_{ij} \neq 0$. Mit elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen vom Typ III erhält man, dass die Matrix $A' := P^1_i \cdot AP^1_j$ das Matrixelement $a'_{11} \neq 0$ besitzt. Nach Teil (b) in Lemma 6.3 gilt dann

$$A' = G' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot H'\,.$$

Unter Verwendung von $(P^1_i)^{-1} = P^1_i$ erhalten wir

$$A = P^1_i \cdot G' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot H' \cdot P^1_j\,.$$

Das Verfahren lässt sich mit der mittleren Matrix der rechten Seite fortsetzen, wenn $\hat{A} \neq 0$. (Im Fall $\hat{A} = 0$ ist die Äquivalenzform bereits gefunden). Damit gelangt man zu

$$A = \hat{G} \cdot \hat{\hat{G}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \hat{\hat{A}} & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \cdot \hat{\hat{H}} \cdot \hat{H}\,.$$

Die Fortsetzung dieser Vorgehensweise liefert die Behauptung.

□

Satz 6.6. *Seien $n, m \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $f : K^n \to K^m$ linear mit darstellender Matrix $A \in K^{m\times n}$. Dann gilt*

$$f \text{ bijektiv} \Leftrightarrow n = m \ \wedge \ A \text{ invertierbar}$$

Beweis. "$\Leftarrow$": Sei $A \in K^{n\times n}$ invertierbar. Dann besitzt $f : K^n \to K^n$ mit $f(x) = A \cdot x$ die Umkehrabbildung $f^{-1} : K^n \to K^n$ mit $f(x) = A^{-1} \cdot x$. Also ist f bijektiv nach Hausaufgabe K1.2.

$[f^{-1}(f(x)) = A^{-1} \cdot A \cdot x = x$ und $f(f^{-1}(x)) = A \cdot A^{-1} \cdot x = x$ für $x \in K^n$.]

"$\Rightarrow$": Sei $f : K^n \to K^m$ bijektiv mit darstellender Matrix $A \in K^{m\times n}$. Dann folgt aus Satz 6.4, dass es $G \in K^{m\times m}$ und $H \in K^{n\times n}$ invertierbar gibt, sodass

$$A = G \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H\,.$$

Somit sind die linearen Abbildungen $g : K^m \to K^m$ mit $g(x) = G \cdot x$ und $h : K^n \to K^n$ mit $h(x) = H \cdot x$ jeweils bijektiv, womit auch $\tilde{f} : K^n \to K^m$ mit $\tilde{f}(x) = g^{-1} \circ f \circ h^{-1}$ bijektiv ist. Die Abbildung $\tilde{f}$ besitzt die darstellende Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da $\tilde{f}$ bijektiv ist, kann diese Matrix aber keine Nullzeile und keine Nullspalte enthalten, denn

- ist die j-te Spalte eine Nullspalte, so folgt $\tilde{f}(e_j) = 0 = \tilde{f}(0)$, sprich $\tilde{f}$ wäre nicht injektiv $\Rightarrow$ Widerspruch.
- ist die i-te Zeile eine Nullzeile, so folgt $\tilde{f}_i(x) = 0$ für alle $x \in K^n$, sprich $e_i \notin \tilde{f}(K^n)$, womit $\tilde{f}$ nicht surjektiv wäre $\Rightarrow$ Widerspruch.

Daher folgt $r = m = n$ und $A = G \cdot \mathbf{1}_n H = G \cdot H$. Da G und H invertierbar sind, ist auch A invertierbar. □

Satz 6.7. *Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $f : K^n \to K^n$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(a) f ist injektiv

(b) f ist surjektiv

(c) f ist bijektiv

Beweis. Wir verwenden die Abbildung $\tilde{f} : K^n \to K^n$ aus dem Beweis von Satz 6.6. Ihre darstellende Matrix ist $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$, wobei die Fälle $r = 0$, $r = m$ und $r = n$ explizit zugelassen sind.

Wegen $\tilde{f} = g^{-1} \circ f \circ h^{-1}$ mit g, h bijektiv gelten

1. f injektiv $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ injektiv
2. f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ surjektiv

Wir zeigen nun die Aussage

$$\tilde{f} \text{ injektiv} \Rightarrow \tilde{f} \text{ bijektiv},$$

was (a) $\Rightarrow$ (c) zeigt. (Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) wird analog gezeigt und schließlich sind die Implikationen (c) $\Rightarrow$ (a) und (c) $\Rightarrow$ (b) offenbar.)

Angenommen also $\tilde{f}$ wäre injektiv. Dann kann (wie im Argument vom Beweis von Satz 6.6) die Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$ keine Nullspalte enthalten, womit $r = n$ sein muss. Da $m = n$ ist, folgt $r = m = n$ und damit, dass die Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$ auch keine Nullzeile enthalten kann. Somit ist $\mathbf{1}_n$ die darstellende Matrix von $\tilde{f}$, sprich $\tilde{f}$ ist bijektiv. □

Korollar 6.8. *Seien V, W zwei K-Vektorräume mit $\dim(V) = \dim(W) < \infty$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *f ist injektiv*
2. *f ist surjektiv*
3. *f ist bijektiv*

Beweis. Für $\dim(V) = \dim(W) = 0$ ist die Aussage klar. Falls $\dim(V) = \dim(W) \geq 1$, dann folgt die Aussage aus Satz 5.19 und der Tatsache, dass die Aussage für V und $W := K^{\dim(V)}$ gilt, siehe Satz 6.7. □

Korollar 6.9. *Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(a) A ist invertierbar.

(b) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ für alle $x \in K^n$, sprich die "homogene Gleichung" $A \cdot x = 0$ besitzt nur *die triviale Lösung $x = 0$.*

(c) $\forall\, b \in K^n\, \exists\, x \in K^n : A \cdot x = b$, sprich das lineare Gleichungssystem besitzt für jede rechte Seite mindestens *eine Lösung.*

(d) $\forall\, b \in K^n\, \exists^!\, x \in K^n : A \cdot x = b$, sprich das lineare Gleichungssystem besitzt für jede rechte Seite genau eine *eine Lösung.*

Bemerkung 6.10. Dieses Korollar beinhaltet bereits die *Fredholmsche Alternative:* Entweder besitzt die "homogene Gleichung" $A \cdot x = 0$ eine Lösung $x \neq 0$, oder $A \cdot x = b$ ist für jede rechte Seite b eindeutig lösbar.

Beweis. Betrachte $f : K^n \to K^n$ mit darstellender Matrix A, sprich $f(x) = A \cdot x$.

- (d) $\Leftrightarrow$ (a): (d) $\Leftrightarrow$ f bijektiv $\Leftrightarrow$ A invertierbar nach Satz 6.6
- (d) $\Leftrightarrow$ (b): (d) $\Leftrightarrow$ f bijektiv $\Leftrightarrow$ f injektiv nach Satz 6.7.

  Wir zeigen nun: f injektiv $\Leftrightarrow$ $(\forall\, x \in K^n : f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$

  "$\Rightarrow$": Da f injektiv ist, folgt aus der Gleichheit $f(x) = f(0)$, dass $x = 0$ sein muss.

  "$\Leftarrow$": $f(x) = f(x') \Leftrightarrow f(x - x') = 0 \Rightarrow x - x' = 0 \Leftrightarrow x = x'$, wobei wir zuerst die Linearität von f und im Anschluß die Voraussetzung "$(\forall\, x \in K^n : f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$" verwendet haben.
- (d) $\Leftrightarrow$ (c): (d) $\Leftrightarrow$ f bijektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv nach Satz 6.7 $\Leftrightarrow$ (c)

□

Korollar 6.11. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Dann ist $A \in K^{n \times n}$ bereits dann invertierbar, wenn es ein $B \in K^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot B = \mathbf{1}_n$ oder $B \cdot A = \mathbf{1}_n$ gilt. In diesem Fall ist $B = A^{-1}$.*

Beweis. 1. Fall: $A \cdot B = \mathbf{1}_n$:

Dann: $\forall\, b \in K^n : (AB) \cdot b = b \Rightarrow \forall b \in K^n : A(B \cdot b) = b \Rightarrow A$ invertierbar nach (c) $\Rightarrow$ (a) in Korollar 6.9.

Somit: $A \cdot B = \mathbf{1}_n \Rightarrow B = A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot \mathbf{1}_n = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$

2. Fall: $B \cdot A = \mathbf{1}_n$: Sei $Ax = 0$. Dann ist $x = \mathbf{1}_n x = B \cdot Ax = B \cdot 0 = 0$. Wegen (b) $\Rightarrow$ (a) in Korollar 6.9 ist daher A invertierbar.

Somit: $B \cdot A = \mathbf{1}_n \Rightarrow B = B \cdot A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}_n \cdot A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$. □

7 7. Tutoriumsblatt (14. Dezember 2021)

7.1 Aufgaben

Aufgabe 7.1. Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie, soweit möglich, die Matrixprodukte $A_i \cdot A_j$ mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 7.2. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(<u>Bemerkung:</u> Beweis vom kleinen Gauß.)

Aufgabe 7.3. Seien im $\mathbb{R}^3$ die Basen $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, sowie

$$A = \{(1, -1, 2), (2, 3, 7), (2, 3, 6)\} \quad \text{und}$$
$$B = \{(1, 2, 2), (-1, 3, 3), (-2, 7, 6)\}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Matrixdarstellung $\mathcal{M}_{B,A}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ der Einheitsmatrix $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{M}_{E,E}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ bezüglich der Basen A und B.

<u>Hinweis:</u> Sie dürfen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 & 0 \\ -12/5 & -2/5 & 1 \\ 13/5 & 3/5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 1/5 \\ -2/5 & -2 & 11/5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

verwenden.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$\vec{v} = 2 \cdot (1, -1, 2) + 9 \cdot (2, 3, 7) - 8 \cdot (2, 3, 6)$$

bezüglich der Basis B.

Aufgabe 7.4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n := \mathrm{span}(\{1, x, \ldots, x^n\}) \subset \mathbb{R}[x]$ mit der Basis $B_n := \{1, \ldots, x^n\}$ und

$$\mathcal{D}_n : V_n \to V_{n-1}, \ f \mapsto f'$$

der Ableitungshomomorphismus (Differentiation nach x).

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\mathcal{M}_{B_{n-1},B_n}(\mathcal{D}_n)$ von $\mathcal{D}_n$ bezüglich B_n und B_{n-1}.

(b) Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\mathcal{I}_n : V_{n-1} \to V_n$ gibt mit $\mathcal{D}_n \circ \mathcal{I}_n = \mathrm{id}_{V_{n-1}}$ und bestimmen Sie $\mathcal{M}_{B_n,B_{n-1}}(\mathcal{I}_n)$.

7.2 Lösungen

Lösung 7.1. Das Matrixprodukt $A \cdot B$ mit $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{r\times s}$ kann nur gebildet werden, wenn $n = r$, sprich, wenn die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist. Wir erhalten für die somit erlaubten Kombinationen

$$
\begin{aligned}
A_1 \cdot A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} , \\
A_2 \cdot A_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix} , \\
A_3 \cdot A_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (12) .
\end{aligned}
$$

Lösung 7.2. Wir induzieren über $n \in \mathbb{N}$ und stellen fest, dass die Behauptung für $n = 1$ wahr ist. Wir vollziehen nun den Induktionsschritt und nehmen an, dass die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ wahr ist und zeigen Sie für $n + 1$. Dazu rechnen wir

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} = A^n \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & n+\frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n+1 & n+\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= \ldots &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2} & \frac{(n+1)((n+1)-1)((n+2)-1)}{6} \\ 0 & 1 & n+1 & \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

wie behauptet.

Lösung 7.3. (a) Die Matrizen

$$
\mathcal{M}_E(U_A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_E(U_B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} ,
$$

welche als lineare Abbildungen $U_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $U_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bzgl. der Standardbasis dargestellt sind, führen $A \equiv \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ bzw. $B \equiv \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ in die kanonische Einheitsbasis über, sprich es gelten $U_A\vec{e}_j = \vec{a}_j$ und $U_B\vec{e}_j = \vec{b}_j$ für $j = 1, 2, 3$.

Wir versuchen zunächst, die Transformation von Matrizen unter Basiswechsel von einer anderen Perspektive aus zu verstehen.

