LA I – 1. Tutorium 2.11.2021

Klassische Logik

Zweiwertigkeitsprinzip

Extensionalität

Teilbereiche:
- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik
- Klassenlogik

<u>Def</u> Eine <u>Aussage</u> ist ein aus Wörtern und/oder math. Zeichen zusammengesetzter Ausdruck, von dem es möglich und sinnvoll ist zu sagen, dass dieser Ausdruck wahr oder falsch ist.

<u>Bsp</u>

$\left.\begin{array}{l}\text{5 ist eine Primzahl.}\\ \text{6 ist eine Primzahl.}\end{array}\right\}$ Aussagen

$\left.\text{Ist 5 eine Primzahl?}\right\}$ keine Aussage

$x \geq 5$ Aussagenform. keine Aussage.

Junktoren (Verknüpfungen oder Verbindungen)

<u>Konjunktion</u>: Aussage A <u>und</u> Aussage B: $A \wedge B$
<u>Bsp</u> 36 ist durch 2 teilbar <u>und</u> 5 ist gerade.

<u>Disjunktion</u>: Aussage A <u>oder</u> Aussage B: $A \vee B$
Bsp 36 ist durch 2 teilbar <u>oder</u> 5 ist gerade

<u>Implikation</u>: Wenn A gilt, dann gilt B
<u>Bsp</u>
- Wenn 4 gerade, dann ist 16 gerade.
- Wenn 5 gerade, dann ist 16 gerade.

A ist hinreichend für B
B ist notwendig für A.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
f	w	w
w	f	f
f	f	w

Es hat geregnet, also ist die Straße nass

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$ A gilt genau dann, wenn B gilt.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
f	w	f
w	f	f
f	f	w

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Negation

A	$\neg A$
w	f
f	w

Wahrheitswert einer Aussage wird umgekehrt.

Behauptung: $A \Rightarrow B$ hat immer denselben Wahrheitswert wie $\neg A \vee B$. (Beweis mit Wahrheitstabelle)

Bindungsregeln für Junktoren

1) Negation
2) Konjunktion
3) Disjunktion
4) Implikation
5) Äquivalenz

Bsp $\neg A \vee B \Rightarrow B \vee C \wedge A$

$\Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \Rightarrow (B \vee (C \wedge A))$

Tautologie $H \Rightarrow X \vee \neg X$

Hahn kräht — es regnet — es regnet nicht

H	X	$\neg X$	$H \Rightarrow X \vee \neg X$
w	w	w	
w	w	f	
w	f	w	
f	w	w	
w	f	f	
f	w	f	
f	f	w	
f	f	f	

Liste v. Tautologien

Assoziativgesetze für $\vee$ und $\wedge$

$(A \vee B) \vee C$ hat selben W-Wert wie $A \vee (B \vee C)$
$(A \wedge B) \wedge C$ — " — $A \wedge (B \wedge C)$

Kommutativgesetze
$A \vee B$ — " — $B \vee A$
$A \wedge B$ — " — $B \wedge A$

Distributiv: $A \vee (B \wedge C)$ — " — $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \wedge (B \vee C)$ — " — $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Absorptionsgesetze: $A \vee (A \wedge B)$ — " — A
$A \wedge (A \vee B)$ — " — A

Idempotent: $A \vee A$ — " — A

$A \wedge A$ — " — A

Doppelte Verneinung $\neg(\neg A)$ — " — A

Zweiwertigkeitsprinzip: $A \vee \neg A$

$\neg(\neg A \wedge A)$

De-Morgan: $\neg(A \vee B)$ — " — $\neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B)$ — " — $\neg A \vee \neg B$

Negation v. Implikation und Äquivalenz $\neg(A \Rightarrow B)$ — " — $A \wedge \neg B$

$\neg(A \Leftrightarrow B)$ — " — $\neg A \Leftrightarrow B$

$\neg(A \Leftrightarrow B)$ — " — $A \Leftrightarrow \neg B$

Quatoren:

$\neg(\forall x : A(x))$ hat selben W-Wert: $\exists x : \neg A(x)$

$\neg(\exists x : B(x))$ — " — $\forall x : \neg B(x)$

Auswahl v. Beweistechniken

- Indirekter Beweis: Um eine Aussage A zu zeigen nimmt man an, dass $\neg A$ gilt. Unter möglicher Benutzung von $\neg A$ wird ein Widerspruch gezeigt

"die immer falsche Aussage"

beruht auf der Tautologie $(\neg A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A$

A	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow \bot$	$(\neg A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A$
w	f	w	w
f	w	f	w

Kontraposition (Bew durch Widerspruch)

Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen, nimmt man $\neg B$ an.

Unter möglicher Verwendung von $\neg B$ wird $\neg A$ gezeigt.

$A \Rightarrow B$ hat selben W-Wert wie $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Fallunterscheidung Um eine Aussage B zu zeigen, zeigt man

zunächst für geeignete Aussagen $A_1 .. A_n$

$$\begin{array}{ll} A_1 \Rightarrow B & \text{und} \quad A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \text{ wahr} \\ A_2 \Rightarrow B & \\ \vdots & \\ A_n \Rightarrow B & \end{array}$$

$$\vDash \Big((A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \wedge (A_1 \Rightarrow B) \wedge (A_2 \Rightarrow B) \wedge \dots \wedge (A_n \Rightarrow B) \Rightarrow B \Big)$$

Tautologie.

Tutoriumsaufgaben

1.3 a) $(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad x \geq -1, \quad n \in \mathbb{N}_0$

Induktionsstart: $n = 0 \qquad 1 \geq 1 \quad \checkmark$

$$\left(\begin{array}{ll} n=1 & 1+x \geq 1+x \\ n=2 & 1+x^2+2x \geq 1+2x \end{array} \right)$$

Schritt $n \mapsto n+1$

z.z. $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \overset{(*)}{\geq} (1+nx)(1+x)$$

Induktionshypothese, $x \geq -1$

(für $x < -1$ geht Ungleichung (*) in falsche Richtung)

$$= 1 + x(n+1) + nx^2$$
$$\geq 1 + (n+1)x$$

Die behauptete numerische Ungl. ist von der Form

$$n^n \geq (n+1)^{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

$(1+x)^n \geq 1+nx$

$$\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n-1}} \cdot n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n-1} \cdot n = \Big(\underbrace{1 + \frac{-1}{n+1}}_{=1+x}\Big)^{n-1} \cdot n$$

$$\overset{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 + (n-1)\cdot\frac{-1}{n+1}\right)\cdot n = \ldots = \frac{2n}{n+1} \geq 1$$

$$\Rightarrow n^n \geq (n+1)^{n-1}$$

$\square$

LA I – 2. Tutorium

9.11.2021

Gruppe $(G, \circ)$ $\quad \circ: G \times G \to G$
Menge $\quad (a,b) \mapsto a \circ b$

$a, b, c \in G: \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ Assoziativität

$\forall a \in G: \exists e \in G: \quad a \circ e = a = e \circ a$

$a \in G: \exists b \in G: \quad a \circ b = b \circ a = e$

$m \in \mathbb{N}: \quad (\mathbb{Z}, \sim): \quad a \sim b :\Leftrightarrow m \mid b - a$
$\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z}: b - a = h \cdot m$

$[a] = \{x \in \mathbb{Z}: x \sim a\}$
$= \{x \in \mathbb{Z}: m \mid x - a\} = \{x \in \mathbb{Z}: \exists h \in \mathbb{Z}: x = a + h \cdot m\}$
$= a + m\mathbb{Z}$

$[0], [1], [2], \dots, [m-1]$

$\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], \dots [m-1]\}$

Bsp $(\mathbb{Z}_m, +) \quad [a] + [b] := [a+b]$

Warum bildet $(\mathbb{Z}_m, +)$ eine Gruppe?

$(\mathbb{Z}_p \setminus [0], \cdot)$ p ist eine Primzahl
$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$

Warum bildet $(\mathbb{Z}_p, \cdot)$ eine Gruppe? (Wie viele Elemente?)
(Sie hat $p-1$ Elemente)

Def (Gruppenhomomorphismus / -isomorphismus)

Seien $(G, \circ)$, $(H, *)$ zwei Gruppen

a) $\varphi: G \to H$ heißt Gruppenhomomorphismus, wenn

$\forall a, b \in G: \quad \varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

b) $\varphi: G \to H$ heißt Gruppenisomorphismus, falls φ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus.

Bsp

$[a]+[b] = [a+b]$

$(\mathbb{Z}_4, +) \underset{\text{isomorph}}{\cong} (\mathbb{Z}_5 \setminus [0], \cdot) \qquad [j] = \bar{j}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\Updownarrow$ 3. und 4. Zeile bzw Spalte vertauschen

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

$(\mathbb{Z}_4, +) \cong (\mathbb{Z}_5 \setminus [0], \cdot)$ mit Gruppenisomorphismus

$\varphi: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_5 \setminus [0]$

$[h] \mapsto [2^h]$

$\varphi(\bar{0}) = \bar{1}$

$\varphi(\bar{1}) = \bar{2}$

$\varphi(\bar{2}) = \bar{4}$

$\varphi(\bar{3}) = \bar{3}$

$\Rightarrow \varphi$ bijektiv

φ Gruppenhomomorphismus, denn für $\bar{h}, \bar{\ell} \in \mathbb{Z}_4$ gilt

$$\varphi(\underbrace{[h]+[\ell]}_{[h+\ell]}) = \varphi([h+\ell])$$
$$= [2^{h+\ell}] = [2^h \cdot 2^\ell]$$
$$= [2^h] \cdot [2^\ell]$$

$\circ$	a	b
a	$a \circ a$	$a \circ b$
b	$b \circ a$	$b \circ b$

$*$	$\varphi(a)$	$\varphi(b)$
$\varphi(a)$	$\varphi(a) * \varphi(a)$	$\varphi(a) * \varphi(b)$
$\varphi(b)$	$\varphi(b) * \varphi(a)$	$\varphi(b) * \varphi(b)$

Satz (Kleiner Fermat für endliche Gruppen)

Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe, d.h. $|G| < \infty$

$\Rightarrow \forall a \in G: \; a^{|G|} = e$

$$a^{|G|} = \underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{|G| \text{ mal}}$$

Untergruppen Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq U \subseteq G$
mit neutralem Element e

Dann heißt $(U, \circ)$ Untergruppe von $(G, \circ)$, wenn

(i) $e \in U$
(ii) $\forall a \in U: \; a^{-1} \in U$
(iii) $\forall a, b \in U: \; a \circ b \in U$.

gelten.

Satz (Lagrange) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $(U, \circ)$ Untergruppe
$\Rightarrow |U|$ teilt $|G|$

A2.4 $(G, \circ)$ Gruppe, $a, x, y, b \in G$.
$a \circ x = b$

Lösung x? Durch Verknüpfung von a^{-1} von links auf beiden Seiten der Gleichung.

$$\Rightarrow \quad a^{-1}\circ(a\circ x) = a^{-1}\circ b$$
$$\Leftrightarrow \quad (a^{-1}\circ a)\circ x = a^{-1}\circ b$$
$$\Leftrightarrow \quad e\circ x = a^{-1}\circ b$$
$$\Leftrightarrow \quad x = a^{-1}\circ b$$

Alternativ: $x = e\circ x = (a^{-1}\circ a)\circ x = a^{-1}\circ(a\circ x) = a^{-1}\circ b$

$\to$ zeigt Existenz und Eindeutigkeit;

Alternativer Beweis d. Eindeutigkeit: angenommen x_1, x_2 lösen $a\circ x_1 = b = a\circ x_2$

$$x_1 = e\circ x_1 = (a^{-1}\circ a)\circ x_1 = a^{-1}\circ(a\circ x_1) = a^{-1}\circ b$$
$$= a^{-1}\circ(a\circ x_2)$$
$$= \dots = x_2$$

<u>A 25</u> $(G,\circ)$ Gruppe, $\emptyset \neq U \subseteq G$.

