Tutorium 1 LA I

Klassische Logik: – Zweiwertigkeitsprinzip: Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch

– Extensionalitätsprinzip: Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ist ~~dann~~ eindeutig durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen bestimmt

Teilbereiche d. klassischen Logik

~~Prädikatenlogik~~

- Aussagenlogik: Aussagen und Verknüpfungen v. Aussagen zu neuen Aussagen
- Prädikatenlogik: Erweiterung d. Aussagenlogik; beschäftigt sich mit innerer Struktur v. Aussagen
  ↳ Relationen $=, \leq, \geq, \dots$
- Klassenlogik: Erweiterung d. Prädikatenlogik um Begriffe d. Mengenlehre

Grundlegender Begriff ist die Aussage

"Def" Eine Aussage ist ein aus Wörtern und/oder math. Zeichen aufgebauter Ausdruck, von dem es möglich ~~ist~~ und sinnvoll ist zu sagen, dass dieser Ausdruck wahr oder falsch ist

Bsp 5 ist eine Primzahl ✓

Ist 5 eine Primzahl? X Ist es ~~sinnvoll~~ wahr, dass gilt: "Ist 5 eine Primzahl?"?

$\underbrace{x \geq 5}_{\text{wahr für } x=6, \text{ aber falsch für } x=3}$ X ← Aussageform Wahrheitswert hängt von Belegung von x ab

Junktoren verbinden Aussagen oder stellen diese in Beziehung; sind Symbole in Aussagenlogik; sie (iungere → verknüpfen, verbinden) ~~ist Bindewörter~~

Junktoren können mit Bindewörtern verglichen werden; letztere sind aber oft ambivalent; Bsp • Gehst Du ins Kino oder bleibst Du daheim?
• Freust Du dich über den Lottogewinn oder eher über deine neue Freundin

⟹ Junktoren verbinden nur Aussagen

Bsp • A und B: 36 ist durch 2 teilbar $\wedge$ 5 ist gerade

• Wenn A, dann B: 36 ist durch 2 teilbar $\Rightarrow$ 5 ist gerade

• 7 und 42 sind natürliche Zahlen; Obacht! Hier ist "und" kein Junktor
Satzfragment

⟶ besser: 7 ist eine natürliche Zahl und 42 ist eine nat. Zahl

Bspe für Junktoren

Negation: $\neg$

kehrt Wahrheitswert einer Aussage um

A	$\neg A$
w	f
f	w

Konjunktion $\wedge$ ("und"-Verknüpfung)

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
f	w	f
w	f	f
f	f	f

Disjunktion $\vee$ ("oder"-Verknüpfung)

A	B	$A \vee B$
w	w	w
f	w	w
w	f	w
f	f	f

Implikation $\Rightarrow$

~~"wenn.., dann.." oder "A ist hinreichen~~

- Wenn A, dann B
- A ist hinreichend für B
- B ist notwendig für A

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B \cancel{\Leftrightarrow (\neg B \vee A)}$$

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
w	w	f	w
f	w	w	w
w	f	f	f
f	f	w	w

Bsp Es regnet, also ist die Straße nass
Wenn es regnet, dann ist die Straße nass

Obacht Ex falso quodlibet!
Die Straße kann auch nass sein, obwohl es nicht geregnet hat, z.B. weil die Straßenreinigung am Werken war.
→ Es muss kein kausaler Zusammenhang zw. A und B bestehen!!
"5 ist gerade ⇒ 42 ist gerade" ist eine wahre Aussage

Äquivalenz $\Leftrightarrow$

A gilt genau dann wenn B gilt

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B) \Leftrightarrow (\underbrace{A \Rightarrow B}_{\neg A \vee B} \wedge \underbrace{B \Rightarrow A}_{\neg B \vee A}) \Leftrightarrow ((\neg A \wedge A) \vee (\neg B \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B))$$
$$= (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
f	w	f
w	f	f
f	f	w

A und B müssen denselben Wahrheitswert haben

Bindungsregeln für Junktoren (Präzedenzregeln) (oft aber nicht immer)

(Wie bei Punkt vor Strich)

1) Negation
2) Konjunktion
3) Disjunktion
4) Implikation
5) Äquivalenz

Bsp $\neg A \wedge B \Rightarrow B \vee C \wedge A$

heißt $((\neg A) \wedge B) \Rightarrow (B \vee (C \wedge A))$

Außerdem bedeutet $A \to B \Rightarrow C \Rightarrow D$ $\quad A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))$