Sei $\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} x_j\vec{e}_j$ ein Vektor, der durch die kanonische Basis ausgedrückt wird. Unser Ziel ist es die *Darstellung* von $\vec{x}$ in der Basis B zu erhalten, sprich wir wollen $\tilde{x}_j$ finden, sodass $\vec{x} = \sum_{j=1} x_j\vec{e}_j = \sum_{\ell=1}^{3} \tilde{x}_j\vec{b}_j = U_B \sum_{\ell=3} \tilde{x}_\ell\vec{e}_\ell$. Wir sehen also, dass wir die Koeffizienten $\tilde{x}_\ell$ *extrahieren* können, indem wir U_B^{-1} auf beiden Seiten anwenden. Dann gilt $\sum_{\ell=1}^{3} \tilde{x}_\ell\vec{e}_\ell = U_B^{-1}\vec{x}$. Stellen wir $\vec{x}$ als 3×1-Matrix bzgl. der Standardbasis dar, so können wir die rechte Seite ebenfalls als 3×1-Matrix darstellen, indem wir die Matrix $\mathcal{M}_E(U_B^{-1}) = \mathcal{M}_E(U_B)^{-1}$

mit $(x_1, x_2, x_3)^T$ (in Standardbasis dargestellt) multiplizieren. Die "j-te Komponente" des resultierenden Vektors, der in der Standardbasis ausgedrückt ist, ist dann gleich $\tilde{x}_j$. In Formeln ausgedrückt haben wir

$$\mathcal{M}_E(U_B)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} .$$

Wären wir umgekehrt gestartet, sprich wäre uns ein Vektor $\vec{y} = \sum_{j=1}^{3} y_j \vec{a}_j$ gegeben, so könnten wir seine Koordinaten $\tilde{y}_j$ bzgl. der kanonischen Einheitsbasis, sprich $\vec{y} = \sum_{\ell=1} \tilde{y}_\ell \vec{e}_\ell$ durch die Gleichheit $\sum_{j=1}^{3} y_j \vec{a}_j = U_A \sum_{j=1}^{3} y_j \vec{e}_j = \sum_{\ell=1}^{3} \tilde{y}_\ell \vec{e}_\ell$ finden, indem wir die Matrix $\mathcal{M}_E(U_A)$ (dargestellt in der kanonischen Basis) auf den Vektor $(y_1, y_2, y_3)^T$, verstanden als einen Vektor bzgl. der kanonischen Basis, anwenden. In Formeln ausgedrückt haben wir

$$\mathcal{M}_E(U_A) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix} .$$

Die Darstellung von $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{M}_E(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ in der Basis B, A ist also

$$\mathcal{M}_{B,A}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = (\mathcal{M}_E(U_B))^{-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M}_E(U_A) = \begin{pmatrix} 1 & 13/5 & 12/5 \\ 6 & 43/5 & 32/5 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix} ,$$

siehe Satz V.8. Um $\mathcal{M}_E(U_A)$ zu invertieren (was hier nicht nötig ist), verwenden wir den Gauß–Jordan-Algorithmus und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II+I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III-2\cdot I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{II/5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III-3\cdot II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-13}{5} & \frac{-3}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)\cdot III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{array}\right) \overset{II-III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-12}{5} & \frac{-2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{I-2\cdot III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{-21}{5} & \frac{-6}{5} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-12}{5} & \frac{-2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{array}\right) \overset{I-2\cdot II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-12}{5} & \frac{-2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{array}\right)$$

Analog verfährt man, um $\mathcal{M}_E(U_B)$ zu invertieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II-2\cdot I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III-2\cdot I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{II/5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 5 & 10 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III-5\cdot II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{III\cdot(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{II-\frac{11}{5}III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & -2 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{I+2\cdot III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & -2 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{I+II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & -2 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

(b) Seien die Basen A durch $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ und B durch $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ abgekürzt. Unser gegebener Vektor $\vec{v}$ ist gerade $\vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \vec{a}_j$, wobei $v_1 = 2$, $v_2 = 9$ und $v_3 = -8$. Wir suchen also Koordinaten $\tilde{v}_j$, sodass $\sum_{j=1}^3 v_j \vec{a}_j = \sum_{\ell=1}^3 \tilde{v}_\ell \vec{b}_\ell$. Wir verwenden $\vec{a}_j = U_A \vec{e}_j$ und $\vec{b}_\ell = U_B \vec{e}_\ell$ und erhalten somit die Gleichheit

$$U_A \sum_{j=1}^{3} v_j \vec{e}_j = U_B \sum_{\ell=1}^{3} \tilde{v}_\ell \vec{e}_\ell \,.$$

Die Summen $\sum_{j=1}^3 v_j \vec{e}_j$ und $\sum_{\ell=1}^3 \tilde{v}_\ell \vec{e}_\ell$ sind Vektoren bzgl. der Standardbasis. Wir können also die obigen Darstellungen von U_A und U_B bzgl. der Standardbasis verwenden und erhalten nach Anwenden von U_B^{-1} auf beiden Seiten $U_B^{-1} U_A \sum_{j=1}^3 v_j \vec{e}_j = \sum_{\ell=1}^3 \tilde{v}_\ell \vec{e}_\ell$, oder in Matrixdarstellung

$$(\mathcal{M}_E(U_B))^{-1} \cdot \mathcal{M}_E(U_A) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 13/5 & 12/5 \\ 6 & 43/5 & 32/5 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31/5 \\ 191/5 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Wir haben also gefunden, dass $\vec{v} = 2\vec{a}_1 + 9\vec{a}_2 - 8\vec{a}_3$ sich in der B-Basis durch

$$\vec{v} = \frac{31}{5} \vec{b}_1 + \frac{191}{5} \vec{b}_2 - 18 \vec{b}_3$$

darstellen lässt. Wir rechnen zur Sicherheit in der Standardbasis nach und erhalten

$$2(1,-1,2)^T + 9(2,3,7)^T - 8(2,3,6)^T = (4,1,19)^T = \frac{31}{5}(1,2,2)^T + \frac{191}{5}(-1,3,3)^T - 18(-2,7,6)^T \,.$$

Lösung 7.4. (a) Sei $V_n \ni f = \sum_{j=0}^n a_j x^j$, dann gilt

$$\mathcal{D}_n f = \sum_{j=0}^{n} j a_j x^{j-1} = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j \,,$$

sprich der Koeffizient a_j von x^j wird unter $\mathcal{D}_n$ durch $b_j := (j+1) a_{j+1}$ ersetzt. Die Matrixdarstellung von $\mathcal{D}_n$ in den Basen B_n und B_{n-1} erhält man also durch

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}}_{=\mathcal{M}_{B_{n-1},B_n}(\mathcal{D}_n)} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ \vdots \\ na_n \end{pmatrix}$$

wobei die Matrix $\mathcal{M}_{B_{n-1},B_n}(\mathcal{D}_n)$ eine $n \times (n+1)$-Matrix mit erstem Spaltenvektor $= \vec{0}$ ist und die restliche $n \times n$-Matrix gerade $(\mathrm{diag}(j))_{j=1,\ldots,n}$ ist.

(b) Offenbar muss sich $\mathcal{I}_n$ durch eine $(n+1) \times n$-Matrix darstellen lassen, deren erste Zeile gerade der Nullvektor $\vec{0}_n$ ist. Wegen $\int_0^x a_j y^j \, dy = (j+1)^{-1} a_j x^{j+1}$ für $j = 0, 1, ..., n-1$ haben wir

$$\mathcal{M}_{B_n,B_{n-1}}(\mathcal{I}_n) = \begin{pmatrix} \vec{0}_n \\ \mathrm{diag}((j+1)^{-1})_{j=0,\ldots,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1/n \end{pmatrix}$$

Man prüft leicht nach, dass tatsächlich $\mathcal{M}_{B_{n-1},B_n}(\mathcal{D}_n) \circ \mathcal{M}_{B_n,B_{n-1}}(\mathcal{I}_n) = \mathbf{1}_{V_{n-1}}$.

8 8. Tutoriumsblatt (11. Januar 2021)

8.1 Aufgaben

Aufgabe 8.1. Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ invertierbar. Seien weiter $a, b \in K^n$ so, dass $1 + b^T A^{-1} a \neq 0$. Zeigen Sie, dass $A + ab^T$ invertierbar ist mit

$$(A + ab^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} a}\,.$$

(Bemerkung: Für $0 \neq \lambda \in K$ und $B \in K^{m\times n}$ ist $\frac{B}{\lambda} := \frac{1}{\lambda} \cdot B$ gemeint. In Diracs Notation wird die rechte Seite auch als $A^{-1} - \frac{A^{-1}\,|a\rangle\langle b|\,A^{-1}}{1+\langle b, A^{-1}a\rangle}$ geschrieben. Heuristisch gesprochen zeigt die Aufgabe, dass die Invertierbarkeit von A unter "relativ kleinen" (Rang-Eins-)Störungen $ab^T = |a\rangle\langle b|$ stabil ist.)

Aufgabe 8.2. Für welche Parameter $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist das reelle Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda x + y &= \mu \\ x + \lambda y + z &= \mu \\ y + \lambda z &= \mu \end{aligned}$$

lösbar? (Hinweis: Für eine Aussage $A(x)$ gilt $\neg(\exists^! A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \neg A(x)) \;\vee\; (\exists\, x, y : (A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y))$; "es gibt kein, oder mindestens zwei voneinander verschiedene x und y, sodass $A(x)$ und $A(y)$ gelten.")

Aufgabe 8.3. Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

(a) Seien $A, B \in K^{n\times n}$ so, dass $A \cdot B$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann auch A und B invertierbar sind. (Hinweis: Teil (c) in Korollar 8.11 und (d) in Satz 8.14)

(b) Seien $A, B \in K^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{rang}(A + B) \leq \mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B)$. (Hinweis: Dimensionsformel für Untervektorräume in Aufgabe 5.5 und (d) in Satz 8.14.)

8.2 Lösungen

Lösung 8.1. Wir rechnen (mit der Assoziativität innerhalb des Matrixrings)

$$\begin{aligned} &(A + ab^T) \cdot \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} a}\right) \\ &= \mathbf{1}_n - \frac{ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} a} + \frac{ab^T A^{-1}(1 + b^T A^{-1} a)}{1 + b^T A^{-1} a} - \frac{(ab^T) \cdot (A^{-1}ab^T A^{-1})}{1 + b^T A^{-1} a} \\ &= \mathbf{1}_n \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\left(A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} a}\right) \cdot (A + ab^T) \\ &= \mathbf{1}_n + \frac{A^{-1}ab^T(1 + b^T A^{-1} a)}{1 + b^T A^{-1} a} - \frac{A^{-1}ab^T}{1 + b^T A^{-1} a} - \frac{(A^{-1}ab^T A^{-1}) \cdot (ab^T)}{1 + b^T A^{-1} a} \\ &= \mathbf{1}_n\,, \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Lösung 8.2. Das Gleichungssystem ist von der Form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} .$$

Das Gleichungssystem ist lösbar für alle $\mu \in \mathbb{R}$, und zwar eindeutig, wegen Fredholm (Korollar 6.9), wenn A invertierbar ist. Dazu bringen wir A in rechte obere Dreiecksform und überprüfen, ob alle Diagonalelemente von Null verschieden sind. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & \mu \\ 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \end{array}\right) \overset{I\leftrightarrow III, I\leftrightarrow II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & 1 & 0 & \mu \end{array}\right) \overset{III-\lambda\cdot I}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 1-\lambda^2 & -\lambda & \mu-\lambda\mu \end{array}\right)$$

$$\overset{III-(1-\lambda^2)\cdot II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\lambda-\lambda(1-\lambda^2) & \mu\lambda(\lambda-1) \end{array}\right)$$

Die rechte Seite hat also genau dann alle von Null verschiedene Diagonaleinträge, wenn ($\lambda \neq 0 \wedge \lambda^2 \neq 2$). In dem Fall folgt aus der Fredholmschen Alternative, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar für alle $\mu \in \mathbb{R}$ ist. (Rechnen zeigt, dass $(x,y,z)^T = \frac{\mu}{\lambda^2-2}(\lambda-1, \lambda-2, \lambda-1)^T$ die eindeutige Lösung ist.)

Wir untersuchen nun die Lösbarkeit, wenn $\lambda = 0$ bzw. $\lambda^2 = 0$. In diesen Fällen besagt Fredholm lediglich, dass es entweder gar keine Lösung (Negation von (c) in Korollar 6.9), oder aber (über dem Grundkörper $\mathbb{R}$) unendlich viele Lösungen besitzt (Negation von (d) in Korollar 6.9).