$\forall a,b\in U: a\circ b^{-1}\in U \Rightarrow U$ Untergruppe.

$\Rightarrow$ (1) neutrales Element: Sei $u\in U$.

$$\Rightarrow e = u\circ u^{-1}\in U$$

(2) inverse Element: Sei $u\in U \Rightarrow e\circ u^{-1} = u^{-1}\in U$

(3) Verknüpfung: Seien $a,b\in U$: $a\circ b = \underline{a\circ (b^{-1})^{-1}}\in U$

Check: $(b^{-1})^{-1} = b$

$\Rightarrow a, b^{-1}\in U$

Wenne: $b^{-1} = c \Rightarrow a\circ c^{-1}\in U$. $\boxtimes$

2.6/c) $(G,\circ)$ Gruppe, $a\in G$

$\langle a\rangle = \{a^h : h\in\mathbb{Z}\} \Rightarrow (\langle a\rangle, \circ)$ ist Untergruppe.

Dazu verwenden wir das Kriterium auf A 2.5.

Seien $x = a^k$ in $\langle a \rangle$ $(k, l \in \mathbb{Z})$
$y = a^l$

$$x \circ y^{-1} = a^k \circ (a^l)^{-1} = a^k \circ a^{-l} = a^{k-l} \in \langle a \rangle$$
da $k-l \in \mathbb{Z}$

<u>Behauptung</u> $(G, \circ)$, $a \in G$. Betrachte $\langle a \rangle$.

$$\Rightarrow a^{|\langle a \rangle|} = e.$$

(wichtig für Beweis von Fermat)

3. Tutorium (LA 1)

16.11.2021

A3.2

$(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_3, +) \cong (\mathbb{Z}_6, +)$

a) $(G, \circ)$ $(H, *)$ Gruppen $\Rightarrow$ $(G \times H, \diamond)$ Gruppe

$$(g_1, h_1) \diamond (g_2, h_2) = (g_1 \circ g_2, h_1 * h_2)$$

Assoziativität: $(g_1, h_1) \diamond ((g_2, h_2) \diamond (g_3, h_3))$

$$= ((g_1, h) \diamond (g_2, h_2)) \diamond (g_3, h_3)$$

Neutrale (e_G, e_H)

$$(g, h) \diamond (e_G, e_H) = (\underbrace{g \circ e_G}_{\substack{g \\ = e_G \circ g}}, \underbrace{h * e_H}_{\substack{h \\ = e_H * h}})$$

$$= (e_G, e_H) \diamond (g, h)$$

Inverse $(g, h) \diamond (g^{-1}, h^{-1}) = (g^{-1}, h^{-1}) \diamond (g, h)$
$= (e_G, e_H)$

b) $(\mathbb{Z}_n, +)$ mit $n \in \mathbb{N}$ wird durch $[1] = \bar{1}$

$\langle \bar{1} \rangle = \{ \overline{h \cdot 1} : h \in \mathbb{Z} \} = \{ \bar{h} : h \in \mathbb{Z} \} \ni \{ \bar{1}, \dots, \bar{n} \} = \mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{ (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}),$
$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}) \}$

$\langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle = \{ 0 \cdot (\bar{1}, \bar{1}), 1 \cdot (\bar{1}, \bar{1}), 2 (\bar{1}, \bar{1}), \dots \}$

$$= \{ (\bar 0, \bar 0), (\bar 1, \bar 1), (\bar 0, \bar 2), (\bar 1, \bar 0), (0, \bar 1), (\bar 1, \bar 2) \}$$

Gruppeniso: $\varphi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

$$\varphi(\underbrace{r \cdot \bar 1}_{\in \mathbb{Z}_6}) := r\,(\bar 1, \bar 1) \quad \text{für } r = 0, 1, \ldots 5$$

φ ist offensichtlich surjektiv, also bijektiv, da $|\mathbb{Z}_6| = |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3|$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \qquad x, y \in \mathbb{Z}_6$$

$x = r \cdot \bar 1 \quad y = s \cdot \bar 1$, wobei $r, s \in \{0, 1, \ldots 5\}$

$6q \cdot (\bar 1) = q \cdot 6 \cdot \bar 1 = q \cdot \bar 0$

$$x + y = (r+s)\,\bar 1 = (6 \cdot q + \ell) \cdot \bar 1 \underset{\text{Fermat}}{=} \ell \cdot \bar 1$$

$q \in \mathbb{N}_0$, $\ell \in \{0, 1, \ldots 5\}$

$\varphi(x+y) = \varphi(\ell \cdot \bar 1) = \ell \cdot (\bar 1, \bar 1)$, wobei ℓ wie oben.

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(r \cdot \bar 1) + \varphi(s \cdot \bar 1)$$
$$= r\,(\bar 1, \bar 1) + s \cdot (\bar 1, \bar 1)$$
$$= (r+s) \cdot (\bar 1, \bar 1)$$
$$= (6q + \ell) \cdot (\bar 1, \bar 1) \underset{\text{Fermat}}{=} \ell \cdot (\bar 1, \bar 1)$$

$6q\,(\bar 1, \bar 1) = q \cdot 6 \cdot (\bar 1, \bar 1) = q \cdot (\bar 0, \bar 0)$

3.3 $\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ in Körper $(K, +, \cdot)$

b^{-1} multiplik. Inverse v. b

$$a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = a \cdot (d \cdot d^{-1}) \cdot b^{-1} + c \cdot (b \cdot b^{-1}) d^{-1}$$

$$= \ldots = (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (cb)(b^{-1}d^{-1})$$

Assoziativität

$d^{-1}b^{-1} = (bd)^{-1}$

$$= (ad)(bd)^{-1} + (cb)(db)^{-1}$$

Kommutativität

$$= (ad)(bd)^{-1} + (cb)(bd)^{-1}$$

Ausgl.

Distributivität

$$= (ad+cb)(bd)^{-1} = \frac{ad+cb}{bd}$$

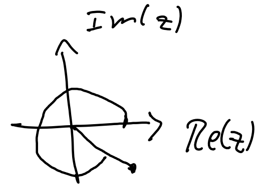
$(\mathbb{Z}_7 \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$						
$\bar{2}$						
$\bar{3}$						
$\bar{4}$						
$\bar{5}$						
$\bar{6}$						

$$\left.\begin{array}{llr}
\langle \bar{1} \rangle = \{\bar{1}\} & & 1 \\
\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\} & & 3 \\
\langle \bar{3} \rangle = \mathbb{Z}_7 \setminus \{\bar{0}\} & & 6 \\
\langle \bar{4} \rangle = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\} & & 3 \\
\langle \bar{5} \rangle = \mathbb{Z}_7 \setminus \{\bar{0}\} & & 6 \\
\langle \bar{6} \rangle = \{\bar{1}, \bar{6}\} & & 2
\end{array}\right\}$$

alle Mächtigkeiten teilen 6 (Lagrange)

4. Tutorium LA I



23.11.2021

A4.1

$$(1-i)^{17} = z^{17}, \qquad z = 1-i$$

$$|z| = \sqrt{1+1} = 2 \qquad \cos\tilde\theta = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\tilde\theta = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \quad \theta = -\pi/4$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2} \cdot e^{-i\pi/4} = 1-i$$ (wg. 2π-Periodizität v. cos, sin)

$$(1-i)^{17} = \left(|z| e^{i\theta}\right)^{17} = |z|^{17} e^{i\theta \cdot 17} = 2^{17/2} \exp\left(-i \cdot \frac{17\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{17/2} \left(\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = 2^{-\frac{1}{2}} \qquad = 2^{17/2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2^{8} \cdot (1-i)$$

$$\sum_{l=0}^{n} i^l$$

$$1 + i + (-1) + (-i) = 0$$

$$\sum_{l=0}^{3} i^{l+4h} = 0 \quad \forall h \in \mathbb{Z} \qquad i^{4 \cdot h} = 1 \quad h \in \mathbb{Z}$$

Schreibe $n = 4h + r$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{l=0}^{4h-1} i^l}_{=0} + \underbrace{\sum_{l=4h}^{4h+r} i^l}_{\sum_{l=0}^{r} i^{l+4h} = \sum_{l=0}^{r} i^l} = \sum_{l=0}^{r} i^l = \sum_{l=0}^{n} i^l = \mp$$

$l \mapsto l + 4h$

Fallunterscheidung: $r=0$: $F = 1$

$r=1$: $F = 1+i$

$r=2$: $F = 1+i-1 = i$

$r=3$: $F = 1+i-1-i = 0$

A2 $0 = 1+z^3 \iff z^3 = -1 = e^{i\pi}$

$$\left(|z| e^{i\varphi}\right)^3 = |z|^3 e^{3i\varphi} = |z| e^{3i\varphi + 2\pi i \cdot k}$$

$\Rightarrow |z| = 1$

1. Lsg $3\varphi_1 = \pi \Rightarrow \varphi_1 = \pi/3$

2. Lsg $3\varphi_2 + 2\pi = \pi \Rightarrow \varphi_2 = -\pi/3$

3. Lsg $3\varphi_3 + 4\pi = \pi \Rightarrow \varphi_3 = -3\pi/3 = -\pi$

$\Rightarrow z = e^{i\varphi_j}$ $j = 1, 2, 3$ lösen $1 + z^3 = 0$

$3\varphi + 6\pi = \pi$ $\varphi = -5\pi/3 = -\frac{2 \cdot 2\pi + \pi}{3}$

$\varphi \in (-\pi, \pi]$

Allgemeiner:

$z \in \mathbb{C}$: $z = |z| e^{i\theta}$ n-te Wurzel mit Vereinbarung, dass $\theta \in (\alpha - \pi, \alpha + \pi]$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$.

$|z|^{1/n} \exp\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{k \cdot 2\pi}{n}\right)$ wobei $k \in \{0, 1, .., n-1\}$

Jede komplexe Zahl besitzt n n-te Wurzeln

A5 $\quad 1 + \cos\theta + \cos 2\theta \dots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\theta/2)}$

$n=0 \qquad LHS = 1 = RHS$

Ind.- Schritt $\quad \sum_{k=0}^{n+1} \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin\theta/2} + \cos((n+1)\theta)$

$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)}_{\text{Ind. hypothese}} + \sum_{k=n+1}^{n+1} \cos(k\theta)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)) + 2\cos((n+1)\theta)\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin(\theta/2)} = G$$

$$\cos a \sin b = \frac{(e^{ia} + e^{-ia})}{2} \cdot \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} =$$

$$= \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$$

$a = (n+1)\theta, \quad b = \theta/2$

$$G = \dots = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)) + \sin(\frac{2n+3}{2}\theta) - \sin(\frac{2n+1}{2}\theta)}{2\sin\theta/2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin(\frac{2n+3}{2}\theta)}{2\sin\theta/2} \qquad \square$$

5. Tutorium LA I | $\vec{0} \in U$, $\vec{v}+\vec{w} \in U$ $\vec{u},\vec{v} \in U$ 30.11.21

$\lambda \vec{v} \in U$, $\lambda \in K$

A 5.2

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 4y = 0, \quad z = 0, \quad 2x - y = 0\}$

$A = \{\vec{0}\}$ trivialer Unterraum

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y - z = 1\}$

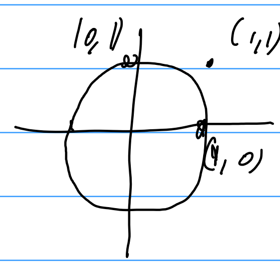
↳ kein Unterraum, denn $\vec{0} \notin B$: $0^2 + 2 \cdot 0 - 0 = 0 \neq 1$

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

↳ kein Unterraum: $v = (1, 0, 0)$ $\Rightarrow$ $v + w = (1, 1, 0) \notin C$

$w = (0, 0, 0)$

$1^2 + 1^2 + 0^2 = 2 > 1$



(Allgemeiner: $v = (\alpha, 0, 0)$, $v = (0, \beta, 0)$

$\Rightarrow w + \lambda v \notin C$, für $0 < \alpha, \beta \leq 1$ & $\lambda > 0$ hinreichend groß

.... zahlreiche weitere Gegenbeispiele)

A 5.3

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$.

v_1, v_2, v_3 Basis $\overset{\text{Satz}}{\iff}$ v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

Da $v_2 = 2v_1$, sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig

Wir ersetzen jetzt v_2 durch $v_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

z.z.: $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \\ 3a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 4a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_3 \\ -a_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

II − I: $a_1 + 2a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -2a_2$

→ in III: $3 \cdot (-2a_2) + a_2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$\Rightarrow a_1 = 0$

$\Rightarrow a_3 = 0$

$\Rightarrow$ v_1, v_2', v_3 linear unabh., also bilden v_1, v_2', v_3 Basis von $\mathbb{R}^3$.