Wahrheitstabelle → Zettel

Tautologien Aussagen, die immer wahr sind

„Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter, oder es bleibt wie es ist"

$H \Rightarrow \overbrace{X \vee \neg X}^{\text{immer wahr! egal was } H \text{ ist}}$

H .. Hahn kräht
X .. Wetter ändert sich

H	X	¬X	$H \Rightarrow X \vee \neg X$
w	w	w	w
w	w	f	w
w	f	w	w
w	f	f	w
f	w	w	w
f	w	f	w
f	f	w	w
f	f	f	w

Wichtige Tautologie: Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$
ist Tautologie gdw A und B äquivalent sind

Bsp $A \Rightarrow B$ $\quad (\Leftrightarrow \neg A \vee B$

$\Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ (Kontraposition / Widerspruch)

$\Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge A)$

Überprüfung einer Tautologie (in der letzten Spalte steht immer wahr)
- Wahrheitstabelle

$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ Tautologie

~~A B (A∨B)⇔(B∨A)~~

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
w	w	w	w	w
f	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	f	f	f	w

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$ keine Tautologie

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w
f	w	w	f	$\boxed{f}$
w	f	f	w	$\boxed{f}$
f	f	w	w	w

- Ermittlung einer Tautologie mittels Äquivalenzumformungen

Bsp Wir beweisen die Kontraposition $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

mittels (1) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

(2) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

Also $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow B \vee \neg A \Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg(\neg(\neg A))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg A$

$\Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

Liste von Tautologien

Assoziativgesetze für Konjunktion / Disjunktion

$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

Kommutativgesetze

$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A \qquad A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

Distributivgesetze $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (B \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Absorptionsgesetze $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

Idempotenzgesetze $A \vee A \Leftrightarrow A$

$A \wedge A \Leftrightarrow A$

Doppelte Verneinung $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

Satz vom ausgeschlossenen Dritten $A \vee \neg A$

Satz vom Widerspruch $\neg(\neg A \wedge A)$

De-Morgan $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Negation von Implikation und Äquivalenz

$\cancel{\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A}$

$\cancel{\Leftrightarrow B \vee \neg A}$

$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Quatore

legen fest für welche Objekte x einer Grundmenge eine Aussageform $A(x)$ gilt.
Eine Aussageform $A(x)$ ist dabei ein sprachlich sinnvoller Ausdruck, in dem die Variable x vorkommt und durch Belegung dieser Variablen mit einem konkreten Wert in eine Aussage übergeht.

Bsp von x-abhängigen Aussageformen $A(x)$
- x ist eine gerade Zahl
- x ist ein Mensch

Quantoren binden Aussageformen

Bsp $\underbrace{\text{Für alle}}_{\text{Forall - Quantor}}$ $\underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{Variable}}$ gilt, dass $\underbrace{x^2 \leq 0}_{\text{Aussageform } A(x) \text{ in Abh. von } x}$ ist $\quad \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$

Es gibt $x \in \mathbb{R}$, sodass $x^2 \leq 0$. $\quad \exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$

Hinweis "Es gibt..." meint immer "Es gibt mindestens ein..."

Es gibt genau ein $x \in \mathbb{R}$ sodass $x^2 \leq 0$ $\quad \exists! x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$

Definition des eindeutigen Existenzquantors:

$$\exists! x : A(x) :\Leftrightarrow \left(\exists x : A(x)\right) \wedge \forall x \forall y : \left(\left(A(x) \wedge A(y)\right) \Rightarrow x = y\right)$$

→ Beweis von Existenz und Eindeutigkeit. Erst Existenz zeigen. Eindeutigkeit mit Annahme, dass für alle x, y ~~gibt sich~~ die Aussage $A(x)$ und $A(y)$ gelten, dann $x = y$.

Def Eine Variable heißt gebunden, wenn sie durch einen Quantor eingeführt wurde und im Wirkungsbereich ~~eines~~ dieses Operators liegt. Andernfalls heißt eine Variable frei.

Bsp $\forall x : \underbrace{x}_{\text{gebunden}} + \underbrace{y}_{\text{frei}} = 42$

$\underbrace{x}_{\text{frei}} = 4 \Rightarrow \exists x : \underbrace{x}_{\text{gebunden}} + 4 = 8$

$\exists x : (\underbrace{y}_{\text{frei}} + \underbrace{x}_{\text{gebunden}} = 5 \wedge \forall y : x \cdot \underbrace{y}_{\text{gebunden}} = 8)$ ← Bsp. für schlechte Notation!