<u>$\lambda = 0$:</u> In dem Fall gilt

$$(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und dieses Gleichungssystem wird durch $(x,y,z)^T = (\mu, \mu, 0)^T + z \cdot (-1, 0, 1)^T$ gelöst. (Nachprüfen..) Das beudetet $y = \mu$, $x = \mu - z$ und $z \in \mathbb{R}$ kann *beliebig* gewählt werden. Das bedeutet, dass es *unendlich* viele Lösungen des Gleichungssystems *für jedes* $\mu \in \mathbb{R}$ gibt.

<u>$\lambda^2 = 2$:</u> In dem Fall ist $\lambda = \varepsilon\sqrt{2}$ mit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ und es gilt

$$(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \varepsilon\sqrt{2} & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \varepsilon\sqrt{2} & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \mu\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{2}(\varepsilon\sqrt{2}-1) \end{array}\right) .$$

Wenn es eine Lösung $(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ gibt, so liefert die dritte Gleichung

$$0 = \mu\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{2}(\varepsilon\sqrt{2}-1) \Leftrightarrow \mu = 0 .$$

Das bedeutet, dass $\mu = 0$ eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit ist. Gleichbedeutend (durch Negation) ist damit die Aussage, dass wenn $\mu \neq 0$ ist, dann kann das Gleichungssystem nicht gelöst werden.

Sei also im Folgenden $\mu = 0$ und $\lambda = \varepsilon\sqrt{2}$ mit $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Dann folgt (mit $(\varepsilon\sqrt{2})^2 = 2$)

$$(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \varepsilon\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{I-\varepsilon II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Dieses Gleichungssystem wird durch $(x,y,z)^T = z(1, -\varepsilon\sqrt{2}, 1)^T$ gelöst. (Nachprüfen..) Das bedeutet aber wieder, dass $z \in \mathbb{R}$ ein freier Parameter ist, womit es wieder unendlich viele Lösungen gibt.

Wir fassen zusammen

$$\text{Gleichungssystem lösbar} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \notin \{0, \pm\sqrt{2}\} & \wedge\ \mu \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \quad \text{(eindeutige Lösung)} \\ \lambda = 0 & \wedge\ \mu \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \quad (\infty \text{ viele Lösungen}) \\ \lambda \in \{\pm\sqrt{2}\} & \wedge\ \mu = 0 \qquad\qquad\ (\infty \text{ viele Lösungen}) \end{cases}$$

$$\text{Gleichungssystem nicht lösbar} \Leftarrow \lambda^2 = 0\ \wedge\ \mu \neq 0\,.$$

Lösung 8.3. (a) Es gilt, dank Korollar 8.11,

$$\begin{aligned} AB \text{ invertierbar} &\Rightarrow \exists C \in K^{n\times n} : \mathbf{1}_n = (AB)\cdot C \\ &\Rightarrow n = \operatorname{rang}(\mathbf{1}_n) = \operatorname{rang}((AB)C)) = \operatorname{rang}(A(BC)) \\ &\qquad \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(BC)\} \leq \operatorname{rang}(A) \leq \min\{m,n\} \leq n\,, \end{aligned}$$

woraus $\operatorname{rang}(A) = n$ folgt. Aus (d) in Satz 8.14 folgt dann die Invertierbarkeit von A, sprich die Existenz von A^{-1}. Da $GL(n,K)$ eine Gruppe ist, ist auch $A^{-1}\cdot(AB)$ invertierbar, sprich $B = \mathbf{1}_n B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB)$ ist ebenfalls invertierbar. Dies schließt den Beweis.

(b) Zur Erinnerung: für $C \in K^{m\times n}$ ist $\operatorname{rang}(C) = \dim\operatorname{ran}(C) = \dim(\{Cx : x \in K^n\})$. Weiter gilt

$$\{(A+B)x : x \in K^n\} = \{Ax + Bx : x \in K^n\} \subseteq \{Ax : x \in K^n\} + \{By : y \in K^n\}\,,$$

da $z = Ax + Bx \Rightarrow z \in \{Ax : x \in K^n\} + \{By : y \in K^n\}$ (mit $x = y$). Aus diesen Erkenntnissen sowie der Tatsache, dass die Dimension jedes Untervektorraums $U \subseteq V$ kleiner als die des Vektorraums V ist (hierbei sind $V = K^m$ und $U = \operatorname{ran}(A)$ oder $U = \operatorname{ran}(B)$), folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(A+B) &= \dim\operatorname{ran}(A+B) \leq \dim(\operatorname{ran}(A) + \operatorname{ran}(B)) \\ &= \dim\operatorname{ran}(A) + \dim\operatorname{ran}(B) - \dim(\operatorname{ran}(A) \cap \operatorname{ran}(B)) \leq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) \end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt die Dimensionsformel $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ und anschließend die Nichtnegativität der Dimension verwendet haben.

8.3 Invertieren von Matrizen und Rang

8.3.1 Gauß-Algorithmus

Invertierbare Matrizen lassen sich allein durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix transformieren. Wir verfolgen folgenden Plan

1. Transformation in eine rechte Dreiecksmatrix
2. Transformation in die Einheitsmatrix

Definition 8.1 (Rechte Dreiecksmatrix)**.** Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Dann heißt $R \in K^{n\times n}$ *rechte obere Dreiecksmatrix*, wenn $r_{ij} = 0$ für alle $1 \leq j < i \leq n$. Entsprechend heißt $L \in K^{n\times n}$ *linke untere Dreiecksmatrix*, wenn $\ell_{i,j} = 0$ für alle $1 \leq i < j \leq n$.

Nun zu Schritt 1 unseres Plans.

Satz 8.2. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Dann kann jede invertierbare Matrix $A \in K^{n\times n}$ durch elementare Zeilenumformungen vom Typ II und III (EZU II und EZU III) auf obere Dreiecksform gebracht werden, deren Diagonalelemente alle von Null verschieden sind.*

Beweis. Wir induzieren über $n \in \mathbb{N}$ und verwenden das *Gaußsche Eliminierungsverfahren.*

$\underline{n=1}$: $A \in K^{1\times 1} = K$ invertierbar $\Leftrightarrow a_{1,1} \neq 0 \Rightarrow A$ ist bereits eine rechte obere Dreiecksmatrix mit Diagonale $\neq 0$.

$\underline{n \mapsto n+1}$: Angenommen, die Behauptung sei wahr für $n \in \mathbb{N}$ (Induktionshypothese). Dann betrachten wir $A \in K^{(n+1)\times(n+1)}$. Wir unterscheiden nun zwischen zwei Fällen:

1. $a_{1,1} = 0$: In dem Fall kann die erste Spalte keine Nullspalte sein, da A andernfalls nicht invertierbar wäre. (Wenn es doch eine Nullspalte gäbe, so wäre $(1, 0, ..., 0)^T \in \ker(A)$, also wäre A nicht injektiv, also nicht bijektiv, also nicht invertierbar, siehe Korollar 6.9.) Sei $i \in \{1, ..., n\}$ also so, dass $a_{i,1} \neq 0$. In dem Fall wenden wir eine EZU III an, um die erste und i-te Zeile zu vertauschen und erhalten

$$A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{EZU III}} \begin{pmatrix} a^{(i)} \\ \vdots \\ a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{EZU III mehrfach, wie in Lemma 6.3}} \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \equiv \hat{A}\,.$$

In dem Fall benennen wir $\alpha := a_{i,1}$ sowie $\tilde{a}^T := (a_{i,2}, ..., a_{i,n+1})$

2. $a_{1,1} \neq 0$: Wir verfahren wie oben mit $i = 1$, d.h. der erste Schritt ist trivial.

Wir behaupten nun, dass $\tilde{A}$ invertierbar ist. In dem Fall können wir die Induktionshypothese anwenden, um $\tilde{A}$ durch EZU II und EZU III in rechte obere Dreiecksform mit nicht-verschwindender Diagonale zu bringen. Da die (entsprechend trivial erweiterten) EZU II und III die erste Zeile und Spalte der Gesamtmatrix $\hat{A}$ nicht verändern, würde dies den Beweis schließen.

Es verbleibt also zu zeigen, dass $\tilde{A}$ invertierbar ist. Dazu genügt es, die Injektivität von $\tilde{A}$ zu zeigen (Korollar 6.9), sprich

$$\tilde{A}\tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{x} = 0\,.$$

Angenommen also es gäbe $\tilde{x} \in \ker(\tilde{A})$. Dann sei $x_1 \in K$ so, dass auch $\alpha x_1 + \tilde{a}^T\tilde{x} = 0$. (Das ist möglich, da $\alpha \neq 0$.) Dann gilt, dank der Invertierbarkeit von $\hat{A}$ (welche durch konsekutive Anwendung von EZU's aus einer invertierbaren Matrix hervorgegangen ist),

$$\hat{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \tilde{a}^T \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit $\tilde{x} = 0$, was zu zeigen war. □

Wir kommen nun zum zweiten Schritt unseres Plans.

Lemma 8.3. *Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $R \in K^{n\times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix deren Diagonalelemente alle $\neq 0$ sind. Dann kann R durch EZU I und II in die Einheitsmatrix transformiert werden.*

Beweis. Wir arbeiten uns "von oben nach unten" mit EZU II vor und skalieren dann alle Diagonalemente mit Hilfe von EZU I auf 1, sprich

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{mehrfache EZU II}} \begin{pmatrix} r_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & r_{n,n} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{EZU I}} \begin{pmatrix} r_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{EZU I}} \cdots \xrightarrow{\text{EZU I}} \mathbf{1}_n\,.$$

Dies schließt den Beweis. □

Wir können nun unseren Plan in die Tat umsetzen.

Korollar 8.4 (Berechnung von A^{-1})**.** *Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ invertierbar. Falls A durch elementare Zeilenumformungen in $\mathbf{1}_n$ übergeführt wird, so kann $\mathbf{1}_n$ durch dieselben Transformationen in A^{-1} überführt werden.*

Beweis. Sei C ein Produkt elementarer Zeilenumformungen so, dass $C \cdot A = \mathbf{1}_n$, sprich C führt A in $\mathbf{1}_n$ über. Dann folgt aus Korollar 6.11, dass $C = C \cdot \mathbf{1}_n A^{-1}$, sprich C führt $\mathbf{1}_n$ in A^{-1} über. □

Beispiel 8.5.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

8.3.2 Rang einer Matrix

Definition 8.6. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $K^{m\times n} \ni A = (a_1, ..., a_n) = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$.

(1) Spaltenraum$(A) := \operatorname{span}(a_1, ..., a_n)$

(2) Spaltenrang$(A) := \dim$ Spaltenraum(A)

(3) Zeilenraum$(A) := \operatorname{span}(a^{(1)}, ..., a^{(m)})$

(4) Zeilenrang$(A) := \dim$ Zeilenraum(A)

Bemerkungen 8.7. 1. Spaltenraum$(A) = \operatorname{ran}(A)$, denn

$$\begin{aligned}\operatorname{span}(a_1, ..., a_n) &= \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i : \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n\} = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Ae_i : \lambda \in K^n\} \\ &= \{A\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i : \lambda \in K^n\} = \{A\lambda : \lambda \in K^n\}\,.\end{aligned}$$

2. Spaltenrang$(A) = \dim \operatorname{ran}(A)$

3. Zeilenrang$(A) =$ Spaltenrang(A^T)

Beispiel 8.8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Dann sind Zeilenrang$(A) =$ Spaltenrang$(A) = 2$, wenn $c = 12$ und Zeilenrang$(A) =$ Spaltenrang$(A) = 3$ sonst. (Beobachte $(3, 1, 12)^T = 3 \cdot (1, -1, 4)^T + 2 \cdot (0, 2, 0)^T$.)

Lemma 8.9. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ K ein Körper und $A \in K^{m\times n}$. Seien weiter $S \in K^{m\times m}$ und $T \in K^{n\times n}$ zwei invertierbare Matrizen. Dann gelten*

$$\begin{aligned}\textit{Spaltenrang}(SAT) &= \textit{Spaltenrang}(A) \\ \textit{Zeilenrang}(SAT) &= \textit{Zeilenrang}(A)\,.\end{aligned}$$

Beweis. 1. Wir zeigen Spaltenrang$(AT) =$ Spaltenrang(A). In der Tat gilt

$$\begin{aligned}\text{Spaltenrang}(A) &= \dim\{Ax : x \in K^n\} = \dim\{Ax : x \in T(K^n)\} \\ &= \dim\{Ax : x = Ty,\, y \in K^n\} = \dim\{ATy : y \in K^n\} = \text{Spaltenrang}(AT)\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt die vorige Bemerkung und anschließend $T(K^n) = K^n$ (da T bijektiv) verwendet haben.