A 5.4 $(U_j)_{j=1}^n$ Untervektorräume eines Vektorraums V über K

a) $\left(\bigcap_{j=1}^n U_j\right)$ ist UV

Bew $0 \in U_j \ \forall j \Rightarrow 0 \in \bigcap_{j=1}^n U_j$

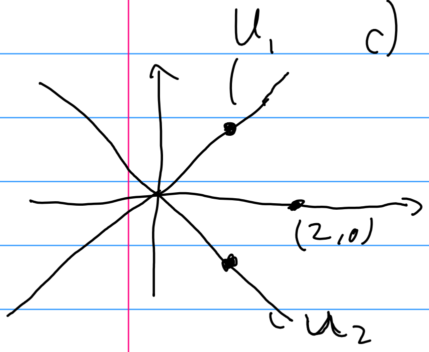
$v, u \in U_j \ \forall j \Rightarrow v + u \in U_j \ \forall j$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$v, u \in \bigcap U_j \Rightarrow v + u \in \bigcap U_j$

$\lambda \in K$ $\lambda u \in U_j \ \forall j \Leftrightarrow \lambda u \in \bigcap U_j$ $\boxtimes$

c) Gegenbeispiel: $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$



$U_1 = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$

(Prüfe, dass U_1, U_2 Untervektorräume sind)

$\Rightarrow$ $U_1 \cup U_2 = \{ v : v \in U_1 \cup U_2 \}$ ist kein Untervektorraum, denn für $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 \in \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(u_1, u_2 \in U_1 \cup U_2)$ ist $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>nicht</u> in $U_1 \cup U_2$ enthalten. $\boxtimes$

6. Tutorium LA I 7.12.21

A 6.2 $V := \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \}$ VR

$U := \text{span}\{ \cos, \sin, f, g \}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = e^{ix}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad g(x) = x^2 e^{ix}.$

$\dim(U)$ = # Zahl d. Elemente einer Basis von U

$e^{ix} = i \sin x + \cos x.$

$\text{Span}\{ \cos, \sin, x^2 e^{ix} \} = U$

Behauptung: $\cos, \sin, x^2 e^{ix}$ sind lin. unabh.

(Wenn wir das gezeigt haben, folgt, dass $\{\cos, \sin, x^2 e^{ix}\}$ eine Basis ist $\Rightarrow \dim(U) = 3$

Angenommen $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{C}$ mit

$\forall d_j \; (j = 1 \ldots 3)$

$\sum d_j f_j = 0$

$\to d_j = 0$

$$d_1 \sin x + d_2 \cos x + d_3 x^2 e^{ix} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ insbesondere gilt die Gleichheit für

- $x = 0: \Rightarrow d_2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow d_2 = 0$
- $x = 2\pi: \Rightarrow d_3 \cdot (2\pi)^2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow d_3 = 0$
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d_1 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow d_1 = 0$

(oder irgendein x, das kein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist)

A 6.4 V, W K-Vektorräume, $f: V \to W$ lineare Abb

$b_1 \dots b_n$ Basis von V

1) f injektiv $\Leftrightarrow \{f(b_i)\}_{i=1}^n$ linear unabh

"$\Rightarrow$": Angenommen $0 = \sum_{j=1}^n d_j \cdot f(b_j)$

f linear

$= f\left(\sum_{j=1}^n d_j b_j\right) = 0$

f inj $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$

Wg Injektivität von f, folgt $\sum_{j=1}^n d_j b_j = 0$

$\Rightarrow$ da $\{b_j\}_{j=1}^n$ Basis (also insb. lin unabh) folgt $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$.

"$\Leftarrow$" zz $\ker(f) = \{0\}$; $\{0\} \subseteq \ker(f)$ ist klar ✓ (wg Linearität)

zz: $\ker(f) \subset \{0\}$, dh.

zz: $a \in \ker(f) \overset{a \in V}{\Rightarrow} a = 0$

Wir schreiben $a = \sum_{j=1}^n \mu_j b_j$ mit eindeutigen $\{\mu_j\}$

dann folgt aus Annahme $0 = f(a)$

$= f\left(\sum \mu_j b_j\right)$

$\sum_{j=1}^n f(j) = f(1) + f(2) \dots$

Linearität

$= \sum_j \mu_j f(b_j)$

$\sum_{j=1}^n$

Da $\{f(b_j)\}$ lin unabh, folgt $\mu_j = 0 \ \forall j$.

$\Rightarrow a = 0$ ☐

2) f surjektiv $\Leftrightarrow \{f(b_j)\}_{j=1}^{n}$ Erzeugendensystem

"$\Rightarrow$": ang f surj. dann gibt es für alle $w \in W$ ein $v \in V$ mit $f(v) = w$.

$\exists !$ es gibt genau ein...

Da $\{b_j\}_j$ Basis $\exists !$ $\lambda_j \in K$ mit $v = \sum \lambda_j b_j$

$\exists^1$

$$w = f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j\right) \overset{\text{Lin.}}{=} \sum_j \lambda_j f(b_j)$$

$\exists_1$

$\Rightarrow \{f(b_j)\}_{j=1}^{n}$ Erzeugendensystem

"$\Leftarrow$": Sei $w \in W$ beliebig. $\Rightarrow \exists \mu_1, \dots \mu_n \in K$

sodass $w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j f(b_j)$

$= f(\sum_j \mu_j b_j)$ (Linearität)

$\Rightarrow f$ surjektiv $\boxtimes$

(3) f bijektiv $\Leftrightarrow \{f(b_j)\}_{j=1}^{n}$ Basis

folgt aus (1) & (2) $\boxtimes$

A6.5 Sei V ein K-Vektorraum, mit Basis $(b_1, \dots b_n)$

ZZ: $\exists f: K^n \to V$ linear, bijektiv

mit $f(e_j) = b_j$ ($\{e_j\}_{j=1}^{n}$ Standardbasis von K^n)

Bew konstruktiv: wir konstruieren

$f: K^n \to V$, $K^n \ni \vec{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \mapsto f(\alpha) = \sum \alpha_j b_j$

$\Rightarrow$ f wohldefiniert, linear und f erfüllt

$$f(e_\ell) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{j\ell} b_j = b_\ell$$

Siehe Satz V.6 im Skript $\longleftarrow$ genügt Injektivität zu zeigen, da $\dim(K^n) = \dim(V)$

Sei $\alpha \in K^n$ so, dass $f(\alpha) = 0$

$$\overset{\shortparallel}{\sum \alpha_j b_j}$$

$\Rightarrow$ $\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$, da $\{b_j\}_{j=1}^n$ Basis bilden, also insb linear unabhängig sind.

$\Rightarrow \ker(f) = \{0\}$

$\Leftrightarrow f$ injektiv

$\boxed{}$

7. Tutorium LA I

$\Phi : X \to Y$ 14.12.21

$\Psi : Z \to W$

$\Psi \circ \Phi$

A 7.1

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $B \in \mathbb{R}^{r \times s}$

$B \cdot A$ nur definiert wenn $s = n$ $A \cdot B$ $m = r$ nötig

$\Rightarrow$ erlaubt sind lediglich $A_1 \cdot A_2$, $A_2 \cdot A_3$, $A_3 \cdot A_2$

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Bemerkung: $A_2 \cdot A_3$ ist Beispiel für eine Rang-Eins-Matrix;

$A_1 \cdot A_3$ nicht definiert.

$\operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{ran}(A)$
$= \#$ d. lin. unabh. Zeilen
$= \#$ — " — Spalten

$$A_3 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1+4+9) = (12)$$

A 7.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 & n(n-1)(n-2)/6 \\ 0 & 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Behauptung $(n \in \mathbb{N})$

Beweis per Induktion; Start: $n = 1$ ✓

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$

$A^{n+1} = A^n \cdot A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 & n(n-1)(n-2)/6 \\ 0 & 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=:: \begin{pmatrix} 1 & n+1 & (n+1)\cdot n/2 & (n+1)\cdot n(n-1)/6 \\ 0 & 1 & n+1 & (n+1)\cdot n/2 \\ 0 & 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A7.3

$\Phi : V \to W$

Gegeben: $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = \{\vec{e}_j\}_{j=1}^{3}$

$A = \{(1,-1,2), (2,3,7), (2,3,6)\} = \{\vec{a}_j\}_{j=1}^{3}$

$B = \{(1,2,2), (-1,3,3), (-2,7,6)\} = \{\vec{b}_j\}_{j=1}^{3}$

Angenommen: $\vec{x} = \sum x_j \vec{e}_j$ mit gegebenen x_j

$= \sum \tilde{x}_j \vec{b}_j$; Was sind $\tilde{x}_j$

Basistrafos: U_A und $U_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$U_A \vec{e}_j = \vec{a}_j \qquad U_B \vec{e}_j = \vec{b}_j$$

-> Matrixdarst. $M_E(U_A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ mit den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$

$$\begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ -1 & ? & ? \\ 2 & ? & ? \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a}_1$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & ? \\ -1 & 3 & ? \\ 2 & 7 & ? \end{pmatrix} \\ \vec{a}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{a}_2$$

$$M_E(U_B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{}_{\vec{b}_1} & \underbrace{}_{\vec{b}_2} & \underbrace{}_{\vec{b}_3} \end{array}$$

$$\vec{x} = \sum x_j \vec{e}_j = \sum \tilde{x}_j \underbrace{\vec{b}_j}_{U_B \vec{e}_j} = U_B \sum \tilde{x}_j \vec{e}_j$$

$\Rightarrow$ U_B^{-1} auf beide Seiten anwenden

$$U_B^{-1} \vec{x} = \sum \tilde{x}_j \vec{e}_j$$

$\rightarrow$ Gleichung in kanonischer Basis E schreiben

$$\underbrace{M_E(U_B^{-1})}_{(M_E(U_B))^{-1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ somit erhalten wir $\tilde{x}_j$ (wenn wir $(M_E(U_B))^{-1}$ kennen)

Analoge Frage: Angenommen $\vec{y} = \sum y_j \vec{a}_j$ mit bekannten $y_j \in \mathbb{R}$

Was sind $\tilde{y}_j$ für die $\vec{y} = \underline{\sum \tilde{y}_j \vec{e}_j}$

$$\vec{y} = \sum y_j \vec{a}_j = \sum y_j U_A \vec{e}_j = \underline{U_A \sum y_j \vec{e}_j}$$

Wieder: stelle Gleichheit in kanonischer Basis E dar

$$M_E(U_A) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix}$$

Gegeben $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in E-Basis, sprich $M_E(\Phi)$

$$M_{B,A}(\Phi) = M_E(U_B^{-1} \circ \Phi \circ U_A)$$

$$= (\mathcal{M}_E(U_B))^{-1} \cdot \mathcal{M}_E(\Phi) \cdot \mathcal{M}_E(U_A)$$

<u>Bsp</u> $\Phi = id_{\mathbb{R}^3}$ $\quad \mathcal{M}_E(id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{M}_{BA}(id_{\mathbb{R}^3}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{steht auf Blatt}}}{\mathcal{M}_E(U_B)^{-1}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3} \cdot \mathcal{M}_E(U_A)$$

$$= \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 1/5 \\ -2/5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 13/5 & 12/5 \\ 6 & 43/5 & 32/5 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = 2\vec{a}_1 + 9 \cdot \vec{a}_2 - 8\vec{a}_3 = \sum \tilde{v}_j \vec{b}_j$$