↳ besser: $\exists x : \left(y + x = 5 \wedge \forall z : x \cdot z = 8\right)$

Aussagen negieren

$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

$\neg(A \wedge B) \quad \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \quad \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$

$\Leftrightarrow \cancel{A \wedge B}\ (A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow B$

also $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow B$ oder $A \Leftrightarrow \neg B$.

$\cancel{\neg(\forall x: A(x)) \Leftrightarrow \exists x: \neg A(}$

(Für alle x gilt $A(x)$) ist falsch $\Leftrightarrow$ Es gibt x, für die A falsch

$\neg(\forall x: A(x)) \Leftrightarrow \exists x: \neg A(x)$

$\neg(\forall x \in M: A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M: \neg A(x)$

$\neg(\exists x \in M: A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M: \neg A(x)$

$\cancel{\exists}\, x \in M: A(x)$

(Es gibt x, für die $A(x)$ gilt) ist falsch $\Leftrightarrow$ Es gibt kein x für das $A(x)$ gilt

$\Leftrightarrow$ Für alle x gilt $\neg A(x)$

$\Leftrightarrow$ Für alle x ist $A(x)$ falsch

$\neg(\exists! x: A(x)) \Leftrightarrow \forall x: \neg A(x) \vee \exists x,y: (A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y)$ „Es gibt kein oder mindestens zwei x, sodass $A(x)$ gilt."

Bsp: Negiere „Zu jedem x gibt es ein y, das kleiner als x ist"

$\forall x\ \exists y: y < x$

$\neg(\forall x\ \exists y: y < x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg(\exists y: y < x) \Leftrightarrow \exists x\ \forall y: \neg(y < x) \Leftrightarrow \exists x\ \forall y: y \geq x$

- Negiere „Für alle $\epsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|a - a(n)| < \epsilon$ gilt"

$\cancel{\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \Rightarrow |a(n) - a| < \epsilon}$

$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n: n \geq N \Rightarrow |a - a(n)| < \epsilon$

$\neg(\ldots)$

$\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}: \neg(\forall n \geq N \Rightarrow |a(n) - a| < \epsilon)$

$\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}: \exists n \geq N \wedge |a(n) - a| \geq \epsilon$

„Es gibt $\epsilon > 0$ s.d. für alle $N \in \mathbb{N}$ es ~~gibt, das sowohl $n \geq N$ als auch $|a - a(n)| \geq \epsilon$~~ ein $n \geq N$ gibt mit $|a - a(n)| \geq \epsilon$

Aussagenlogische Herleitungsregeln

1 Beweis einer Konjunktion: Um $A \wedge B$ zu zeigen, zeigt man einerseits A und andererseits B

2 Vorwärtsschließen. Sind A und $A \Rightarrow B$ gegeben, so können wir daraus B schließen.

Das beruht auf der Tautologie $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
w	w	w	w	w
f	w	w	f	w
w	f	f	f	w
f	f	w	f	w

3 Beweis einer Implikation: Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen, nehmen wir an, dass A gilt. Unter möglicher Verwendung von A wird dann B gezeigt. Damit ist $A \Rightarrow B$ gezeigt.

(Ob A wirklich wahr ist, ist eine andere Sache. Z.B. hat die Riemann-Vermutung viele Konsequenzen...)

4 Beweis einer Negation: Um $\neg A$ zu zeigen, nimmt man an, dass A gilt und erzeugt einen Widerspruch ($\equiv$ die immer falsche Aussage, das Gegenstück zur Tautologie) zu zeigen.

5 Indirekter Beweis: Um A zu zeigen, nimmt man an, dass $\neg A$ gilt. Unter möglicher Verwendung von $\neg A$ wird dann ein Widerspruch gezeigt. Damit ist A gezeigt.