2. Wir zeigen Spaltenrang$(SA) =$ Spaltenrang(A).

   Zur Erinnerung: es ist Spaltenraum$(A) := \operatorname{span}(a_1, ..., a_n) = \operatorname{span}(Ae_1, ..., Ae_n)$. Sei $r :=$ Spaltenrang(A) und $Ae_{j_1}, ..., Ae_{j_r}$ eine Basis von Spaltenraum(A). Dann folgt aus (c) in Aufgabe 6.4, dass $SAe_{j_1}, ..., SAe_{j_r}$ eine Basis von $\operatorname{span}(SAe_1, ..., SAe_n)$. Somit ist Spaltenrang$(A) =$ Spaltenrang(SA).

3. Es gilt Spaltenrang$(SAT) =$ Spaltenrang$(SA) =$ Spaltenrang(A), wobei wir erst die erste und dann die zweite Aussage dieses Lemmas verwendet haben.

4. Dank der vorigen Bemerkung (Zeilenrang(A) = Spaltenrang(A^T)) und dem dritten Punkt dieses Lemmas gilt

$$\begin{aligned}\text{Zeilenrang}(SAT) &= \text{Spaltenrang}((SAT)^T) = \text{Spaltenrang}(T^T A^T S^T) \\ &= \text{Spaltenrang}(A^T) = \text{Zeilenrang}(A)\,,\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

□

Satz 8.10 (Satz und Definition – Rang von A). *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in K^{m\times n}$. Dann gilt*

$$\textit{Zeilenrang}(A) = \textit{Spaltenrang}(A)$$

und diese Zahl wird als Rang von A *bezeichnet. Man schreibt* $\text{rang}(A)$ *oder* $\text{rank}(A)$.

Beweis. Nach Satz 6.4 gibt es $G \in K^{m\times m}$ und $H \in K^{n\times n}$, beide invertierbar, sowie $r \in \{0, ..., \min\{m,n\}\}$, sodass $A = G\begin{pmatrix}\mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}H$. Aus Lemma 8.9 folgen dann

$$\begin{aligned}\text{Spaltenrang}(A) &= \text{Spaltenrang}\begin{pmatrix}\mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = r \\ \text{Zeilenrang}(A) &= \text{Zeilenrang}\begin{pmatrix}\mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = r\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Korollar 8.11. *Seien $m, n, r \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(a) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$.

(b) $\text{rang}(A) \le \min\{m,n\}$.

(c) $\text{rang}(AB) \le \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$.

(d) Seien $S \in K^{m\times m}$ und $T \in K^{n\times n}$ invertierbar. Dann ist $\text{rang}(SAT) = \text{rang}(A)$.

Beweis. (a) Folgt aus Satz 8.10 und Spaltenrang(A) = Zeilenrang(A^T).

(b) Aus $\text{ran}(A) \subseteq K^m$ und $\text{ran}(A^T) \subseteq K^n$, der Gleichheit $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$ sowie $\text{rang}(A) = \dim \text{ran}(A)$ (siehe Bemerkung 8.7) folgt $(\text{rang}(A) \le m) \wedge (\text{rang}(A) \le n)$, also $\text{rang}(A) \le \min\{m,n\}$.

(c) Nach Bemerkung 8.7 gilt

$$\text{rang}(AB) = \dim \underbrace{\text{span}(ABx : x \in K^r)}_{\subseteq \text{span}(Ay:\, y\in K^n)} \le \dim \text{span}(Ay : y \in K^n) = \text{rang}(A)\,.$$

Analog erhält man

$$\text{rang}(AB) = \text{rang}((AB)^T) = \text{rang}(B^T A^T) \le \text{rang}(B^T) = \text{rang}(B)\,,$$

woraus

$$\text{rang}(AB) \le \text{rang}(A) \wedge \text{rang}(AB) \le \text{rang}(B) \Rightarrow \text{rang}(AB) \le \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$$

folgt, wie behauptet.

(d) Folgt aus Lemma 8.9 und Satz 8.10.

□

8.3.3 Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen

Lemma 8.12. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$, $r = \operatorname{rang}(A)$ und $b \in K^m$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(a) $\dim\{x \in K^n : Ax = 0\} = n - r$.

(b) Falls es $x^* \in K^n$ gibt, sodass $Ax^* = b$, dann gilt

$$\{x \in K^n : Ax = b\} = \{x^* + x^{**} : x^{**} \in K^n, Ax^{**} = 0\}.$$

Bemerkung 8.13. Nach (b) erhält man die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$ durch Addition *einer* speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems und der allgemeinen Lösung des homogenenen Gleichungssystems.

Beweis. (a) Folgt aus der Dimensionsformel (Satz V.5 im Skript)

$$n = \dim(K^n) = \dim(\ker(A)) + \dim(\operatorname{ran}(A)) = \dim(\ker(A)) + \operatorname{rang}(A).$$

(b) Sei $x^* \in K^n$ so, dass $Ax^*b = b$. Dann gilt

$$Ax = b \Leftrightarrow A(x^* + (x - x^*)) = b \overset{Ax^*=b}{\Leftrightarrow} A(\underbrace{x - x^*}_{=x^{**}}) = 0 \Leftrightarrow x = x^* + x^{**} \wedge Ax^{**} = 0,$$

wie behauptet.

□

Satz 8.14. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$. Sei $\overline{Ab}$ die aus A und b zusammengesetzte Matrix in $K^{m\times(n+1)}$ (auch "erweiterte Matrix" genannt). Dann gelten folgende Aussagen*

(a) $\operatorname{rang}(\overline{Ab}) = \operatorname{rang}(A) \Leftrightarrow Ax = b$ *besitzt mindestens eine Lösung $x \in K^n$.*

(b) $\operatorname{rang}(A) = n \Rightarrow Ax = b$ *besitzt höchstens eine Lösung $x \in K^n$.*

(c) $\operatorname{rang}(\overline{Ab}) = \operatorname{rang}(A) = n \Leftrightarrow Ax = b$ *besitzt genau eine Lösung $x \in K^n$.*

(d) Sei $m = n$. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn $\operatorname{rang}(A) = n$.

Beweis. (a) Wir haben

$$\begin{aligned}\operatorname{rang}(\overline{Ab}) = \operatorname{rang}(A) &\Leftrightarrow \operatorname{span}(a_1, ..., a_n, b) = \operatorname{span}(a_1, ..., a_n)\\ &\overset{\text{Lemma 5.7.3}}{\Leftrightarrow} b \in \operatorname{span}(a_1, ..., a_n)\\ &\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n \in K : \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j = b \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in K^n : A\lambda = b,\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) Wir haben

$$\begin{aligned}\operatorname{rang}(A) = n &\Leftrightarrow a_1, ..., a_n \text{ linear unabhängig}\\ &\Rightarrow \sum x_j a_j = b \text{ besitzt höchstens eine Lösung } x \in K^n\\ &\Leftrightarrow Ax = b \text{ besitzt höchstens eine Lösung } x \in K^n,\end{aligned}$$

wobei wir in der "$\Rightarrow$"-Implikation verwendet haben, dass für alle $\mu, \lambda \in K^n$ mit $\sum_{j=1}^n \mu_j b_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$ es folgt, dass $\mu = \lambda$, wann immer $\{b_j\}_{j=1}^n$ linear unabhängig ist.

(c) "$\Rightarrow$": Folgt sofort aus (a) und (b).

"$\Leftarrow$": Wir haben

$$\begin{aligned}
&Ax = b \text{ besitzt genau eine Lösung } x \in K^n \\
&\overset{(d) \Leftrightarrow (b) \text{ in Korollar 6.9}}{\Leftrightarrow} Ax = 0 \text{ besitzt nur die Lösung } x = 0 \\
&\Leftrightarrow a_1, ..., a_n \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n\,.
\end{aligned}$$

Aus Teil (a) folgt schließlich $\operatorname{rang}(\overline{Ab}) = \operatorname{rang}(A) = n$ wie behauptet.

(d) Nach Fredholm (Korollar 6.9) ist A genau dann invertierbar, wenn $\ker(A) = \{0\}$, sprich die Gleichung $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung $x = 0$. Also

$$\begin{aligned}
A \text{ invertierbar} &\Leftrightarrow \{x \in K^n :\ Ax = 0\} = \{0\} \\
&\Leftrightarrow \dim\left(\{x \in K^n :\ Ax = 0\}\right) = \dim\ker(A) = 0 \overset{\text{Lemma 8.12.(a)}}{=} n - \operatorname{rang}(A) \\
&\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n\,,
\end{aligned}$$

wie behauptet.

$\square$

9 9. Tutoriumsblatt (18. Januar 2022)

9.1 Aufgaben

Aufgabe 9.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $u, v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$ für einen Körper $\mathbb{F}$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Seien $u, v \in \mathbb{F}^{n\times 1} \setminus \{0\}$ zwei Spaltenvektoren mit n Einträgen. Dann gilt $\det(\mathbf{1}_n + u \cdot v^T) = 1 + v^T \cdot u$.

(b) Es gilt $\det(A + u \cdot v^T) = \det(A) \cdot (1 + v^T A^{-1} u)$ für jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(c) Es gilt $\operatorname{rang}(u \cdot v^T) = 1$. (Hinweis: Aufgabe K 8.2)

Aufgabe 9.2. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{F}$ ein Körper.

(a) Sei $A \in \mathbb{F}^{m\times m}$ invertierbar, $B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{F}^{n\times m}$ und $D \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - C \cdot A^{-1} \cdot B)\,.$$

Hinweis: Sie dürfen die Identität (Blockmatrixmultiplikation)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ -C \cdot A^{-1} & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - C \cdot A^{-1} \cdot B \end{pmatrix}$$

verwenden.

(b) Seien $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ invertierbar und $A \cdot C = C \cdot A$. Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A \cdot D - C \cdot B)\,.$$

Aufgabe 9.3. Seien $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ ein Körper und $W \in \mathbb{F}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie folgende Baby-Version von *Jacobis Formel*

$$\frac{d}{dt} \left[\det\left(1 + tW\right)\right] \Big|_{t=0} = \operatorname{Tr}(W)\,.$$

(Bemerkung: Jacobis Formel besagt

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \det(A(t)) \cdot \operatorname{Tr}\left(A(t)^{-1} \cdot \frac{dA(t)}{dt}\right)$$

für alle $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ und differenzierbaren Abbildungen $I \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{F}^{n\times n}$.)

9.2 Lösungen

Lösung 9.1. (a) Wir halten zunächst die Identität

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n + u \cdot v^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & u \\ 0 & 1 + v^T \cdot u \end{pmatrix}$$

fest. Wenden wir nun die Determinante auf beiden Seiten an, so stellen wir fest, dass nach Aufgabe K 8.3 die Determinante der linken Seite gerade $\det(\mathbf{1} + u \cdot v^T)$ ist. Die Determinante der rechten Seite ist gerade $\det(1 + v^T \cdot u)$ ebenfalls nach Teil K 8.3. Dies schließt den Beweis.

(b) Da A invertierbar ist, folgt aus dem Multiplikationssatz und Aufgabenteil (a)

$$\begin{aligned} \det(A + uv^T) &= \det(A + \mathbf{1}_n \cdot (u \cdot v^T)) = \det(A + (A \cdot A^{-1}) \cdot (u \cdot v^T)) \\ &= \det(A(\mathbf{1}_n + A^{-1} \cdot (u \cdot v^T))) = \det(A) \cdot \det(\mathbf{1}_n + (A^{-1}u) \cdot v^T) \\ &= \det(A) \cdot (1 + v^T \cdot (A^{-1}u)) = \det(A) \cdot (1 + v^T \cdot A^{-1}u)\,. \end{aligned}$$

(c) Nach K8.2 (a) und (b) gelten

$$\operatorname{rang}(u) = \operatorname{rang}(u^T) \leq \min\{1, n\} = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{rang}(v) = \operatorname{rang}(v^T) \leq 1\,.$$

Aus K8.2 (c) folgt damit

$$\operatorname{rang}(u \cdot v^T) \leq 1\,.$$

Da für jede Matrix $B = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{rang}(B) = 0 \Leftrightarrow \text{Spaltenrang}(B) = 0 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{span}(b_1, ..., b_n)) = 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{span}(b_1, ..., b_n) = 0 \Leftrightarrow b_1 = b_2 = ... = b_n = 0 \Leftrightarrow B = 0\,,\end{aligned}$$

genügt es zu zeigen, dass $u \cdot v^T \neq 0$. Dazu verwenden wir, dass es $1 \leq k, \ell \leq n$ gibt, sodass $u_k \neq 0$ und $v_\ell \neq 0$. (Dies folgt aus der Annahme $u, v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$.) Damit folgt aber, dass der Eintrag $(u \cdot v^T)_{k,\ell} \neq 0$ ist, womit die Matrix $u \cdot v^T \neq 0$ ist.