Was sind die $\tilde{v}_j$?

$$\vec{v} = \sum v_j \underbrace{\vec{a}_j}_{U_A \vec{e}_j} = \sum \tilde{v}_j \underbrace{\vec{b}_j}_{U_B \vec{e}_j}$$

$$\sum \tilde{v}_j \vec{e}_j = U_B^{-1} U_A \sum_j v_j \vec{e}_j$$

Fasse Gleichheit in Standardbasis E auf:

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{pmatrix} = (\mathcal{M}_E(U_B))^{-1} \mathcal{M}_E(U_A) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{M}_{B,A}(id_{\mathbb{R}^3}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31/5 \\ 191/5 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{31}{5}\vec{b}_1 + \frac{191}{5}\vec{b}_2 - 18\vec{b}_3$$

In Standardbasis: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} = 2\vec{a}_1 + 9\vec{a}_2 - 8\vec{a}_3 = \frac{31}{5}\vec{b}_1 + \frac{191}{5}\vec{b}_2 - 18\vec{b}_3$

A 7.4

$B_n = \{1, x, x^2, \dots x^n\}$

$V_n = \operatorname{span}(B_n) \subset \mathbb{R}[x]$

$\mathcal{D}_n : V_n \to V_{n-1}$, $\underset{V_n}{\overset{\cap}{f}} \mapsto \underset{V_{n-1}}{\overset{\cap}{f'}}$; sei $f = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}_n f = \sum_{j=0}^{n} j a_j x^{j-1} = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1} \underset{j \mapsto j+1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j$$

$\Rightarrow$ Koeffizient a_j wird durch $b_j = (j+1) a_{j+1}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 3 & & & \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & n \end{pmatrix}}_{M_{B_{n-1}, B_n}(\mathcal{D}_n)} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ \vdots \\ n a_n \end{pmatrix}$$

(eine $n \times (n+1)$ - Matrix mit erstem Spaltenvektor $= \vec{0}$

und restliche $n \times n$ - Matrix ist die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(1, 2, \dots, n)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 3 \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix}$$

Ziel Finde Matrixdarstellung von $\mathcal{J}_n$ (Integration), sodass

$$M_{B_{n-1}, B_n}(\mathcal{D}_n) \cdot M_{B_n, B_{n-1}}(\mathcal{J}_n) = M_{B_{n-1}, B_{n-1}}(\mathrm{id}_{V_{n-1}}) = \mathbb{1}_{V_{n-1}}$$

Komponenten: $\int_0^x a_j y^j \, dy = \frac{a_j}{j+1} x^{j+1}$ $\quad j = 0, \dots n-1$

Wir starten mit $f = \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^j$ und definiere $\mathcal{J}_n f = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+1} x^{j+1}$

$$\underset{j \mapsto j-1}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{j-1}}{j} x^j$$

$$\mathcal{M}_{B_n, B_{n-1}}(J_n) = \begin{pmatrix} & & \vec{0}_n & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \cdots & & \\ \vdots & 0 & 1/3 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1/n \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{B_{n-1} B_n}(D_n) \cdot \mathcal{M}_{B_n B_{n-1}}(I_n)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ & 0 & & 3 & \\ & \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & & & n \end{pmatrix}}_{n \times (n+1)-\text{Matrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1/n \end{pmatrix}}_{(n+1) \times n - \text{Matrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{n \times n - \text{Matrix}}$$

$$= \mathbb{1}_{V_{n-1}}$$

Lin Alg 1 – Besprechung 6. Blatt

21.12.21

$\Phi: X \to Y$

$\Phi(x_1 + \alpha x_2) = \Phi(x_1) + \alpha \Phi(x_2)$

$x_1, x_2 \in X,$

$\alpha \in \mathbb{F}$

A 6.1

a) $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (3x+2y, x)$

$\vec{x}_1 = (x_1, y_1)^T, \quad \vec{x}_2 = (x_2, y_2)^T, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\vec{x}_1 + \alpha \vec{x}_2) = (3(x_1 + \alpha x_2) + 2(y_1 + \alpha y_2), x_1 + \alpha x_2)^T$$

$$= (3x_1 + 2y_1, x_1)^T + \alpha (3x_2 + 2y_2, x_2)^T$$

$$= \Phi(\vec{x}_1) + \alpha \Phi(\vec{x}_2) \quad \Rightarrow \Phi \text{ linear.}$$

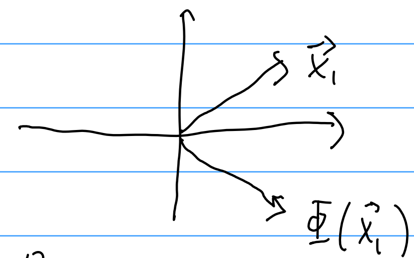
b) $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x+1$

Φ nicht linear: denn $\Phi(0) = 1 \neq 0$

(Lineare Abbildungen $\Phi: X \to Y$ erfüllen notwendigerweise $\Phi(0) = 0$)

c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x, -y)$



$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\vec{x}_1 + \alpha \vec{x}_2) = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 \\ -(y_1 + \alpha y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \Phi(\vec{x}_1) + \alpha \Phi(\vec{x}_2) \quad \Rightarrow \quad \Phi \text{ linear}$$

d) $\Phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z = x + iy \mapsto \Phi(z) = x - iy$ ist nicht linear!

$\alpha \in \mathbb{C} \qquad \Phi(\alpha z) \overset{\text{Behauptung}}{=} \bar{\alpha}\, \Phi(z) \neq \alpha \Phi(z)$

Bemerkung: Solche Φ ($\Phi(\alpha z) = \bar{\alpha}\,\Phi(z)$) heißen sesquilinear

Zur Behauptung: $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
$z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$

$$\alpha z = \alpha_1 x - \alpha_2 y + i(\alpha_2 x + \alpha_1 y)$$

$$\Rightarrow \Phi(\alpha z) = \alpha_1 x - \alpha_2 y - i(\alpha_2 x + \alpha_1 y)$$

$$\bar{\alpha}\,\Phi(z) = (\alpha_1 - i\alpha_2)(x - iy) = \alpha_1 x - \alpha_2 y - i(\alpha_2 x + \alpha_1 y)$$
$$= \Phi(\alpha z)$$

(Insb. sehen wir $\Phi(\alpha z) = \alpha\,\Phi(z)$ nur wahr sein kann, wenn $\alpha \in \mathbb{R}$.
In dem Fall ist $\Phi(\alpha z) = \alpha x - i\alpha y$
$\alpha\Phi(z) = \alpha(x - iy)$)

e) $\Phi : \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \} \to \mathbb{R}$ (Dirac-Delta)
$f \mapsto \Phi(f) = f(1)$

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Phi(f + \alpha g) = (f + \alpha g)(1) = f(1) + \alpha g(1)$$
$$= \Phi(f) + \alpha\,\Phi(g)$$

$\Rightarrow \Phi$ linear

f) $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$
$p \mapsto \Phi(p) = p \cdot (X^3 + X)$

Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[X] \qquad p_1 = \sum_{j \geq 0} a_j X^j$
$\alpha \in \mathbb{R}$

$$p_2 = \sum_{\ell \geq 0} b_\ell X^\ell$$

mit nur endlich viele von 0 verschiedenen Koeffizienten $a_j, b_\ell \in \mathbb{R}$

$$\Phi(p_1 + \alpha p_2) = \left(\sum_{j \geq 0} (a_j + \alpha b_j) X^j \right)(X^3 + X)$$

$$= \sum_{j \geq 0} (a_j + \alpha b_j)(X^{j+3} + X^{j+1})$$

$$= \sum_{j \geq 0} a_j (X^{j+3} + X^{j+1}) + \alpha \sum_{j \geq 0} b_j (X^{j+3} + X^{j+1})$$

$$= \Phi(p_1) + \alpha \Phi(p_2)$$

$\Rightarrow \Phi$ linear.

A 6.2 $\quad \Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$M_{\mathcal{E}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

(Rag-Eins-Proj)
alle Zeilen bzw Spalten sind linear unabhängig

$\Rightarrow \dim \operatorname{ran} \Phi = 1$
$\dim \ker \Phi = 2$

zum Kern: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$M(\Phi)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b + 3c \\ -4a + 2b - 6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Komponenten sind lin abhängig d.h. es genügt eine der beiden Gleichungen zu lösen

$$2a - b + 3c = 0 \iff b = 2a + 3c$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker} \Phi = \operatorname{span}\left\{ \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$a=1, c=0 \qquad a=0, c=1$

Zum Bild von Φ. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\Rightarrow \quad M(\Phi)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b + 3c \\ -4a + 2b - 6c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} (2a - b + 3c)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{ran} \Phi = \operatorname{span}\left\{ \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\}$$

Ergänze $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ zu Basis in $\mathbb{R}^3$.

Kandidat: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind lin unabh.

denn für bel $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ kann

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur durch $\alpha = \beta = \gamma = 0$ gelöst werden.

Entsprechend wird $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zusammen mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^2$.

b) Sei $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{ran} \Phi$ gegeben.
Parametrisiere $\Phi^{-1}(\vec{y})$.

$\vec{y} \in \operatorname{ran} \Phi$ ist notwendigerweise durch $\vec{y} = y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben für $y \in \mathbb{R}$ (Teil a))

Ziel: Finde $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, so dass $\Phi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, sprich

$$2a - b + 3c = y$$

$$b = 2a + 3c - y$$

$$\Rightarrow \quad \Phi^{-1}(\vec{y}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : b = 2a + 3c - y, \ a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a+3c-y \\ c \end{pmatrix} , a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Rightarrow \Phi^{-1}(y)$ ist eine um $-y$ verschobene 2-dim Ebene

mit Normalenvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A 6.3 V sei ein $\mathbb{F}$-VR und P eine Projektion

Def Ein Endomorphismus $P : V \to V$ heißt Proj $:\Leftrightarrow P^2 = P$

a) $\operatorname{ran}(P) = \{ v \in V : P(v) = v \}$

Bew $\operatorname{ran} P = \{ v \in V : \exists x \in V \text{ s.d. } P(x) = v \}$
$\supseteq \{ v \in V : P(v) = v \}$

Verbleibt zu zeigen, dass $\operatorname{ran} P \subseteq \{v \in V : Pv = v\}$

Sei also $v \in \operatorname{ran}(P)$, d.h. $\exists\, x \in V$ mit $Px = v$

In dem Fall gilt $Pv = P(Px) = Px = v$.

Dies zeigt in der Tat $\operatorname{ran} P \subseteq \{v \in V : Pv = v\}$

(Wikipedia) b) V zerfällt in die (innere) direkte Summe

$$V = \operatorname{ran} P \oplus \ker P$$

d.h. (i) $V = \operatorname{ran} P + \ker P = \{x + y : x \in \operatorname{ran} P, \; y \in \ker P\}$

und (ii) $\operatorname{ran} P \cap \ker P = \{\vec{0}\}$

(i) "$\supseteq$": da $\ker P \subset V$ und $\operatorname{ran} P \subset V$, folgt $\ker P + \operatorname{ran} P \subset V$

"$\subseteq$" angenommen $v \in V$, dann schreiben wir

($\mathbb{1}_V \equiv 1$) $$v = \underline{\underline{Pv}} + \underline{(\mathbb{1}_V - P)v}$$

Beh $Pv \in \operatorname{ran}(P)$ ✓ (nach Teil a))

$(\mathbb{1}_V - P)v \in \ker(P)$

In der Tat: $$P(\mathbb{1}_V - P)v = Pv - P^2 v = Pv - Pv = \vec{0}$$

$\Rightarrow (\mathbb{1}_V - P)v \in \ker P$.

