Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2021/22

Lineare Algebra 1
Vorbereitendes Präsenzübungsblatt 2

Ausgabe am 01.11.2021, keine Bewertung, Bearbeitung in den kleinen Übungen vom 08.11.-12.11.2021

Aufgabe K0.4
Untersuchen Sie die folgenden Relationen jeweils auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Welche davon sind also Äquivalenzrelationen?

(i) $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{\mathrm{w},\mathrm{f}\}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : \; (R(x, y) = \mathrm{w} \; :\Leftrightarrow \; |x - y| \leq 1)$

(ii) $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{\mathrm{w},\mathrm{f}\}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : \; R(x, y) = \mathrm{f}$
(die leere Relation auf $\mathbb{R}$)

(iii) $R : (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \to \{\mathrm{w},\mathrm{f}\}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \; [R(n, m) = \mathrm{w} \; :\Leftrightarrow \; \mathrm{ggT}(n, m) > 1]$
($\mathrm{ggT}(n, m)$ bezeichne den größten gemeinsamen Teiler von n und m)

Aufgabe K0.5
Sei M eine Menge.
Eine Relation " $\sim$ " heißt **Totalordnung**, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

$\forall x \in M :$	$x \sim x$	Reflexivität
$\forall x, y \in M :$	$(x \sim y) \wedge (y \sim x) \Rightarrow x = y$	Antisymmetrie
$\forall x, y, z \in M :$	$(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim z$	Transitivität
$\forall x, y \in M :$	$(x \sim y) \vee (y \sim x)$	Totalität

In diesem Fall bezeichnen wir " $\sim$ " auch als " $\leq$ ".

Andererseits heißt eine Relation " $\sim$ " **strikte Totalordnung**, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

$\forall x, y, z \in M :$	$(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim z$	Transitivität
$\forall x, y \in M :$	entweder $(x \sim y)$ oder $(y \sim x)$ oder $(x = y)$	Trichotomie

In diesem Fall wird " $\sim$ " auch als " $<$ " denominiert.
Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

(i) Sei " $<$ " eine strikte Totalordnung, dann ist " $\leq$ ", definiert durch
$$x \leq y :\Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$$
für alle $x, y \in M$, eine Totalordnung.

(ii) Sei " $\leq$ " eine Totalordnung, dann ist " $<$ ", definiert durch
$$x < y :\Leftrightarrow (x \leq y) \wedge (x \neq y)$$
für alle $x, y \in M$, eine strikte Totalordnung.