Lösung 9.2. (a) Wir wenden die Determinante auf das Blockmatrixprodukt im Hinweis an und erhalten

$$\begin{aligned}&\det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{1}_m & 0 \\ -CA^{-1} & \mathbf{1}_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}A & B \\ C & D\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ &\underbrace{\det\begin{pmatrix}\mathbf{1}_m & 0 \\ -CA^{-1} & \mathbf{1}_n\end{pmatrix}}_{=\det(\mathbf{1}_m)\cdot\det(\mathbf{1}_n)} \cdot \det\begin{pmatrix}A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B) \\ \Leftrightarrow\ &\det\begin{pmatrix}A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)\,,\end{aligned}$$

wie behauptet.

(b) Angenommen $AC = CA$. Dann folgt aus Teil (a)

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}A & B \\ C & D\end{pmatrix} &= \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B) = \det\left(A \cdot (D - CA^{-1}B)\right) \\ &= \det\left(AD - ACA^{-1}B\right) = \det(AD - CB)\,,\end{aligned}$$

wie behauptet.

Lösung 9.3. Sei $W = (w_1, w_2, ..., w_n)$ mit Spaltenvektoren $w_1, ..., w_n \in \mathbb{F}^n$. Dann haben wir dank der Linearität der Determinanten bzgl. Spalten und Zeilen

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{1}_n + \varepsilon W) &= \det(e_1 + \varepsilon w_1, e_2 + \varepsilon w_2, ..., e_n + \varepsilon w_n) \\ &= \det(e_1, e_2 + \varepsilon w_2, ..., e_n + \varepsilon w_n) + \varepsilon \det(w_1, e_2 + \varepsilon w_2, ..., e_n + \varepsilon w_n) \\ &= \det(e_1, e_2, ..., e_n) \\ &\quad + \varepsilon\left[\det(w_1, e_2, ..., e_n) + \det(e_1, w_2, e_3, ..., e_n) + \det(e_1, e_2, ..., e_{n-1}, w_n)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= 1 + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \det(e_1, ..., e_{j-1}, w_j, e_{j+1}, ..., e_n) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,.\end{aligned}$$

Entwicklung entlang der j-ten Spalte ergibt

$$\det(e_1, ..., e_{j-1}, w_j, e_{j+1}, ..., e_n) = W_{jj}\,.$$

Somit ist

$$\frac{d}{dt}\left[\det(1 + tW)\right]\Big|_{t=0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1 + \varepsilon\sum_j W_{jj} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - 1}{\varepsilon} = \operatorname{Tr}(W)\,,$$

was zu zeigen war.

10 10. Tutoriumsblatt (25. Januar 2022)

10.1 Aufgaben

Aufgabe 10.1. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Es gibt genau ein $\varphi \in [0, \pi]$ mit $\cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}$. (In diesem Fall nennt man φ den Winkel zwischen x und y und schreibt $\varphi = \sphericalangle(x, y)$. Insbesondere folgt offenbar $\langle x, y\rangle = |x||y|\cos(\sphericalangle(x, y))$.)

(b) Sei $x \perp y$, sprich $\sphericalangle(x, y) = \pi/2$. Dann gilt $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ (Pythagoras).

Aufgabe 10.2. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt. Zeigen Sie folgende Aussagen und geben Sie eine geometrische Interpretation für $n = 2$ an.

(a) $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos\sphericalangle(x, y)$ falls $x, y \neq 0$.

(b) $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.

Aufgabe 10.3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent zueinander sind.

(a) A ist orthogonal, sprich $A^T A = \mathbf{1}_n$. (Man schreibt $A \in O(n)$.)

(b) A^T ist orthogonal, sprich $AA^T = \mathbf{1}_n$.

(c) A ist invertierbar und es gilt $A^{-1} = A^T$.

Aufgabe 10.4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent zueinander sind.

(a) A ist orthogonal, sprich $A^T A = \mathbf{1}_n$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $|Ax| = |x|$. (Längentreue Abbildung, Isometrie)

(c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\sphericalangle(Ax, Ay) = \sphericalangle(x, y)$. (Winkeltreue)

Was bedeuten diese Aussagen geometrisch?

Aufgabe 10.5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, sprich $A^T A = \mathbf{1}_n$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) $|\det(A)| = 1$.

(b) $b_1, ..., b_n$ Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \Rightarrow Ab_1, ..., Ab_n$ Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

(c) Die Menge $O(n)$ ist eine Untergruppe von $GL(n)$ (bzgl. Matrixmultiplikation als Gruppenoperation).

Aufgabe 10.6. Sei $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{n}\|_2 = 1$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und

$$R_{ij}(\varphi) = (1 - \cos\varphi)n_i n_j + \cos\varphi\,\delta_{ij} + \sin\varphi \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ikj} n_k$$

mit dem Levi–Civita-Symbol (Tensor)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } (ijk) \in \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\}\,, \\ 0\,, & \text{falls } (ijk) \in \{(1,3,2), (3,2,1), (2,1,3)\}\,. \end{cases}$$

Unter vielen algebraischen Identitäten für den Levi–Civita-Tensor ist

$$\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ji\ell}\varepsilon_{jmk} = \delta_{im}\delta_{\ell k} - \delta_{ik}\delta_{\ell m}\,, \quad \forall\, i, k, \ell, m \in \{1, 2, 3\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $R(\varphi)^T R(\varphi) = \mathbf{1}_3$. (Bonus: Zeigen Sie $\det(R(\varphi)) = +1$!)

(b) Berechnen Sie $R(\varphi)\vec{n}$.

(c) Wie lautet die Rotationsmatrix $R(\pi/2)$ für eine Rotation um $\pi/2$ um die Achse $(1, 2, 0)^T$?

(d) Finden Sie einen Vektor $\vec{x}$ mit Länge 2, der *nach* der Drehung durch die Rotationsmatrix $R(\pi/2)$ aus Teil (c) mit der $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^T$-Achse zusammenfällt.

10.2 Lösungen

Lösung 10.1. (a) Aus Cauchy–Schwarz folgt

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|} \leq 1\,.$$

Da $\cos[0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv ist, gibt es ein eindeutiges $\varphi \in [0, \pi]$ mit $\cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}$ wie behauptet.

(b) Wir haben $|x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|\cos(\pi/2) = |x|^2 + |y|^2$.

Lösung 10.2. (a) Wir haben

$$|x - y|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\sphericalangle(x, y)\,.$$

In $n = 2$ beschreibt diese Identität den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie.

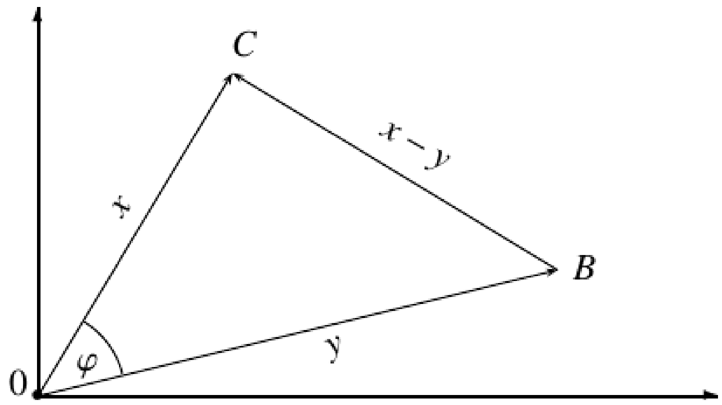

Abbildung 1: Kosinussatz

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in eine der Ecken des Dreiecks OBC, so erhält man die Ortsvektoren der Ecken als $x = \vec{C} - \vec{O} =: \vec{OC}$ und $y = \vec{B} - \vec{O} =: \vec{OB}$. Damit ist $x - y = \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{C} - \vec{B} =: B\vec{C}S$.

Der Winkel φ an der Ecke O des Dreiecks schreibt sich dann als $\varphi = \sphericalangle(x, y) = \sphericalangle(BOC)$.

Die Seitenlängen des Dreiecks sind dann gegeben durch $\|x\| = \|\vec{OC}\|$, $\|y\| = \|\vec{OB}\|$ und $\|x - y\| = \|\vec{BC}\|$. Die obige Gleichung lautet dann in der Notation der Geometrie:

$$\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{OC}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 - 2\|\vec{OC}\|\|\vec{OB}\|\cos(\sphericalangle(BOC))\,.$$

Falls $\vec{OC}$ und $\vec{OB}$ senkrecht aufeinander stehen (sprich $\varphi = \pi/2$), geht wegen $\cos\pi/2 = 0$ der Kosinussatz über in den Satz des Pythagoras.

(b) Wir haben

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle + |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y\rangle = 2(|x|^2 + |y|^2)\,.$$

Diese Gleichung beschreibt die Parallelogramgleichheit: *In einem Parallelogram ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über alle vier Seiten.*

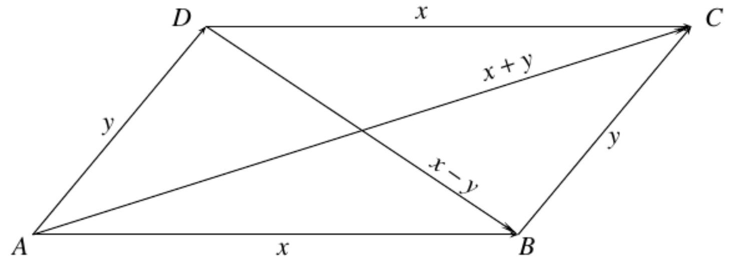

Abbildung 2: Parallelogramsatz

Lösung 10.3.

- $(a) \Rightarrow (c)$: $A^T A = \mathbf{1}_n \Rightarrow A^T$ und A sind nach (a) in Aufgabe 8.3 invertierbar. $\Rightarrow A^T \underbrace{AA^{-1}}_{=\mathbf{1}_n} = A^{-1} \Rightarrow A^T = A^{-1}$.
- $(b) \Rightarrow (c)$: A^T orthogonal $\Leftrightarrow (A^T)^T A^T = AA^T = \mathbf{1}_n \Rightarrow A$ und A^T sind invertierbar nach (a) in Aufgabe 8.3 $\Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=\mathbf{1}_n} A^T = A^{-1} \Rightarrow A^T = A^{-1}$.
- $(c) \Rightarrow (a)$: $A^T A = A^{-1}A = \mathbf{1}_n$ nach (c).
- $(c) \Rightarrow (b)$: Analog.

Lösung 10.4.

- $(a) \Rightarrow (b)$: $|Ax|^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T A^T Ax = x^T x = |x|^2$.
- $(b) \Rightarrow (c)$: Es gilt (nach Aufgabe K10.3) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2)$, also $\langle Ax, Ay\rangle = \frac{1}{4}(|A(x+y)|^2 - |A(x-y)|^2) \overset{(b)}{=} \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2) = \langle x, y\rangle$, wobei wir zum Schluß wieder die Polarisationsidentiät verwendet haben.
- $(c) \Rightarrow (a)$: $\langle x, (A^T A - \mathbf{1}_n)y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle - \langle x, y\rangle \overset{(c)}{=} 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt somit für $x := (A^T A - \mathbf{1}_n)y$ und $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig, dass $|(A^T A - \mathbf{1}_n)y|^2 = 0$, womit $A^T Ay = \mathbf{1}_n y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und damit $A^T A = \mathbf{1}_n$ sein muss.

Geometrisch bedeutet das, dass orthogonale Matrizen entweder Spiegelungen oder Rotationen sein müssen.

Bemerkung: Allgemeiner gilt: ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, sprich $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann gibt es eine Matrix $A \in O(n)$ und ein $b \in \mathbb{R}^n$ so, dass $f(x) = Ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Lösung 10.5. (a) Wir haben $1 = \det(\mathbf{1}_n) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2 = |\det(A)|^2$, woraus $|\det(A)| = 1$ folgt.

(b) Da orthonormale Mengen stets linear unabhängig sind und unsere Menge $\{Ab_j\}_{j=1}^n$ aus n Elementen besteht, genügt es die Orthonormalität der Ab_j nachzuweisen (sh. Satz 5.22). Wir rechnen

$$\langle Ab_i, Ab_j\rangle = (Ab_i)^T \cdot Ab_j = b_i^T A^T Ab_j = b_i^T b_j = \langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$$

für alle $i, j = 1, ..., n$, was die Behauptung zeigt.