$\Rightarrow$ Dies zeigt (i)

zu (ii), also dass $\ker P \cap \operatorname{ran} P = \{\vec{0}\}$

"$\supseteq$" ist klar ($\ker(P)$, $\operatorname{ran}(P)$ sind Unterräume)

"$\subseteq$": Sei also $v \in \ker(P) \cap \operatorname{ran}(P)$

$\Rightarrow$ da $v \in \operatorname{ran}(P)$ gibt es $x \in V$ mit $Px = v$.

da $v \in \ker(P)$, gilt $Pv = \vec{0}$

$$v = Px = P^2 x = PPx = Pv = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ $v = \vec{0}$

Dies zeigt (ii)

(c) $\mathbb{1}_V - P$ auch eine Projektion folgt aus Definition von Projektion, denn

$$(\mathbb{1} - P)^2 = (\mathbb{1} - P)(\mathbb{1} - P) = \mathbb{1} - 2P + P^2$$
$$= \mathbb{1} - P \quad \checkmark$$

d) $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Projektion

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \pi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)/2 \\ (x+y)/2 \end{pmatrix}$$

$$\pi^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pi\begin{pmatrix} (x+y)/2 \\ (x+y)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ \sim \end{pmatrix} = \pi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dh $\pi^2 = \pi$

6.4 $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \Phi(\vec{e}_1) = \frac{9}{25}\vec{e}_1 + \frac{12}{25}\vec{e}_3$

$\Phi(\vec{e}_2) = 0$

$$\Phi(\vec{e}_3) = \frac{12}{25}\vec{e}_1 + \frac{16}{25}\vec{e}_1$$

$$\mathcal{M}_\mathcal{E}(\Phi) = (\Phi(e_1) \quad \Phi(e_2) \quad \Phi(e_3))$$

$$= \begin{pmatrix} 9/25 & 0 & 12/25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12/25 & 0 & 16/25 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_\mathcal{E}(\Phi)^2 = \mathcal{M}_\mathcal{E}(\Phi)$ ✓ (Nachrechnen)

c) $\mathcal{Y} = \{2e_1, e_2, e_2 + e_3\}$ ist eine Basis,

da die Vektoren lin unabh sind

$$\left(\alpha\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \right)$$

d) Finde $\mathcal{M}_{\mathcal{Y},\mathcal{E}}(\Phi)$.

Dazu brauchen wir die Darstellungen d. Basistrafo Θ, die $\mathcal{E}$ in $\mathcal{Y}$ überführt.

$$\mathcal{M}_\mathcal{E}(\Theta) = (2e_1 \quad e_2 \quad e_2 + e_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Satz $\underline{VI}.8$ ist $\mathcal{M}_{\mathcal{Y},\mathcal{E}}(\Phi) = \mathcal{M}_\mathcal{E}(\Theta)^{-1}\mathcal{M}_\mathcal{E}(\Phi)$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big| \left(M_{\mathcal{E}}(\theta)\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad M_{\gamma\mathcal{E}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/25 & 0 & 12/25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12/25 & 0 & 16/25 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix} 9/50 & 0 & 6/25 \\ -12/25 & 0 & -16/25 \\ 12/25 & 0 & 16/25 \end{pmatrix} =: A$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 369/2500 & 0 & 123/625 \\ -246/625 & 0 & -328/625 \\ 246/625 & 0 & 328/625 \end{pmatrix} \neq A$$

$\Rightarrow \quad M_{\gamma\mathcal{E}}(\Phi)$ <u>keine</u> Projektion.

<u>Bem</u> $\quad M_{\gamma\gamma}(\Phi) = M_{\mathcal{E}}(\theta)^{-1} \, M_{\mathcal{E}}(\Phi) \, M_{\mathcal{E}}(\theta)$

$$M_{\gamma\gamma}(\Phi)^2 = M_{\mathcal{E}}(\theta)^{-1} \, M_{\mathcal{E}}(\Phi) \underbrace{M_{\mathcal{E}}(\theta) \, M_{\mathcal{E}}(\theta)^{-1}} M_{\mathcal{E}}(\Phi) \, M_{\mathcal{E}}(\theta)$$

$$= M_{\gamma\gamma}(\Phi)$$

LA I - 8. Tutorium 11.01.22

Rang einer Matrix $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$$

$a_1, \ldots a_n \in \mathbb{F}^m$ Spaltenvektoren

$a^{(1)}, \ldots a^{(m)} \in \mathbb{F}^n$ Zeilenvektoren

Def 1 Spaltenraum $(A) = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n)$

Zeilenraum $(A) = \operatorname{span}(a^{(1)}, \ldots a^{(m)})$

Spaltenrang $(A) = \dim \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n)$

Zeilenrang $(A) = \dim \operatorname{span}(a^{(1)}, \ldots a^{(m)})$

HA Spaltenrang $(A) =$ Zeilenrang (A^T)

Lemma 2 Sei $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$

Seien $S \in \mathbb{F}^{m \times m}$ und $T \in \mathbb{F}^{n \times n}$ invertierbar

Bspw: T, S sind elementare Zeilen- & Spaltenumformungen

Spaltenrang $(A) =$ Spaltenrang (SAT)

Zeilenrang $(A) =$ Zeilenrang (SAT)

Bew Schritt 1 Spaltenrang $(A) =$ Spaltenrang (AT).

$\parallel$

(T bijektiv, da T inv. bar)

$$\dim \{Ax : x \in \mathbb{F}^n\} = \dim \{Ax : x \in T\mathbb{F}^n\}$$
$$= \dim \{Ax : x = Ty, y \in \mathbb{F}^n\}$$
$$= \dim \{ATy : y \in \mathbb{F}^n\} = \text{Spaltenrang}(AT)$$

Schritt 2 $\quad$ Spaltenrang (A) = Spaltenrang (SA)

$\{e_k\}_{k=1}^{n}$ Standardbasis von $\mathbb{F}^n$

Sei $Ae_{j_1}, \dots Ae_{j_r}$ eine Basis von Spaltenraum(A)
$= \operatorname{span}(a_1, \dots a_n)$
$= \operatorname{span}(Ae_1, \dots Ae_n)$

$\Rightarrow$ da S bijektiv ist, ist $SAe_{j_1} \dots SAe_{j_r}$ eine

Basis von $\operatorname{span}(SAe_1, \dots SAe_n)$ = Spaltenraum (SA)

$\Rightarrow$ Spaltenrang (A) = Spaltenrang (SA)

Schritt 3 $\quad$ Schritt 1 + Schritt 2

$\Rightarrow$ Spaltenrang (A) = Spaltenrang(SAT)

Schritt 4 $\quad$ Zeilenrang (A) = Spaltenrang(A^T)

$= \text{Spaltenrang}(\underbrace{T^T A^T S^T}_{(SAT)^T})$

$(AB)^T = B^T A^T$

$= \text{Zeilenrang}(SAT)$ $\quad \square$

Satz 3 $\quad$ Für alle Körper $\mathbb{F}$, $n, m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ gilt Spaltenrang (A) = Zeilenrang (A) =: rang (A)

Bsp4 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$

Spaltenrang (A) = Zeilenrang (A) = $\begin{cases} 2 & \text{falls } c = 12 \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $u, v \in \mathbb{F}^{n \times 1} \Rightarrow u \cdot v^T$ hat immer Rang 1

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (2\ 2\ 2)$ zB $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4\ 5\ 6)$

oder allgemeiner $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (d\ e\ f)$

führt zu 3x3-Matrizen, deren Zeilen- und Spaltenvektoren alle linear abhängig voneinander sind

<u>Korollar 5</u> $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ $B \in \mathbb{F}^{n \times r}$

a) $\text{rag}(A) = \text{rag}(A^T)$

b) $\text{rag}(A) \leq \min\{m, n\} := \begin{cases} m, & \text{falls } m \leq n \\ n, & \text{falls } n \leq m \end{cases}$

c) $\text{rag}(AB) \leq \min\{\text{rag}(A), \text{rag}(B)\}$

$\rightarrow$ d) $\text{rag}(A) = \text{rag}(SAT)$ $\forall$ invertierbaren $S \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $T \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

<u>Bew</u> a) - c) Hausaufgabe
d) folgt aus Lemma 2 und Satz 3 $\square$

Zusammenhang zwischen Rang & Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

<u>Lemma 6</u> $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $r := \text{rag}(A)$, $b \in \mathbb{F}^m$,

Dann gelten folgende Aussagen:

a) Zum homogenen LGS:

$$\dim\{x \in \mathbb{F}^n : Ax = 0\} = n - r$$

b) Zum inhomogenen LGS: angenommen $x^* \in \mathbb{F}^n$ mit $Ax^* = b$.

$$\Rightarrow \{x \in \mathbb{F}^n : Ax = b\} = \{x^* + x^{**} \mid x^{**} \in \mathbb{F}^n : Ax^{**} = 0\}$$

<u>Beweis</u> a) Folgt aus Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$$n = \dim(\ker A) + \underbrace{\dim \operatorname{ran}(A)}_{= \operatorname{rang}(A)}$$

$$\Rightarrow \dim\{x \in \mathbb{F}^n : Ax = 0\} = n - \operatorname{rang}(A)$$

b)
$$Ax = b \Leftrightarrow A(x^* + (x - x^*)) = b$$
$$\Leftrightarrow A(\underbrace{x - x^*}_{x^{**}}) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = x^* + x^{**} \wedge Ax^{**} = 0 \qquad \boxtimes$$

<u>Satz 7</u> Sei $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{F}^m \setminus \{\vec{0}\}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

Sei $\overline{Ab}$ die aus A und b zusammengesetzte $m \times (n+1)$ - Matrix

$$\overline{Ab} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Dann gelten:

(9. Blatt) <u>HA</u> $\}$ a) $\operatorname{rang}(\overline{Ab}) = \operatorname{rang}(A) \Leftrightarrow Ax = b$ besitzt <u>mindestens</u> eine Lsg $x \in \mathbb{F}^n$

b) $\operatorname{rag}(A) = n \Rightarrow Ax = b$ hat höchstens eine Lsg $x \in \mathbb{F}^n$

c) $\operatorname{rag}(\overline{Ab}) = \operatorname{rag}(A) = n \Longleftrightarrow Ax = b$ hat genau eine Lsg $x \in \mathbb{F}^n$

d) Sei $m = n \Rightarrow A$ invertierbar genau dann, wenn $\operatorname{rag}(A) = n$.

Beweis a) HA

b) $\operatorname{rag}(A) = n \Leftrightarrow a_1 \dots a_n$ linear unabhängig

$A = (a_1 \dots a_n)$

$\Rightarrow \sum a_j x_j = b$ hat höchstens eine Lsg $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

z.B. Korollar 5.5 in Notizen

$\Leftrightarrow Ax = b$ hat höchstens eine Lsg.

c) "$\Rightarrow$" folgt aus a) und c)

"$\Leftarrow$":

Intermezzo Satz VII.9 (Fredholmsche Alternative) $(m = n)$

a) $\det A = 0 \Leftrightarrow \exists\, x \neq 0 : Ax = 0$

b) $\det A \neq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{F}^n : Ax = b \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{F}^n : x = A^{-1}b\}$

Es gilt eine leichte Verstärkung:

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow Ax = b \neq 0$ hat genau eine Lösung $x \in \mathbb{F}^n$

$\Leftrightarrow$ die Gleichung $Ax = 0$ hat nur die triviale Lsg $x = 0$.

Jetzt zum Beweis von "$\Leftarrow$" in Satz 7. c)

angenommen $Ax = b$ besitzt genau eine Lsg

("$\Leftarrow$" nur wahr, wenn $m = n$ mit Fredholm)

$\overset{\text{Lemma 6b}}{\Longrightarrow}$ $Ax = 0$ hat nur die Lsg $x = 0$

$\Leftrightarrow$ $a_1, \dots a_n$ sind lin unabh.

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}(A) = n$

und $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\overline{Ab})$ folgt aus a)

d) A invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n$?