(Dem indirekten Beweis liegt die Tautologie $(\neg A \Rightarrow \underset{\text{Widerspruch}}{\perp}) \Rightarrow A$ zugrunde

A	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow \perp$	$(\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A$
w	f	w	w
f	w	f	w

6 Beweis durch Kontraposition: Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen, nehmen wir an, dass $\neg B$ gilt. Unter möglicher Verwendung von $\neg B$ wird $\neg A$ gezeigt. (Dabei verwenden wir $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$)

7 Beweis durch Fallunterscheidung: Um eine Aussage B zu zeigen, zeigt man zunächst für geeignete Aussagen $A_1, \ldots, A_n$, dass $A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \ldots \vee A_n$ wahr ist. Dann

1. Fall: Wir nehmen A_1 an und zeigen B
2. Fall: — " — A_2 — " —

⋮

n. Fall: — " — A_n — " —

Damit ist B gezeigt.

Dieser Herleitungsregel liegt die Tautologie $(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \wedge (A_1 \Rightarrow B) \wedge \ldots \wedge (A_n \Rightarrow B) \Rightarrow B$

8 <u>Beweis einer Disjunktion - Strategie 1</u> (Zurückführen auf eine Implikation)

Um $A \vee B$ zu zeigen, nehmen wir zunächst $\neg A$ an. Unter dieser Annahme zeigen wir B. Damit ist $A \vee B$ gezeigt.
Dieser Herleitungsregel liegt ~~zg~~ zugrunde, dass $A \vee B$ und $\neg A \Rightarrow B$ denselben Wahrheitswert haben.

9 <u>Beweis einer Disjunktion - Strategie 2</u> (Fallunterscheidung)

Um $A \vee B$ zu zeigen machen wir eine Fallunterscheidung mit einer geeigneten Aussage C
<u>1. Fall</u> Wir nehmen C an. Unter dieser Annahme zeigen wir A
<u>2. Fall</u> — " — $\neg C$ an. — " ———————— B
Damit ist ~~B~~ $A \vee B$ gezeigt.
Dieser Herleitungsregel liegt die Tautologie $(C \Rightarrow A) \wedge (\neg C \Rightarrow B) \Rightarrow A \vee B$ zugrunde

10 <u>Beweis einer Äquivalenz</u> Man zeigt $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$. Dieser Herleitungsregel liegt die Tautologie $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ hat selben Wahrheitswert wie $A \Leftrightarrow B$

Noch mehr zur Prädikatenlogik: Negation des $\forall$-Quantors
$\neg(\forall x : A(x))$ ~~⇔~~ hat selben Wahrheitswert wie $\exists x : \neg A(x)$

"$\Rightarrow$" Wenn $(\forall x : A(x))$ nicht gilt, dann muss es mindestens ein x geben, sodass $A(x)$ nicht gilt; für dieses x gilt $\neg A(x)$. Ergo $\exists x : \neg A(x)$

"$\Leftarrow$" Wenn $\exists x : \neg A(x)$ gilt, gibt es x, sodass $A(x)$ nicht gilt. Also kann $A(x)$ nicht für alle x gelten, d.h. $\neg(\forall x : A(x))$ gilt.

<u>Langer Beweis</u> "$\Rightarrow$" Zu zeigen ist $(\neg(\forall x : A(x))) \Rightarrow \exists x : \neg A(x)$
Mit Kontraposition ist das gleichwertig zu
$$\neg(\exists x : \neg A(x)) \Rightarrow \forall x : A(x)$$
Nehmen wir also $\neg(\exists x : \neg A(x))$ an. Dies ist gleichbedeutend mit
$\exists x : A(x) \Rightarrow \perp$ $(*)$ (denn mit ~~B~~ $B := \neg(\exists x : A(x))$ haben wir die Wahrheitstabelle

B	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \perp$
w	f	w
f	w	f

Es verbleibt zu zeigen $\forall x$ gilt $A(x)$. Wir beweisen das indirekt und nehmen an, $\neg A(x)$ wäre wahr. Das bedeutet aber $\exists x : \neg A(x)$. Das gibt jedoch, gemäß unserer Annahme $(*)$ einen Widerspruch. Also gilt $A(x)$.

"$\Leftarrow$" sparen wir uns $\rightarrow$ Ana I Skript von Merkl 2016/2017

Damit lässt sich die Negation des $\exists$-Quantors durch Negation der Negation von $\forall$ erklären

$$\neg(\exists x: A(x)) \Leftrightarrow \forall x: \neg A(x) \quad (\text{denn } \neg(\forall x: \neg A(x)) \Leftrightarrow \exists x: A(x))$$

<u>Wichtig</u> Quantorenreihenfolge beachten.