(c) Um zu zeigen, dass $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T A = \mathbf{1}_n\}$ eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ invertierbar}\}$ ist, genügt es die Unterraumkriterien nachzuwesien.

(a) $\emptyset \subseteq O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$: Zunächst ist $O(n)$ nicht leer, denn $\mathbf{1}_n \in O(n)$, denn $\mathbf{1}_n^T = \mathbf{1}_n$, also $\mathbf{1}_n^T \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T = \mathbf{1}_n$. Schließlich folgt $O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ aus der Tatsache, dass für $A \in O(n)$ gilt, dass $A^T = A^{-1}$, womit A insbesondere invertierbar ist.

(b) Für alle $A, B \in O(n)$ ist auch $AB \in O(n)$: Es gilt in der Tat $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = \mathbf{1}_n$ per Voraussetzung und Assoziativität des Matrixprodukts.

(c) Für alle $A \in O(n)$ ist auch $A^{-1} \in O(n)$: Da A orthogonal ist, ist A invertierbar mit $A^{-1} = A^T$. Es verbleibt zu zeigen, dass $(A^{-1})^T A^{-1} = \mathbf{1}_n$. Dies ist in der Tat der Fall, denn $(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^{-1} = AA^{-1} = \mathbf{1}_n$.

Dies schließt den Beweis von (c).

Lösung 10.6. (a) Mit $\sum_{j=1}^3 n_j^2 = 1$ rechnen wir

$$\begin{aligned}
(R(\varphi)^T R(\varphi))_{ik} &= \sum_j (R(\varphi)^T)_{ij} R(\varphi)_{jk} \\
&= \sum_j \left[(1-\cos\varphi) n_j n_i + \cos\varphi \delta_{ij} + \sin\varphi \sum_{\ell=1}^3 \varepsilon_{j\ell i} n_\ell\right] \\
&\quad \times \left[(1-\cos\varphi) n_j n_k + \cos\varphi \delta_{jk} + \sin\varphi \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{jmk} n_m\right] \\
&= (1-\cos\varphi)^2 n_i n_k + \cos^2\varphi \delta_{ik} - \sin^2\varphi \sum_{j,m,\ell} \varepsilon_{ji\ell}\varepsilon_{jmk} n_\ell n_m \\
&\quad + (1-\cos\varphi)\left[2\cos\varphi n_i n_k + \sum_{mj}\left(\underbrace{\varepsilon_{jmk} n_m n_j n_i + \varepsilon_{jmi} n_m n_j n_k}_{\sim \vec{n}\times\vec{n}=0}\right)\right] \\
&\quad + \cos\varphi\sin\varphi \sum_m \left(\underbrace{\varepsilon_{imk} n_m + \varepsilon_{kmi} n_m}_{=0}\right) \\
&= n_i n_k \left[1 + \cos^2\varphi - 2\cos\varphi + 2\cos\varphi - 2\cos^2\varphi\right] + \cos^2\varphi\delta_{ik} - \sin^2\varphi \left[n_k n_i - \|n\|_2^2 \delta_{ik}\right] \\
&= (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\delta_{ik} = \delta_{ik}\,.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $R(\varphi) \in O(n)$.

Wir zeigen noch $\det(R(\varphi)) = 1$, indem wir die Determinante von

$$R_{ij}(\varphi) = (1-\cos\varphi) n_i n_j + \cos\varphi \delta_{ij} + \sin\varphi \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ikj} n_k \tag{10.1}$$

bestimmen. Der erste Summand ist eine Rang-Eins-Matrix. Wir können also $\det(A + uv^T) = \det(A)(1 + v^T A^{-1} u)$ mit $u = v = (1-\cos\varphi)^{1/2}\vec{n}$ und

$$A = \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix} + \cos\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 9.1.(b) verwenden, sofern $\det(A) \neq 0$. Mit Sarrus ist

$$\det(A) = \cos^3\varphi + \cos\varphi \sin^2\varphi \cdot (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = \cos^3\varphi + \cos\varphi\sin^2\varphi = \cos\varphi\,.$$

Für $\varphi \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$ ist A invertierbar. Eine längere Rechnung zeigt

$$\langle n, A^{-1} n\rangle = \frac{1}{\cos\varphi}\,.$$

Daraus folgt $\det(R(\varphi)) = \cos\varphi(1 + (1-\cos\varphi)/\cos\varphi) = 1$ für $\varphi \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Für $\varphi \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$ folgt die Behauptung aus der Stetigkeit der Abbildung $\varphi \mapsto \det(R(\varphi))$ (oder durch explizites Rechnen).

(b) Wir rechnen

$$\begin{aligned}
(R(\varphi)\vec{n})_i = \sum_j R(\varphi)_{ij} n_j &= \sum_j \left[(1-\cos\varphi) n_i n_j^2 + \cos\varphi \delta_{ij} n_j + \sin\varphi \sum_k \varepsilon_{ikj} n_k n_j\right] \\
&= (1 - \cos\varphi + \cos\varphi) n_i + \sin\varphi (\vec{n}\times\vec{n})_i = n_i\,.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\vec{n}$ auf sich selbst abgebildet wird, sprich $\vec{n}$ ist die Rotationsachse.

(c) Wir setzen $\vec{n} = 5^{-1/2}(1,2,0)^T$ und $\varphi = \pi/2$ in die Formel für $R(\varphi)$ ein und erhalten

$$R(\pi/2)_{ij} = n_i n_j + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varepsilon_{i,1,j} + 2\varepsilon_{i,2,j}\right) ,$$

sprich

$$R(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/\sqrt{5} \\ 2/5 & 4/5 & -1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} .$$

Mit Sarrus kann man hier einfach $\det(R(\pi/2)) = 1$ nachweisen.

(d) Wir finden den Vektor $\vec{x}$ für den $R(\pi/2)\vec{x} = (2,0,0)^T$ ist durch

$$\vec{x} = R(\pi/2)^{-1}(2,0,0)^T = R(\pi/2)^T(2,0,0)^T = ... = (2/5, 4/5, 4/\sqrt{5}) .$$

11 11. Tutoriumsblatt (1. Februar 2022)

11.1 Motivation

In der Vorlesung haben wir bereits Vektoren $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ kennen gelernt. Wir versuchen uns nun von der klassischen geometrischen Vorstellung des $\mathbb{R}^n$ (insbesondere $n = 2, 3$) zu lösen. Dazu stellen wir uns einen eindimensionalen Zahlenstrahl, auf dem wir in Einserabständen (in irgendwelchen Einheiten, z.B. Centimeter, etc..) Gitterpunkte malen. Wir könnten z.B. bei Null starten und dann noch $n-1$ weitere Punkte malen. Die Werte eines Feldes, z.B. eines Temperaturfeldes, stellen wir durch die Einträge des Vektors x dar. Der Wert der Temperatur ist in der Erfahrung natürlich eine reelle Größe; um auf $\mathbb{C}$ zu kommen, könnten wir noch ein weiteres Feld, z.B. den Luftdruck, einführen. Der Vektor $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ beschreibt also die Temperatur und den Druck an den Punkten $x_1, ..., x_n$ auf dem Zahlenstrahl.

Wenn wir uns dieses Beispiel vorstellen können, so können wir es offenbar verallgemeinern, z.B. auf den zwei- oder höherdimensionalen Fall. Im zweidimensionalen Fall wird der Vektor $(x_1, ..., x_n)$ durch $(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, ..., ..., x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nn})$ ersetzt. (Man könnte sich dieses Konstrukt als Matrix veranschaulichen, was wir hier jedoch nicht tun.) In diesem Fall geben wir also offenbar die Temperatur und den Druck an Punkten auf einem zweidimensionalen Gitter mit n^2 vielen Punkten an, wobei "benachbarte" Punkte einen Abstand Eins zueinander haben.

Dieses Beispiel können wir offenbar weiter auf höhere Dimensionen und unendlich große Gitter verallgemeinern und Vektoren der Bauart $x = (x_j)_{j\in\Omega}$ betrachten, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^d$ eine Teilmenge des d-dimensionalen Gitters und $j = (j_1, ..., j_d)$ ein Multiindex mit $j_1, ..., j_d \in \mathbb{Z}$ ist.

Nehmen wir an, dass zur Zeit $t = 0$ die Temperatur und der Druck durch einen Vektor $x = (x_j)_{j\in\Omega}$ und zu einer späteren Zeit $t = T$ (z.B. am nächsten Tag) durch einen Vektor $y = (y_j)_{j\in\Omega}$ beschrieben wird. Eine natürliche Frage ist nun die Folgende: "Wie messen wir den Unterschied der zwei Temperatur-Luftdruck-Vektoren x und y?" Für $\Omega = \{1, ..., n\}$ haben wir in der Vorlesung bereits mehrere Möglichkeiten kennen gelernt: die $\|\cdot\|_p$-Normen, welche in natürlicher Weise einen Abstandsbegriff induzieren, als Abbildungen von $\mathbb{C}^n$ nach $[0, \infty)$.

11.2 $\ell^p(\Omega)$-Räume

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^d$. Dann definieren wir für $1 \le p < \infty$ und $a := (a_j)_{j\in\Omega}$ mit $j = (j_1, ..., j_d) \in \Omega$ für $j_1, ..., j_d \in \mathbb{Z}^d$ die Abbildungen

$$\|a\|_{\ell^p(\Omega)} := \|a\|_p := \left(\sum_{j\in\Omega} |a_j|^p\right)^{1/p}, \qquad \|a\|_{\ell^\infty(\Omega)} := \|a\|_\infty := \sup_{j\in\Omega} |a_j| \,.$$

In Analysis lernen Sie, dass

$$\ell^p(\Omega) := \{a = (a_j)_{j\in\Omega} \subseteq \mathbb{C} : \ \|a\|_p < \infty\|\}$$

Banachräume, also normierte, vollständige (alle Cauchyfolgen konvergieren) Vektorräume sind. Für $p \in (1, \infty)$ bezeichnet $p' = p/(p-1)$ den zu p *Hölder-konjugierten* Exponenten. Man setzt $p' = 1$, falls $p = \infty$ und $p' = \infty$, falls $p = 1$. Mit dieser Konvention gilt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \,.$$

Für $p = 2$ wird die Norm $\|\cdot\|_2$ durch das kanonische Skalarprodukt

$$\langle a, b\rangle_{\ell^2(\Omega)} = \sum_{j\in\Omega} \overline{a_j} \cdot b_j$$

induziert, sprich

$$\|a\|^2_{\ell^2(\Omega)} = \langle a, a\rangle_{\ell^2(\Omega)} \,.$$

Falls (wie es hier für den $\ell^2(\Omega)$ der Fall ist) die Norm eines Banachraums durch ein Skalarprodukt induziert wird, spricht man von einem *Hilbertraum.*

11.3 Aufgaben

Aufgabe 11.1 (Young)**.** Seien $a, b \geq 0$ und $1 < p < \infty$. Dann gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} .$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^p = b^{p'}$.

Aufgabe 11.2 (Hölder)**.** Seien $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^d$, $1 \leq p \leq \infty$, $a \in \ell^p(\Omega)$ und $b \in \ell^{p'}(\Omega)$. Dann gilt

$$\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_{p'} .$$

Wenn $p \in (1, \infty)$, dann gilt Gleichheit genau dann, wenn die Vektoren $(|a_j|^p)_{j\in\Omega}$ und $(|b_j|^{p'})_{j\in\Omega}$ linear abhängig sind, sprich, wenn es $\lambda > 0$ gibt, sodass $(|a_j|^p)_{j\in\Omega} = \lambda(|b_j|^{p'})_{j\in\Omega}$.

Bemerkung: Für $p = p' = 2$ reduziert sich die Hölder-Ungleichung auf die Cauchy–Schwarz-Ungleichung.

Aufgabe 11.3 (Minkowski / Dreiecksungleichung)**.** Seien $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^d$, $1 \leq p \leq \infty$ und $a, b \in \ell^p(\Omega)$. Dann gilt

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p .$$

Falls $p \in (1, \infty)$, dann besteht Gleichheit genau dann, wenn es $\lambda > 0$ gibt, sodass $a = \lambda b$.

Aufgabe 11.4. Skizzieren Sie die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ für $p = 1, 2, \infty$.