$\Updownarrow$ Fredholm

$\ker(A) = \{\vec{0}\}$

$\Updownarrow$

$\dim \ker(A) = 0 \underset{\text{Lemma 6}}{\Leftrightarrow} \dim \operatorname{ran}(A) = \operatorname{rang}(A) = n$ ☑

Jetzt noch Übung mit Determinanten

a)
$$\det \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ & & & n-1 & n \\ n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} n!$$

1. Zeile $-$ n.-te Zeile

$$= \det \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & n-1 & \\ n & n & \dots & & n \end{pmatrix} \overset{\substack{2.\,Z. - n.\text{-te } Z. \\ \vdots \\ (n-1).\,Z. - n.\,Z.}}{=} \det \begin{pmatrix} 1-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & 3-n & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & \\ & & & -1 & 0 \\ n & n & \dots & n & n \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Laplace}}{=} n \cdot (-1)^{n+n} \cdot \det\begin{pmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2-n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= n \cdot (n-1)! \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot n!$$

2. Bsp

mit Gauß $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{II-3I \\ III-2I \\ IV-I}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -9 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -9 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{S\,II \leftrightarrow S\,IV}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \overset{III-2\cdot II}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{IV-\frac{2}{5}III}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-5)\cdot\frac{-6}{5} = -6$$

$+\frac{4}{5}-2=\frac{-6}{5}$

LA1 - 9. Tutorium 18.1.22

Noch einige Dinge zum rang einer Matrix.

Für lineare Abb $\Phi : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ mit darst. Matrix $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ist $\operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{ran}(\Phi)$

<u>Satz 1</u> Seien $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ so, dass AB invertierbar
$\Rightarrow$ A und B invertierbar
(In dem Fall gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$)

<u>Bew</u> AB invertierbar $\Rightarrow$ $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$, sodass $(AB) \cdot C = \mathbb{1}_n$

$$\Rightarrow n = \operatorname{rang}(\mathbb{1}_n) = \operatorname{rang}(A(BC))$$

$$\leq \min(\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(BC))$$

$$\leq \operatorname{rang}(A) \leq n$$

$\Rightarrow$ $n \leq \operatorname{rang}(A) \leq n$ $\Rightarrow$ $\operatorname{rang}(A) = n$
$\Rightarrow$ A ist invertierbar (sh letzte Woche)

$\Rightarrow$ $B = \underbrace{A^{-1}}_{\text{invbar}} \underbrace{AB}_{\text{invbar.}}$ ebenfalls invertierbar, da $GL(n, \mathbb{F})$ Gruppe ☐

<u>Lemma 2</u> Angenommen $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ - Matrizen
$\Rightarrow$ $\operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$

("rang ist subadditiv")

<u>Beweis</u> $\operatorname{ran}(A+B) = \{(A+B)x : x \in \mathbb{F}^n\}$
$= \{Ax + Bx : x \in \mathbb{F}^n\}$
$\subseteq \{Ax : x \in \mathbb{F}^n\} + \{Bx : x \in \mathbb{F}^n\}$ / $z = Ax + Bx$, $x \in \mathbb{F}^n$ $\Rightarrow z \in \operatorname{ran} A + \operatorname{ran} B$

$$\Rightarrow \dim(\operatorname{ran}(A+B)) \leq \dim(\operatorname{ran}(A) + \operatorname{ran} B) \qquad (\dim U \leq \dim V \text{ wann immer } U \subseteq V)$$

$$\overset{\text{Satz IV.13}}{=} \dim \operatorname{ran}(A) + \dim \operatorname{ran} B - \underbrace{\dim(\operatorname{ran}(A) \cap \operatorname{ran}(B))}_{\geq 0}$$

$$\leq \dim \operatorname{ran}(A) + \dim \operatorname{ran}(B)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) \qquad \square$$

uv^T heißt Rang-Eins-Matrix für $u, v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$

Satz 3 Seien $u, v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \operatorname{rang}(uv^T) = 1$

Beweis "$\leq$": $\operatorname{rang}(uv^T) \leq \min(\operatorname{rang}(u), \operatorname{rang}(v^T))$

$$\leq \operatorname{rang}(u) = 1$$

$B = (b_1, \dots b_n)$

$b_1, \dots b_n \in \mathbb{F}^m$

"$\geq$" wir verwenden: $\mathbb{F}^{m \times n} \ni B = 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(B) = 0$

Beweis: $\operatorname{rang}(B) = \dim \operatorname{span}(b_1, \dots b_n)$

da $B = 0$ folgt $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{span}(b_1, \dots b_n) = \{\vec{0}\}$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{span}(b_1, \dots b_n) = 0 \qquad \square$$

Da $u, v \neq \vec{0}$ ist $uv^T \neq 0$ (Nullmatrix),

denn $\exists\, u_k, v_l \neq 0$

$$\Rightarrow (uv^T)_{kl} = u_k \cdot v_l \neq 0$$

Wir haben also gezeigt, dass $uv^T \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(uv^T) \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(uv^T) \geq 1$, da $\operatorname{rang}(A) \in \{0, 1, \dots\}$

$\forall A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ $\square$

zur Störung der Identität mit Rang-Eins-Matrizen:

Satz 4 Seien $u, v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$ und $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ invertierbar.

$$\Rightarrow \det(A + uv^T) = \det(A) \cdot \underbrace{(1 + v^T \cdot A^{-1} \cdot u)}_{\in \mathbb{F}}$$

Beweis In zwei Schritten:

1. Schritt: angenommen $A = \mathbb{1}$

Zeige $\det_n(\mathbb{1} + uv^T) = \det_1(1 + v^T u) = 1 + v^T u$

$$\det_n(\mathbb{1} + uv^T) \underset{\text{Kästchensatz}}{=} \det_{n+1}\begin{pmatrix} \mathbb{1} + uv^T & ? \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Idee: Führe $\begin{pmatrix} \mathbb{1} + uv^T & ? \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ über in $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & ? \\ 0 & 1 + v^T u \end{pmatrix}$

genauer Finde Matrizen $S, T \in \mathbb{F}^{(n+1) \times (n+1)}$, sodass

$$S \begin{pmatrix} \mathbb{1} + uv^T & ? \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & ? \\ 0 & 1 + v^T u \end{pmatrix}$$

mit Eigenschaft, dass $\det(S) = \det(T) = \pm 1$

Umsetzen der Idee: wir haben die Identität

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix}}_{S} \begin{pmatrix} \mathbb{1} + uv^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix}}_{T} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & u \\ 0 & 1 + v^T u \end{pmatrix}$$

LHS .. left had side
RHS .. right had side $\Rightarrow \det(LHS) = \det(RHS)$

$$\det(LHS) = \underbrace{\det(S)}_{=1} \det(\mathbb{1} + uv^T) \cdot \underbrace{\det(T)}_{=1} = \det(\mathbb{1} + uv^T)$$

$\det(RHS) = 1 + v^T u$

2. Schritt: Allgemeiner Fall $A \in GL(n, \mathbb{F})$

$$\det(A + uv^T) \overset{?}{=} \det(A) \cdot (1 + v^T A^{-1} u)$$

$$\begin{aligned} A + uv^T \\ = A \cdot (\mathbb{1} + A^{-1} u v^T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\det\left(A \cdot (\mathbb{1} + (A^{-1}u) \cdot v^T)\right) \\ &= \det(A) \cdot \det(\mathbb{1} + \underbrace{(A^{-1}u) \cdot v^T}_{\text{Rang-Eins}}) \\ &\overset{\text{Schritt 1}}{=} \det(A) \cdot (1 + v^T \cdot (A^{-1}u)) \end{aligned}$$

$\square$

Satz 5 (Baby-Version von Jacobis Formel)

$\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ gilt $\frac{d}{dt} \det(\mathbb{1} + t \cdot A)\Big|_{t=0} = tr(A)$

Beweis $A = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbb{1}_n = (e_1, \dots, e_n)$

$$\det(\mathbb{1} + t \cdot A) = \det(e_1 + t a_1, e_2 + t a_2, \dots, e_n + t a_n)$$

$$\overset{\substack{\text{Linearität} \\ \text{bzgl. Spalte}}}{=} \det(e_1, e_2 + t a_2, \dots, e_n + t a_n) + t \cdot \det(a_1, e_2 + t a_2, \dots, e + t a_n)$$

$$t \cdot \sum_{j=1}^n \det(e_1 \dots a_j \dots e_n)$$

$$\begin{aligned} &= \det(e_1, e_2, \dots, e_n) \\ &\quad + t \cdot (\det(a_1, e_2, \dots, e_n) + \dots + \\ &\quad\quad + \det(e_1, a_2, e, \dots, e_n)) \\ &\quad + t^2 \cdot \dots + t^3 \cdot \dots + \dots + t^n \cdot \dots \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{1n} & \vdots & & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \det(\mathbb{1} + tA)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{\det(\mathbb{1} + tA) - \det(\mathbb{1})}{t}$$

$$= \det(a_1, e_2, \dots, e_n) + \dots + \det(e_1, e_2, \dots, a_n)$$

$$= a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = tr(A) \qquad \boxtimes$$

Bemerkung: Jacobis Formel besagt

$$\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \det(A(t)) \cdot tr\left(A(t)^{-1} \cdot \frac{dA(t)}{dt}\right)$$

$$A(t): \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{I}} \mapsto \mathbb{F}^{n\times n} \qquad \text{matrixwertige, diff'bare Fkt.}$$

Übung **LGS** Für gegebene $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ betrachten wir das reelle LGS

$$\begin{aligned} \lambda x + y &= \mu \\ x + \lambda y + z &= \mu \\ y + \lambda z &= \mu \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{3\times 3}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

Frage Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist LGS lösbar?

A Nach Satz VII.9 bzw. der Verfeinerung der letzten Woche hat LGS eine <u>eindeutige</u> Lsg, falls A invertierbar.
Dazu könnten wir $\det(A)$ bestimmen. (zB mit Sarrus)

Dazu bringen wir das LGS in obere rechte Dreiecksform (mit EZU, ESU)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & \mu \\ 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{III}]{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & 1 & 0 & \mu \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III} - \lambda \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 1-\lambda^2 & -\lambda & \mu - \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} - (1-\lambda^2)\,\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\lambda - \lambda(1-\lambda^2) & \mu - \lambda - \mu(1-\lambda^2) \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \det(A) = (-1)\cdot(-\lambda - \lambda(1-\lambda^2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda^2 = 2$$

$\Rightarrow$ Für $\lambda \neq 0$ und $\lambda^2 \neq 2$ ist LGS eindeutig lösbar

Nun noch die Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda^2 = 2$

Fall $\lambda = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \mu \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ 2 Gleichungen für 3 Unbekannte

$\Rightarrow$ Lsg: $x + z = \mu \Leftrightarrow x = \mu - z$

$y = \mu$

Lsg $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - z \\ \mu \\ z \end{pmatrix}$ mit $z \in \mathbb{R}$

$= \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow z \in \mathbb{R}$ freier Parameter

$\Rightarrow$ für $\lambda = 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig gibt es unendlich viele Lsgen des GL-Systems

Fall $\lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = \epsilon \cdot \sqrt{2}$ mit $\epsilon \in \{\pm 1\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \epsilon\sqrt{2} & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \epsilon\sqrt{2} & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \epsilon\sqrt{2} - \epsilon\sqrt{2}(1-2) \end{array}\right)$$

Betrachte dritte Zeile: $0 = \mu - \epsilon\sqrt{2} + \epsilon\sqrt{2} = \mu$

$x + \epsilon\sqrt{2}y + z = 0$

$y + \epsilon\sqrt{2}z = 0$

$y = -\epsilon\sqrt{2}z$

$\rightarrow x - 2z + z = 0$

$x = z$

$\Rightarrow$ Falls $\mu \neq 0$, dann hat LGS (mit $\lambda^2 = 2$) keine Lsg!