<u>Bsp</u> $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R}: (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon)$ (pktweise Stetigkeit)

$$\neg(\ldots) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists y \in \mathbb{R}: \underbrace{\neg(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon)}_{\Leftrightarrow\ |x-y| < \delta\ \wedge\ |f(x)-f(y)| \geq \epsilon}$$

Bsp $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \exists m \in \mathbb{N}_0: m > n$ vs $\exists m \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0: m > n$

Für alle natürlichen Zahlen / für jede <u>feste</u> natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine (möglicherweise n-abhängige) natürliche Zahl m, die größer ist ✓

Ok: für festes $n \in \mathbb{N}$ können wir zB $m = n+1$ wählen

Es gibt eine natürliche Zahl m, die größer als jede andere natürliche Zahl n ist.

→ Quatsch! Gegeben $m \in \mathbb{N}_0$, nimm $n = m$, dann ist $m > n$ falsch

Bsp "$\forall x > 0\ \exists M > 0\ \forall y > 0: |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x-y|$" vs "$\exists M > 0\ \forall x > 0\ \forall y > 0: |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x-y|$"

Für jedes feste x ist die Steigung der Sekante durch $(x, \sqrt{x})$, $(y, \sqrt{y})$ nach oben beschränkt.

<u>Bew</u> Sei $x > 0$ gegeben. Sei $M = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Sei $y > 0$ gegeben.

$$\Rightarrow \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{\sqrt{x}} = M|x-y|$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq M|x-y| \quad \square$$

<u>Alt. Bew</u> $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{|x-y|}{\sqrt{x}} \leq M|x-y|$ solange $M \geq \sqrt{x}$ gewählt wird. $\square$

<u>Upshot</u> M darf von x abhängen, aber nicht von y.

Hier muss es eine universelle Steigung geben, die weder von x, noch von y abhängt! Heuristisch ist dann klar, wenn man x und y nahe zusammenschiebt und $x, y \sim 0$, dann wird die Sekantensteigung beliebig groß.

<u>Beweis der Unwahrheit</u> Wir zeigen

$$\neg(\ldots) \Leftrightarrow \forall M\ \exists x > 0\ \exists y > 0: |\sqrt{x} - \sqrt{y}| > M|x-y|$$

Wähle z.B. $x = \frac{a^2}{M^\alpha}$, $y = \frac{c^2}{M^\alpha}$, $c < a$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{a-c}{M^{\alpha/2}}, \quad M|x-y| = \frac{(a^2-c^2)M}{M^\alpha}$$

$$\frac{a-c}{M^{\alpha/2}} \geq (a^2-c^2) M^{1-\alpha} \Leftrightarrow M^{\frac{\alpha}{2}-1} \geq \frac{a^2-c^2}{a-c} = a+c$$

→ Wähle $\alpha = 2$, $c = \frac{1}{10}$, $a = \frac{2}{10}$ $\square$

Entfernung des $\forall$-Quantors aus einer Behauptung

Zu zeigen: $\forall x$ vom Typ T: $B(x)$ gegeben A

→ sei also x vom Typ T gegeben.

Noch zu zeigen: $B(x)$ gegeben A und x vom Typ T (x ist jetzt fest)

Entfernung des $\exists$-Quantors aus einer Behauptung

Zu zeigen: $\exists x$ vom Typ T: $B(x)$ gegeben A

→ wähle x vom Typ T

Noch zu zeigen: $B(x)$ gegeben A und x = Term (fixiert/gewählt)

Entfernung des $\forall$-Quantors aus einer gegebenen Aussage

Zu zeigen: B. Gegeben: A, $\forall x$ vom Typ T: C

→ wir wenden die gegebene $\forall$..-Aussage auf ein bestimmtes x = Term an

Noch zu zeigen: B. Gegeben A, $C(\text{Term})$, $\forall x$ vom Typ T: $C(x)$

↑ kommt als neue gegebene Aussage hinzu

~~Entfer~~

Entfernung des $\exists$-Quantors aus einer gegebenen Aussage

Zu zeigen: B. Gegeben A, $\exists x$ vom Typ T: $C(x)$

→ nimm also x vom Typ T und nenne es y (Hierbei muss y eine neue, noch nicht frei vorkommende Variable sein)

Noch zu zeigen: B. Gegeben: A, y vom Typ T, $C(y)$

→ wir könnten bei "Gegeben" auch schreiben $\exists x: C(x)$; liefert jedoch keine weiteren Informationen, da $C(y)$ bereits für den gewählten $x = y$ gilt.