11.4 Lösungen

Lösung 11.1 (Young)**.** OBdA können wir $a, b > 0$ voraussetzen. Seien $t = 1/p$ und dementsprechend $1 - t = 1/p'$. Dann folgt aus der Konkavität von $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dass

$$\log(ta^p + (1-t)b^{p'}) \geq t \log(a^p) + (1-t)\log(b^{p'}) = \log a + \log b = \log(ab) .$$

Wendet man die mononone Funktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ auf die Ungleichung an, folgt die behauptete Ungleichung. Aus obiger Abschätzung folgt, dass $ap = a^p/p + b^{p'}/p'$ genau dann gilt, wenn $a^p = b^{p'}$.

Lösung 11.2 (Hölder)**.** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a, b \neq \vec{0}$ annehmen. Die Ungleichung in den Fällen $p \in \{1, \infty\}$ ist offenbar. Seien

$$\alpha := \frac{a}{\|a\|_p} , \qquad \beta := \frac{b}{\|b\|_{p'}} .$$

Dann sind $\|\alpha\|_p = \|\beta\|_{p'} = 1$. Aus Young folgt

$$\|\alpha \cdot \beta\|_1 = \sum_{j\in\Omega} |\alpha_j||\beta_j| \leq \sum_{j\in\Omega} \left(\frac{|\alpha_j|^p}{p} + \frac{|\beta_j|^{p'}}{p'} \right) = \frac{\|\alpha\|_p}{p} + \frac{\|\beta\|_{p'}}{p'} = 1 .$$

Per Definition von α, β ist dies äquivalent zur Ungleichung

$$\left\| \frac{a}{\|a\|_p} \cdot \frac{b}{\|b\|_{p'}} \right\|_1 \leq 1 ,$$

woraus die behauptete Ungleichung folgt.

In obiger Ungleichung herrscht nach der Optimalitätsuntersuchung der Youngschen Ungleichung genau dann Gleichheit, wenn $|\alpha_j|^p = |\beta_j|^{p'}$ für alle $j \in \Omega$ gilt. Dies ist aber (per Definition der α und β) gleichbedeutend mit der Existenz von $\lambda > 0$, sodass $(|a_j|^p)_{j\in\Omega} = \lambda(|b_j|^{p'})_{j\in\Omega}$.

Lösung 11.3 (Minkowski / Dreiecksungleichung)**.** Für $p = \infty$ folgt die Aussage aus der Dreiecksungleichung, denn

$$\sup_{j\in\Omega} |a_j + b_j| \le \sup_j (|a_j| + |b_j|) \le \sup_j |a_j| + \sup_j |b_j| \,.$$

Für $p = 1$ folgt die Aussage aus der Dreiecksungleichung, denn

$$\sum_{j\in\Omega} |a_j + b_j| \le \sum_{j\in\Omega} (|a_j| + |b_j|) = \sum_j |a_j| + \sum_j |b_j| \,.$$

An dieser Stelle halten wir fest, dass Gleichheit genau dann besteht, wenn $|a_j + b_j| = |a_j| + |b_j|$ für alle $j \in \Omega$ gilt. Das ist gleichbedeutend damit, dass die Argumente (Phasen) aller a_j und b_j übereinstimmen. Für $a_j = |a_j| \mathrm{e}^{i\varphi_j}$ und $b_j = |b_j|\mathrm{e}^{i\psi_j}$ mit $\varphi_j, \psi_j \in [0, 2\pi)$ meinen wir damit, dass $\varphi_j = \psi_j$ für alle $j \in \Omega$ gilt.

Um beliebiges $p \in (1, \infty)$ zu behandeln, verwenden wir die Dreiecksungleichung und Hölder und erhalten (dank $p = p'(p - 1)$)

$$\begin{aligned}\|a + b\|_p^p &= \sum_j |a_j + b_j|^{p-1} \cdot |a_j + b_j| \le \sum_j |a_j + b_j|^{p-1} (|a_j| + |b_j|) \\ &\le \|(a + b)^{p-1}\|_{p'} \cdot (\|a\|_p + \|b\|_p) = \|a + b\|_p^{p/p'} \cdot (\|a\|_p + \|b\|_p) \,.\end{aligned}$$

Dies zeigt die behauptete Ungleichung. Um Gleichheit in obiger Ungleichungskette zu erhalten, müssen sowohl $|a_j + b_j| \le |a_j| + |b_j|$ für alle $j \in \Omega$, als auch Hölders Ungleichung saturiert werden. Wie wir oben gesehen hatten, ist die Dreiecksungleichung genau dann saturiert, wenn alle a_j und b_j dieselben Phasen haben. Andererseits wissen wir, dass Hölders Ungleichung genau dann saturiert wird, wenn sowohl

- $(|a_j + b_j|^{p'(p-1)})_{j\in\Omega} = (|a_j + b_j|^p)_{j\in\Omega}$ und $(|a_j|^p)_{j\in\Omega}$ als auch
- $(|a_j + b_j|^p)_{j\in\Omega}$ und $(|b_j|^p)_{j\in\Omega}$

linear abhängig sind. Zieht man die p-ten Wurzeln, so zeigen diese und die obige Beobachtung zur Optimalität der Dreiecksungleichung, dass Minkowskis Ungleichung genau dann scharf ist, wenn es $\lambda > 0$ gibt, sodass $a = \lambda b$.

Lösung 11.4. Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

- Für $p = 1$ gilt $\|a\|_1 = |a_1| + |a_2| \le 1$ genau dann, wenn $|a_2| \le 1 - |a_1|$, also

  $$a_2 \le 1 - |a_1| \,, \quad \text{falls } a_2 \ge 0 \,, a_2 \ge -1 + |a_1| \,, \quad \text{falls } a_2 \le 0 \,.$$

- Für $p = 2$ erhalten wir die Kreisscheibe.
- Für $p = \infty$ gilt $\|a\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|\} \le 1$ genau dann, wenn $|a_1| \le |a_2| \le 1$ oder $|a_2| \le |a_1| \le 1$. Die Menge $\{a \in \mathbb{R}^2 : \|a\|_\infty \le 1\}$ besteht also aus allen Punkten $(a_1, a_2) \in [-1, 1]^2$.

Folgendes Bild stammt aus dem **Wiki**-Artikel über L^p-Räume.

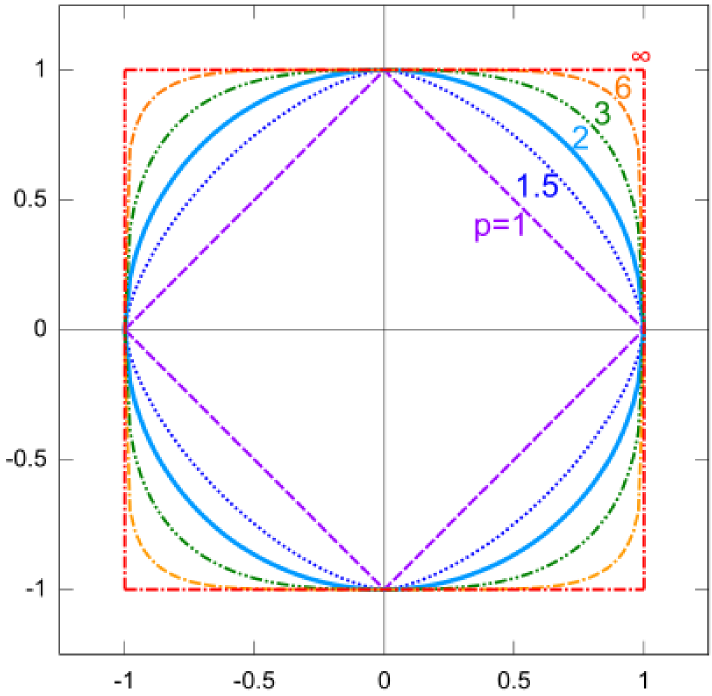

Abbildung 3: p-Normen

12 12. Tutoriumsblatt (8. Februar 2022)

12.1 Aufgaben

Aufgabe 12.1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A an.

Aufgabe 12.2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie $A^n = 0$.

Aufgabe 12.3. Für welche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

diagonalisierbar?

Aufgabe 12.4. Bestimmen Sie für $\varphi \in \mathbb{R}$ die reellen bzw. komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren der Rotationsmatrix

$$R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 12.5. Seien $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Angenommen A oder B sind invertierbar. Zeigen Sie, dass $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ und, dass AB dieselben Eigenwerte wie BA besitzt.

(b) Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{1}_n & A \\ B & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & B \\ A & \lambda \mathbf{1}_n \end{pmatrix} , \quad \lambda \in K$$

und folgern Sie daraus Teil (a) ohne die Voraussetzung, dass A oder B invertierbar ist.

12.2 Lösungen

Lösung 12.1. Wir bestimmen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und erhalten

$$\chi_A(\lambda) = ((a-b) - \lambda) \cdot ((a+b) - \lambda) ,$$

sprich die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = a - b$ und $\lambda_2 = a + b$.

Die zugehörigen Eigenvektoren sind durch $(A - \lambda_j x_j) = 0$ für $j = 1, 2$ bestimmt.

- Falls $b = 0$, so sind $\lambda_1 = \lambda_2$ und $A - \lambda_j = 0$. Ergo ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Menge aller Eigenvektoren von A zum einzigen Eigenwert a.
- Falls $b \neq 0$ prüft man durch Lösen des LGS, dass $M_1 = \mathbb{R} \cdot (1, -1)^T \setminus \{0\}$ und $M_2 = \mathbb{R} \cdot (1, 1)^T \setminus \{0\}$ die Mengen aller Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 sind.

Lösung 12.2. (a) Sei x der zu λ gehörende Eigenvektor, sprich $Ax = \lambda x$. Wir verfahren per Induktion. Der Induktionsanfang ist klar. Angenommen es gelte $A^k x = \lambda^k x$. Dann folgt $A^{k+1}x = A \cdot A^k x = \lambda^k Ax = \lambda^{k+1}x$, was zu zeigen war.

(b) Angenommen $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von A. Dann folgt nach (a), dass λ^n ein Eigenwert von A^n ist. Andererseits ist $A^n = 0$, womit insbesondere $\vec{0} = \mathbb{O}_n \cdot x = A^n x = \lambda^n x$ und damit wiederum $\lambda^n = 0 = \lambda$ folgt.

(c) Schreibt man $A = (a_1, ..., a_n)$ als Zeile ihrer Spalten $a_1, ..., a_n \in K^n$, so folgt $a_1 = 0$ und $a_j = e_{j-1}$ für alle $2 \leq j \leq n$, wobei e_j den j-ten kanonischen Einheitsvektor von K^n bezeichne.

Wir behaupten die folgende etwas stärkere Aussage.

Lemma 12.1. *Für alle $1 \leq k \leq n$ gilt $A^k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, ..., a_n^{(k)})$ mit*

$$a_j^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{für alle } 1 \leq j \leq k\,, \\ e_{j-k} & \text{für alle } k+1 \leq j \leq n\,. \end{cases}$$

Beweis. Per Induktion über $k \leq n$. Der Induktionsanfang $k = 1$ ist klar, denn $A = A^1$. Angenommen, die Behauptung gelte für ein $1 \leq k < n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(a_1^{(k+1)}, ..., a_n^{(k+1)}) &= A^{k+1} \\
&= A \cdot A^k \\
&= A \cdot (a_1^{(k)}, ..., a_n^{(k)}) \\
&= (\underbrace{A \cdot a_1^{(k)}, ..., A \cdot a_k^{(k)}}_{=0}, A \cdot a_{k+1}^{(k)}, ..., A \cdot a_n^{(k)}) \\
&= (\underbrace{0, ..., 0}_{k \text{ mal}}, \underbrace{A \cdot e_1}_{\equiv a_1}, ..., \underbrace{A \cdot e_{n-k}}_{\equiv a_{n-k}})\,.
\end{aligned}$$

- Angenommen $k = n-1$: dann sind die ersten $n-1$ Spalten von A^n gleich Null und für die n-te Spalte gilt $a_n^{(n)} = A \cdot e_1 = a_1 = 0$, sprich alle Spalten von A^n sind Null, womit $A = 0$.
- Angenommen $k \leq n-2$: dann sind $a_1 = 0$, $a_2 = e_1$, ..., $a_{n-k} = e_{n-k-1} = e_{n-(k+1)}$ (was sinnvoll ist, denn $k+1 < n \Rightarrow n-(k+1) \geq 1$). Also

$$a_{k+1}^{(k+1)} = a_1 = 0\,,$$
$$a_j^{(k+1)} = A \cdot a_j^{(k)} \overset{\text{IV}}{=} A \cdot e_{j-k} = a_{j-k} \overset{\text{Def von } A}{=} e_{j-k-1}$$

für alle $j \geq k+2$. Damit ist wie behauptet

$$a_j^{(k+1)} = \begin{cases} 0 & \text{für alle } 1 \leq j \leq k+1\,, \\ e_{j-(k+1)} & \text{für alle } k+2 \leq j \leq n\,. \end{cases}$$

□

Wir kommen nun noch zu den Eigenvektoren x von A zum einzigen Eigenwert Null. Wir beobachten, dass der Spaltenraum S von A gerade

$$S = \text{span}(a_1, ..., a_n) = \text{span}(0, e_1, ..., e_{n-1}) = \text{span}(e_1, ..., e_{n-1})$$

ist, womit $\dim \text{ran}(A) = \text{rang}(A) = n-1$. Daher ist $\ker(A) = 1$. Da $Ae_1 = 0$, folgt dass $\mathbb{R} \cdot e_1 \setminus \{0\}$ die Menge aller Eigenvektoren von A darstellt.