Verbleibt zu untersuchen $\lambda = \mu = 0$

$\rightarrow$ In dem Fall ist Lsg $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -\epsilon\sqrt{2}z \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -\epsilon\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot z \quad \text{für } z \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ für $\lambda = \mu = 0$ gibt es unendlich viele Lsgen

$$\Rightarrow \text{ GLS lösbar} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \wedge \lambda^2 \neq 2 ; \mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{eindeutige Lsg} \\ \lambda = 0 \wedge \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \infty \text{ viele Lsg} \\ \lambda^2 = 2 \wedge \mu = 0 \Rightarrow \infty \text{ viele Lsg} \end{cases}$$

$\lambda^2 = 2 \wedge \mu \neq 0 \Rightarrow$ GLS nicht lösbar.

$\square$

LA I – 10. Tutorium

25.1.2022

$f(x) = f(-x) \quad :\Leftrightarrow f$ heißt gerade / symmetrisch

$f(x) = -f(-x) \quad :\Leftrightarrow f$ heißt ungerade

$$h(x) \equiv f(x)g(x) \begin{cases} \text{gerade, wenn } f, g \text{ gerade } \underline{\text{oder}} \text{ ungerade} \\ \text{ungerade, wenn } f \text{ gerade und } g \text{ ungerade oder umgekehrt} \end{cases}$$

$$\int_{-a}^{a} h(x) = \int_0^a h(x) + \underbrace{\int_{-a}^{0} h(x)}_{\int_0^a h(-x)dx} = \begin{cases} 2\int_0^a h(x) & h \text{ gerade} \\ 0 & h \text{ ungerade} \end{cases}$$

/ Erinnerung:
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \underset{\substack{x \mapsto \varphi(x) \\ dx \to d\varphi(x) = \varphi'(x)dx}}{=} \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx$$

<u>Bsp</u> $\varphi(x) = -x$: $\int_{-a}^{-b} f(x)\,dx = -\int_a^b f(-x)\,dx = \int_b^a f(-x)dx$

Euklidisches Skalarprodukt und orthogonale Gruppe.

<u>Behauptung</u>: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dann gelten

(a) $\exists!\ \varphi \in [0, \pi]$ mit $\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{|x| \cdot |y|}$

(b) $x \perp y$, sprich $\measuredangle(x,y) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$

<u>Bemerkungen</u> • $|x| \equiv |x|_2 \equiv \|x\|_2 \equiv \|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3 + \dots + x_n^2)^{1/2}$
(euklidische Norm)
euklidische Norm wird durch euklidisches Skalarprodukt induziert

$$|x|^2 = \langle x|x\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

- $\measuredangle(x,y)$ Winkel zwischen x und y

Beweis (a) $$\frac{|\langle x|y\rangle|}{|x||y|} \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \frac{|x||y|}{|x||y|} = 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq \underline{\frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}} \leq 1$$

Da $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ bijektiv ist, gibt es ein eindeutiges $\varphi \in [0,\pi]$ mit $\cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}$

(b) $$|x+y|^2 = \langle x+y|x+y\rangle = |x|^2 + |y|^2 + \underbrace{\langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle}_{\substack{= 2\cdot|x||y|\cdot\cos\measuredangle(x,y)\\ =0}}$$

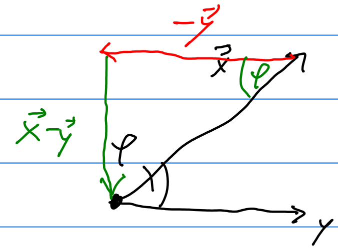
$$= |x|^2 + |y|^2 \qquad \square$$

Behauptung 2 Seien $x,y \in \mathbb{R}^n$. Dann gelten

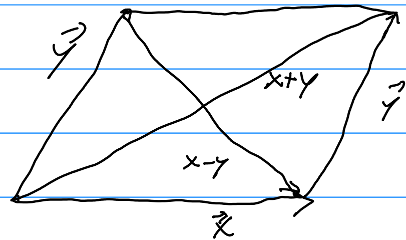
(a) $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\measuredangle(x,y)$
(b) $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$

Bew (a) $\langle x-y|x-y\rangle = |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x|y\rangle$
(b) analog $\qquad \square$

Bemerkungen (a) Kosinussatz:
$(n=2)$

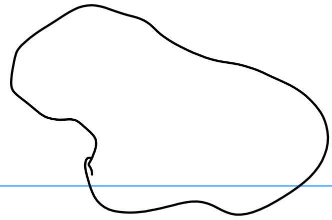


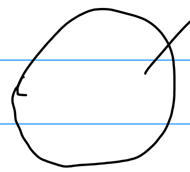
(b)



"Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich Summe der

Quadrate aller vier Seiten





$\rho(x)$

$$\int \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dy$$

$$\int dr\ r^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\ \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \frac{\rho(r)}{\left(|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos\vartheta\right)^{1/2}}$$

Orthogonale Gruppe: $O(n) = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T A = \mathbb{1}_n \}$

<u>Satz 3</u> Angenommen $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (a) A ist orthogonal

$Ax = \begin{pmatrix} (Ax)_1 \\ \vdots \\ (Ax)_n \end{pmatrix}$ (b) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : |Ax| = |x|$ (Längentreue, Isometrie)

$(Ax)_j = \sum_{\ell=1}^n A_{j\ell}\, x_\ell$ (c) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ (Winkeltreue)

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2} = \left[\sum_{j=1}^n \left((Ax)_j\right)^2\right]^{1/2} \qquad \sum_{j=1}^n (Ax)_j \cdot (Ay)_j = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

<u>Bemerkung</u> Jede Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (d.h. $|f(x)-f(y)| = |x-y|\ \forall x,y$) kann als $f(x) = Ax + b$ geschrieben werden mit $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$.

<u>Beweis</u> (a) $\Rightarrow$ (b) angenommen $A^T A = \mathbb{1}_n$.

$$|Ax|^2 = \langle Ax | Ax \rangle = \langle x | A^T A x \rangle = \langle x | x \rangle = |x|^2$$

denn $\sum_{j=1}^n (Ax)_j\, (Ax)_j = \sum_{\substack{j=1 \\ \ell=1}}^{n} A_{j\ell}\, x_\ell\, (Ax)_j$

$$= \sum_{j,l=1}^{n} x_l \cdot (A^T)_{lj} (Ax)_j$$

$$= \sum_{l=1}^{n} x_l \cdot (A^T A x)_l = \langle x, A^T A x \rangle$$

b) $\Rightarrow$ (c) Wir verwenden die reelle Polarisationsidentität

$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\left(|x+y|^2 - |x-y|^2 \right)$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \frac{1}{4}\left(|Ax+Ay|^2 - |Ax-Ay|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(|A(x+y)|^2 - |A(x-y)|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(|x+y|^2 - |x-y|^2 \right) = \langle x,y \rangle$$

(c) $\Rightarrow$ (a) genügt zu zeigen, dass $|(A^T A - \mathbb{1})y| = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$

(denn dann gilt $A^T A y = y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$, d.h. $A^T A = \mathbb{1}_n$)

dazu $|(A^T A - \mathbb{1})y|^2 = \langle (A^T A - \mathbb{1})y, (A^T A - \mathbb{1})y \rangle$

$= 0$

denn es gilt $\underbrace{\langle x, (A^T A - \mathbb{1})y \rangle} = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$.

$= \langle x, A^T A y \rangle - \langle x, y \rangle$

$= \langle Ax, Ay \rangle - \langle x, y \rangle = 0$ wg Winkeltreue

☒

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n, \; A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\left(\langle x, Ay \rangle = \langle A^* x, y \rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{C}^n, \; A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \; A^* = (\overline{A})^T \right.$$

Bsp $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}$)

Satz 4 Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann sind äquivalent.

(a) $A \in O(n)$ $\quad (A^T A = \mathbb{1}_n)$

(b) $A^T \in O(n)$ $\quad (A A^T = \mathbb{1}_n)$

(c) $A \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $A^{-1} = A^T$

Bew (a) $\Rightarrow$ (c) angenommen $A^T A = \mathbb{1}_n \Rightarrow A^T$ und A sind invertierbar.

$AB \in GL(n, \mathbb{F})$
$\Rightarrow A, B \in GL(n, \mathbb{F})$

$$\Rightarrow A^T = A^T (A \cdot A^{-1}) = \mathbb{1}_n \cdot A^{-1}$$

(b) $\Rightarrow$ (c) analog: $A^T = A^{-1} \underbrace{A A^T}_{=\mathbb{1} \text{ per Voraussetzung}} = A^{-1}$

(c) $\Rightarrow$ (a) $A^T A = A^{-1} A = \mathbb{1}$

(c) $\Rightarrow$ (b) analog $\square$

Satz 5 Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in O(n)$. Dann gelten

(a) $|\det A| = 1$

(b) $b_1, \dots b_n$ ONB von $\mathbb{R}^n \Rightarrow Ab_1, \dots Ab_n$ ONB von $\mathbb{R}^n$

(c) $O(n)$ Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$

Beweis (a) $|\det(A)|^2 = (\det(A))^2 = \det(A) \cdot \det(A^T)$
$= \det(A \cdot A^T) = \det \mathbb{1}_n = 1$

(b) Da orthonormale Mengen stets linear unabhängig sind und wir $n = \dim \mathbb{R}^n$ viele Vektoren $Ab_1, \dots Ab_n$ haben, genügt es zu zeigen, dass $\langle Ab_i \mid Ab_j \rangle = \delta_{ij}$

In der Tat $\langle Ab_i \mid Ab_j \rangle = \langle b_i \mid A^T A b_j \rangle$
$= \langle b_i \mid b_j \rangle = \delta_{ij}$

(c) • $\emptyset \subsetneq O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$

($O(n)$ nicht leere Menge) $\quad \emptyset \subsetneq O(n)$, denn $\mathbb{1}_n \in O(n)$ ✓

$O(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$ folgt aus Satz 4
$(A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} = A^T)$

• Sei $A, B \in O(n) \Rightarrow (AB)^T AB = B^T \underbrace{A^T A}_{=\mathbb{1}} B$

$= B^T B = \mathbb{1}_n$

d.h. $AB \in O(n)$

• Sei $A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$, denn

$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{1}_n$

$\square$

Bspe Idee: $O(n)$ sind Spiegelungen und Rotationen

$n=2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ Spiegelung an x-Achse

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ Spiegelung an y-Achse

beide Matrizen haben $\det(..) = \underline{\underline{-1}}$

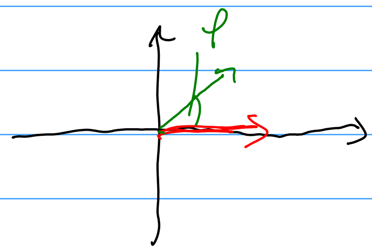
$\underline{n=3}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ Punktspiegelung

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

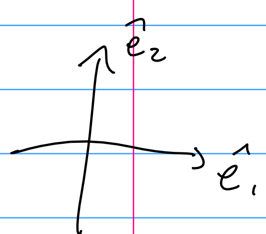
Spiegelung an xy-Ebene $\qquad$ 180°-Rotation um z-Achse

Rotationen $\quad n=2 \quad R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\quad$ Rotation in xy-Ebene gegen den Uhrzeigersinn mit Winkel φ

$$R(\varphi)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

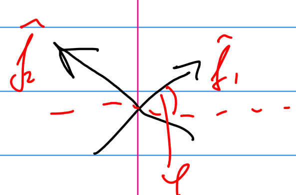


$R(\varphi)$ in obiger Schreibweise heißt <u>aktive Rotation</u> denn Koordinatensystem bleibt unberührt, nur Vektoren werden rotiert.