Lösung 12.3. Nach Definition heißt $A \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar, wenn es $S \in GL(n,K)$ gibt, sodass $S^{-1}AS = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix mit $\lambda_1, ...\lambda_n \in K^n$ ist. Äquivalent ist damit die Tatsache, dass es eine Basis $x_1, ..., x_n$ von K^n gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $n = \sum_{j=1}^n m_j$, wobei $m_j := \dim\ker(A-\lambda_j)$ die geometrische Entartung des Eigenwerts λ_j bezeichnet. (Dies ist nicht zu verwechseln mit der algebraischen Entartung k_j, also dem Grad der Nullstelle λ_j des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$, der stets $k_j \geq m_j$ erfüllt.)

Wir bestimmen also zunächst die Eigenwerte und finden, dass das charakteristische Polynom gerade $\chi_A(\lambda) = ... = -(2-\lambda)^2(\lambda+1)$ ist. Die algebraische Vielfachheit von $\lambda_1 = -1$ ist also $k_1 = 1$ und die algebraische Vielfachheit von $\lambda_2 = 2$ ist $k_2 = 2$. Da jede Nullstelle λ_j von $\chi_A(\lambda)$ ein Eigenwert von A ist und es somit mindestens einen Eigenvektor x_j gibt, gilt $m_j \geq 1$ für $j = 1, 2$. Da $1 = k_1 \geq m_1 \geq 1$ ist, folgt $m_1 = 1$.

Es verbleibt also noch m_2 zu bestimmen. Dazu lösen wir das LGS $(A-2)x = 0$ durch Umformen in Zeilenstufenform. Man erhält

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Falls $\alpha \neq 0$, so ist $\mathrm{rang}(A-2) = 2$, womit $m_2 = 1$. In diesem Fall kann A also nicht diagonalisierbar sein. Für $\alpha = 0$ führt eine weitere Umformung auf

$$A - 2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist offenbar $\mathrm{rang}(A-2) = 1$, womit $m_2 = 2$. Wir fassen zusammen:

$$A \text{ diagonalisierbar} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ und } \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Lösung 12.4. Wir rechnen $\chi_{R(\varphi)}(\lambda) = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi$. Die Eigenwertgleichung

$$(\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = 0$$

ist also nur dann reell lösbar wenn $(\cos\varphi-\lambda)^2 = 0$ und $\sin^2\varphi = 0$, sprich, wenn $\lambda = \cos\varphi$ und $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$.

- Falls $\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$: in diesem Fall ist $\cos\varphi = 1$, womit $\lambda = 1$ ein doppelt algebraisch entarteter Eigenwert ist. Da $R(\varphi) = \mathbf{1}_2$, folgt dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Menge aller Eigenvektoren ist.
- Falls $\varphi \in (2\pi+1)\mathbb{Z}$: analog folgt, dass $\lambda = -1$ ein doppelt algebraisch entarteter Eigenwert ist. Da $R(\varphi) = -\mathbf{1}_2$, folgt wieder, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Menge aller Eigenvektoren ist.
- Falls $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$ gibt es keine reellen Lösungen, denn $(\cos\varphi-\lambda)^2 + \sin^2\varphi > 0$. Wir schreiben

  $$(\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = (\cos\varphi - \lambda - i\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi - \lambda + i\sin\varphi),$$

  woraus folgt, dass die komplexen Nullstellen

  $$\lambda_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \lambda_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

  sind. Lösen des LGS zeigt, dass $M_1 = \mu(i,1)^T$ und $M_2 = \mu(-i,1)^T$ mit $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ die Menge aller Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 sind.

Lösung 12.5. (a) Angenommen A ist invertierbar. (Der Fall B invertierbar folgt analog) Dann gilt

$$\begin{aligned}\chi_{AB}(\lambda) &= \det(AB-\lambda) = \det(AB - \lambda AA^{-1}) = \det(A)\det(B-\lambda A^{-1}) \\ &= \det(B-\lambda A^{-1})\det(A) = \det(BA-\lambda) = \chi_{BA}(\lambda),\end{aligned}$$

womit insbesondere die Nullstellen von $\chi_{AB}(\lambda)$ und $\chi_{BA}(\lambda)$, und damit die Eigenwerte von AB bzw. BA dieselben sein müssen.

(b) Wenn wir sukzessive in der Matrix $\begin{pmatrix} \lambda\mathbf{1}_n & A \\ B & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}$ die erste und die $(n+1)$-te Zeile, sodann die zweite und die $(n+2)$-te Zeile, ... die i-te und die $(n+i)$-te Zeile, ..., und schließlich die n-te und die $2n$-te Zeile miteinander vertauschen, so geht $\begin{pmatrix} \lambda\mathbf{1}_n & A \\ B & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}$ in die Matrix $\begin{pmatrix} B & \mathbf{1}_n \\ \lambda\mathbf{1}_n & A \end{pmatrix}$ über.

Da insgesamt n mal die Zeilen vertauscht wurden, gilt

$$\det \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{1}_n & A \\ B & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} B & \mathbf{1}_n \\ \lambda\mathbf{1}_n & A \end{pmatrix} .$$

Nun gehen wir genauso bzgl. der Spalten vor: wir vertauschen in der Matrix $\begin{pmatrix} B & \mathbf{1}_n \\ \lambda\mathbf{1}_n & A \end{pmatrix}$ sukzessive die erste und die $(n+1)$-te Spalte, sodann die zweite und die $(n+2)$-te Spalte, ... die i-te und die $(n+i)$-te Spalte, ..., und schließlich die n-te und die $2n$-te Spalte miteinander. Dabei geht $\begin{pmatrix} B & \mathbf{1}_n \\ \lambda\mathbf{1}_n & A \end{pmatrix}$ in die Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & B \\ A & \lambda\mathbf{1}_n \end{pmatrix}$ über. Da wieder n Spalten vertauscht wurden, gilt

$$\det \begin{pmatrix} B & \mathbf{1}_n \\ \lambda\mathbf{1}_n & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & B \\ A & \lambda\mathbf{1}_n \end{pmatrix}$$

und daher mit voriger Rechnung

$$\det \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{1}_n & A \\ B & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & B \\ A & \lambda\mathbf{1}_n \end{pmatrix} .$$

Nun beweisen wir die Aussage aus Teil (a) ohne die Voraussetzung der Invertierbarkeit von A oder B. Wir argumentieren ähnlich.

- Falls $\lambda = 0$:

$$\chi_{AB}(0) = \det(AB) = \det(BA) = \chi_{BA}(0) .$$

- Falls $\lambda \neq 0$: Wegen Teil (b) in Aufgabe 9.2, $\mathbf{1}_n A = A\mathbf{1}_n$ und, da $\mathbf{1}_n$ invertierbar ist, folgt

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & B \\ A & \lambda\mathbf{1}_n \end{pmatrix} = \det(\mathbf{1}_n(\lambda\mathbf{1}_n) - AB) = \det(\lambda\mathbf{1}_n - AB) .$$

  Ebenso folgt (dank (b) in Aufgabe 9.2) mit $\lambda \neq 0$, dass $\lambda\mathbf{1}_n$ invertierbar ist und wegen $(\lambda\mathbf{1}_n)B = B(\lambda\mathbf{1}_n)$, dass

$$\det \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{1}_n & A \\ B & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} = \det((\lambda\mathbf{1}_n)\mathbf{1}_n - BA) = \det(\lambda\mathbf{1}_n - BA) .$$

  Damit folgt aber die Behauptung

$$\begin{aligned} \chi_{AB}(\lambda) &= \det(AB - \lambda) = \det((-1) \cdot (\lambda - AB)) = (-1)^n \det(\lambda - AB) \\ &= (-1)^n \det \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & B \\ A & \lambda\mathbf{1}_n \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{1}_n & A \\ B & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \det(\lambda\mathbf{1}_n - BA) = \det(BA - \lambda) = \chi_{BA}(\lambda) . \end{aligned}$$

  Also

$$\forall\, \lambda \in K : \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$$

  wie behauptet.

13 13. Tutoriumsblatt (15. Februar 2022)

13.1 Aufgaben (Altklausur WS 15/16)

Aufgabe 13.1. (a) Seien $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ durch $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$, $w_1 = 3\mathrm{e}^{5i\pi/3}$ und $w_2 = 5\mathrm{e}^{3i\pi/2}$ gegeben. Berechnen Sie

$$(i)\ z_1 \cdot \overline{z_2}\,, \qquad (ii)\ |z_2|\,, \qquad (iii)\ \frac{z_1}{z_2}\,, \qquad (iv)\ w_1 \cdot w_2\,, \qquad (v)\ |w_1|\,, \qquad (vi)\ \frac{w_1}{w_2}\,.$$

(b) Sei $C := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sie dürfen annehmen, dass bereits bewiesen wurde, dass C mit Matrixaddition und -multiplikation ein Körper ist. Zeigen Sie, dass

$$J : \mathbb{C} \to C\,, \qquad a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ein Körperisomorphismus ist. (Sprich J ist bijektiv und für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten $J(z + w) = J(z) + J(w)$, $J(z \cdot w) = J(z) \cdot J(w)$, sowie $J(1) = \mathbf{1}$.)

Aufgabe 13.2. (a) Formulieren Sie die Definition von linearer Unabhängigkeit.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge der Vektoren $\{(1, 1, 1)^T, (1, 2, t)^T, (1, 4, t^2)^T\} \subseteq \mathbb{R}$ linear unabhängig?

(c) Zeigen Sie folgende Aussage:

Sind $p, q \in \mathbb{N}$ Primzahlen mit $p \neq q$, dann sind $\ln(p)$ und $\ln(q)$ linear unabhängig über dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

Aufgabe 13.3. Seien $f_1, ..., f_4 \in \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ gegeben durch

$$f_1(x) = \sin(x)\,, \qquad f_2(x) = \cos(x)\,, \qquad f_3(x) = x\sin(x)\,, \qquad f_4(x) = x\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{X} := \{f_1, ..., f_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $X := \operatorname{span}(\mathcal{X})$.

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung des Ableitungshomomorphismus

$$\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}\,, \quad f \mapsto f'$$

bezüglich der Basis $\mathcal{X}$.

(b) Bestimmen Sie $\ker(\Phi)$ und $\operatorname{ran}(\Phi)$.

Aufgabe 13.4. (a) Durch welche drei Eigenschaften ist die Determinantenabbildung

$$\det : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$$

für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ und jeden Körper $\mathbb{F}$ eindeutig bestimmt?

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}\,.$$

Aufgabe 13.5. (a) Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Welche Eigenschaften muss ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ besitzen?

(b) Sei $X := C([-1,1] : \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[-1,1]$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx\,, \quad f, g \in X\,.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U := \operatorname{span}(\{x, x^2, x^3\})$.

Aufgabe 13.6. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}\,.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi(\lambda)$ der Matrix A und bestimmen Sie ihre Eigenwerte.

(b) Bestimmen Sie alle zugehörigen Eigenvektoren. Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist und begründen Sie Ihre Antwort.

Literatur

[Ahl78] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable.

[Beu94] Albrecht Beutelspacher. *Lineare Algebra.* Vieweg, 1994.

[BN10] Joseph Bak and Donald J. Newman. *Complex Analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2010.

[Dym13] Harry Dym. *Linear Algebra in Action*, volume 78 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2013.

[Fis05] G. Fischer. *Lineare Algebra.* Vieweg-Studium : Grundkurs Mathematik. Vieweg, 2005.

[MH87] Jerrold E. Marsden and Michael J. Hoffman. *Basic Complex Analysis.* W. H. Freeman and Company, New York, second edition, 1987.

[MK08] Gerhard Michler and H.-J. Kowalsky. *Lineare Algebra.* De Gruyter, 2008.

[SS03] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Complex Analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.