Passive Rotation: Vektor unberührt, aber KS wird rotiert. Diese werden durch $R(\varphi)^T$ erzeugt.

$$\vec{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 \qquad (\hat{e}_1, \hat{e}_2 \text{ Standardbasis})$$



Seien $\quad \hat{f}_1 = R_\varphi \hat{e}_1 \qquad \hat{f}_2 = R_\varphi \hat{e}_2$

<u>Frage</u> Koordinaten von $\vec{x}$ im $(\hat{f}_1, \hat{f}_2)$-KS?

$$\vec{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 = \tilde{x}_1 \hat{f}_1 + \tilde{x}_2 \hat{f}_2$$

Die $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ erhalten wir wie folgt:

$$\vec{x} = \tilde{x}_1 R_\varphi \hat{e}_1 + \tilde{x}_2 R_\varphi \hat{e}_2 = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2$$
$$\Rightarrow \tilde{x}_1 \hat{e}_1 + \tilde{x}_2 \hat{e}_2 = (R_\varphi)^T (x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = (R_\varphi)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Wichtig $n=2$: $O(n)$ abelsch

$n \geq 3$: $O(n)$ <u>nicht</u> abelsch

1.2.22

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Entwicklung um kleine Winkel / Matrixexponential

$n=2$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\varphi^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

formal um $\varphi=0$ entwickeln

$$+ \frac{\varphi^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\varphi^4}{4!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\varphi^5}{5!} \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \mathbb{1} + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-\cos\varphi) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \exp\left(\varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Matrixexponential: $\exp: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$

$$A \mapsto \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

Die Reihe $\sum \frac{A^k}{k!}$ konvergiert gleichmäßig, z. B. in der sogenannten Matrixnorm, die für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch

$$\|A\| := \sup\left\{ \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} : \vec{0} \neq x \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

Die Matrixnorm ist submultiplikativ, d.h. für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$$\left(\frac{\|ABx\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|Bx\|}{\|Bx\|} \right)$$

bzgl $\|\cdot\|$ ✓

Damit können wir die glm Konvergenz von $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ zeigen. Dies folgt aus der absoluten Konvergenz

$$\|e^A\| \leq \sum \frac{\|A^n\|}{n!} \underset{\text{submultiplikativität}}{\leq} \sum \frac{\|A\|^n}{n!} = \exp(\|A\|) < \infty$$

Das Matrixexponential erlaubt die Darstellung allgemeiner Rotationen innerhalb einer Ebene, die durch zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ aufgespannt wird.

$$R(\varphi) = \exp\left(\varphi\left(b \cdot a^T - a b^T\right)\right)$$

Heute: Hölder- und Minkowski-Ungleichungen

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{C}^n$ $\quad a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$1 \leq p < \infty$: $\quad \|a\|_p := \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p}$ $\quad$ p-Norm.

$p = \infty$: $\quad \|a\|_\infty = \max\limits_{j=1\dots n} |a_j|$ $\quad$ ∞-Norm / Maximumsnorm

Hölder: $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_{p'}$; p' heißt Hölder-konjugierter Exponent, der durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ mit der

$$\|a\|_p^\alpha \cdot \|b\|_{p'}^\beta$$

Konvention $p' = 1$ falls $p = \infty$, $p' = \infty$ falls $p = 1$.

falsches Hölder

$\sum |a_j b_j| \le \|a\|_p^\alpha \|b\|_{p'}$

Angenommen wir ersetzen $a = (a_1 \dots a_n)$ durch $a_\lambda = \lambda (a_1 \dots a_n)$ mit $\lambda > 0$

und angenommen $\alpha = 2$, $\beta = 1$ "falsches Hölder"

$$\sum_j |(a_\lambda)_j b_j| = \underline{\lambda \cdot \sum |a_j \cdot b_j|} \le \|a_\lambda\|_p^2 \|b\|_{p'}$$

$$= \underline{\lambda^2 \cdot \|a\|_p \|b\|_{p'}}.$$

$$\rightarrow \sum |a_j b_j| \le \lambda \|a\|_p \|b\|_{p'} \qquad a = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

"Skalierungstrick" voll hilfreich für $\|x\|_p \le \|x\|_q$, $p \ge q$

$(p = \infty, \quad q = 1)$

Eine wichtige Zutat für den Beweis von Hölder ist

__Lemma 1__ (Young'sche Ungleichung) Seien $a, b > 0$ und $p \in (1, \infty)$

Dann gilt $a \cdot b \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ (mit $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$)

(Bem: Für $p = 2$ folgt die Ungleichung aus binomischer Formel

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \ge 0 \Leftrightarrow ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2})$$

__Beweis__ Sei $t = \frac{1}{p} \in (0, 1)$. Dann folgt aus der Konkavität vom Logarithmus

$$\log(t\, a^p + (1-t)\, b^{p'}) \overset{\text{Konkavität}}{\ge} t \cdot \log a^p + (1-t) \log b^{p'}$$

$$= \log a + \log b = \log(ab)$$

$\Leftrightarrow$ Anwenden von $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ zeigt

$$t a^p + (1-t) b^{p'} \geq ab$$ $\boxtimes$

<u>Bemerkung</u> In Youngs Ungleichheit haben wir Gleichheit genau dann, wenn

$$a^p = b^{p'}.$$

<u>Lemma 2</u> (Hölder) Seien $a, b \in \mathbb{C}^n$ $a = (a_1, \ldots, a_n)$ $b = (b_1, \ldots, b_n)$

$$\sum |a_j b_j| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_{p'} \quad \forall\ 1 \leq p \leq \infty$$

Falls $p \in (1, \infty)$ gilt Gleichheit genau dann, wenn die Vektoren $(|a_1|^p, |a_2|^p, \ldots, |a_n|^p)$ und $(|b_1|^{p'}, \ldots, |b_n|^{p'})$ linear abhängig sind.

<u>Beweis</u> Seien $\alpha = \frac{a}{\|a\|_p}$ und $\beta = \frac{b}{\|b\|_{p'}}$ wenn $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dann sind $\|\alpha\|_p = \|\beta\|_{p'} = 1$.

$p = 1$, $p' = \infty$: $\sum_j |\alpha_j \beta_j| \leq \max |\beta_j| \sum |\alpha_j| = \|\beta\|_\infty \|\alpha\|_1$.

$p' = \infty$, $p = 1$ analog.

$$p \in (1, \infty): \sum_{j=1} |\alpha_j| \cdot |\beta_j| \overset{\text{Young}}{\leq} \sum \left(\frac{|\alpha_j|^p}{p} + \frac{|\beta_j|^{p'}}{p'} \right)$$

$$= \frac{1}{p} \|\alpha\|_p^p + \frac{1}{p'} \|\beta\|_{p'}^{p'}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Damit ist $\sum \frac{|a_j|}{\|a\|_p} \cdot \frac{|b_j|}{\|b\|_{p'}} \leq 1 \Leftrightarrow \sum |a_j b_j| \leq \|a\|_p \|b\|_{p'}$

$\boxtimes$

<u>Lemma 3</u> (Minkowski- / Dreiecksungleichung)

Seien $a, b \in \mathbb{C}^n$, $1 \leq p \leq \infty \Rightarrow \|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$

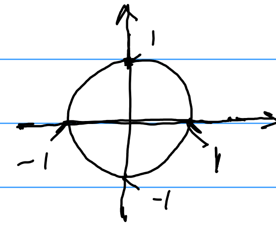
Gleichheit gilt genau dann, wenn es $\lambda > 0$ gibt, sodass $a = \lambda b$.

Wie schauen die Niveau- und die sublevel-Mengen, sprich $\{ x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_p = 1 \}$ bzw. $\{ x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_p \leq 1 \}$?

Graphisch einfach für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $n = 2$.

$\{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1 \}$; $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$

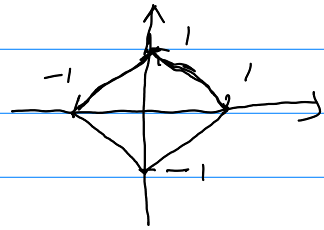
$p = 2$: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: $|x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 1$



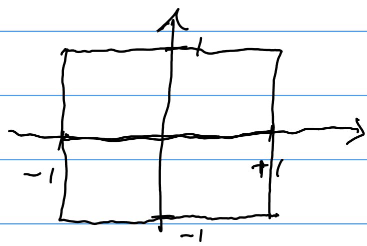
$p = 1$: $|x_1| + |x_2| \leq 1 \Leftrightarrow |x_2| \leq 1 - |x_1|$

$0 \leq x_2 \leq 1 - |x_1|$

oder $0 \geq x_2 \geq -1 + |x_1|$



$p = \infty$: $\max |x_1|, |x_2| \leq 1$



→ graphisch sieht man, dass $\{ x : \|x\|_p \leq 1 \} \subseteq \{ x : \|x\|_q \leq 1 \}$ für alle $1 \leq p \leq q \leq \infty$

→ folgt aus der Ungleichung $\|x\|_q \leq \|x\|_p \quad \forall\, p \leq q$.

Bsp für Gram-Schmidt:

$X = C([0,1]:\mathbb{R})$ VR der stetige, reellwertige Fkten auf $[0,1]$ mit Skalarprodukt $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)\,dt$. $\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}$

Seien $f_j(t) = t^j$ für $j = 0, 1, 2, \dots$ linear unabhängige Vektoren in X.

$Y = \text{span}\{\underline{\underline{f_0}}, \underline{\underline{f_1}}, \underline{\underline{f_2}}\}$. Frage: Finde ONB von Y.

$$\underset{\{e_j\}_{j=0}^2}{\overset{\shortparallel}{\text{ONB}}}$$

Wir starten mit $e_0(t) = \dfrac{f_0(t)}{\|f\|} = \dfrac{1}{\left(\int_0^1 dt\right)^{1/2}} = 1$

$$e_1(t) = \frac{f_1(t) - e_0(t)\cdot\langle e_0, f_1\rangle}{\|f_1 - e_0\langle e_0, f_1\rangle\|} \qquad \langle e_0, f_1\rangle = \int_0^1 dt\; 1\cdot t = 1/2$$

$$= \frac{t - 1\cdot 1/2}{\|f_1 - e_0\langle e_0, f_1\rangle\|} \qquad \|f_1 - e_0\langle e_0, f_1\rangle\|^2 = \int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})^2\,dt$$

$$= \sqrt{12}\,(t - 1/2) \qquad = \dots = (12)^{-1/2}$$

$$\int_0^1 t^2\,dt$$

$$e_2(t) = \frac{f_2(t) - e_0(t)\langle e_0, f_2\rangle - e_1(t)\langle e_1, f_2\rangle}{\|\text{Zähler}\|}$$

$$\int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})t^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$= \frac{t^2 - 1\cdot 1/3 - 12\cdot\frac{1}{12}(t - 1/2)}{\|\text{Zähler}\|} = \dots = 6\sqrt{5}\,(t^2 - t + \tfrac{1}{6})$$

Lin Alg I – 12. Tutorium

8.2.22

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$

Frage: Was sind (reelle) Eigenwerte & Eigenvektoren von A?

EW $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}_2) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix}$

$= (a-\lambda)^2 - b^2 = (a-\lambda-b)(a-\lambda+b)$

$\Rightarrow$ Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$ = EW von A sind also

$\lambda_1 = a - b$ und $\lambda_2 = a + b$

Wir unterscheiden zwischen einfachen und mehrfachen Nullstellen.

Notation / Terminologie:

Algebraische Multiplizität eines EW λ

= Grad d. Nullstelle λ von $\chi_A(\lambda)$

Fall $b = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = a$, d.h. λ_1 bzw λ_2 haben algebraische Multiplizität 2.

$A \underset{\substack{\uparrow \\ b=0}}{=} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \cdot \mathbb{1}_2$ $\Rightarrow$ Menge aller zu $\lambda = a$ gehörenden Eigenvektoren ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.

Beobachtung $\dim \ker(A - a\mathbb{1}) = 1$, wenn $b = 0$.

Terminologie: Für einen Eigenwert λ von A bezeichnet man $\dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})$ als geometrische Vielfachheit

Tatsache: geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit

Zurück zur Aufgabe: angenommen $b \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = a - b \qquad \lambda_2 = a + b$$

Eigenvektor zu λ_1: $(A - \lambda_1 \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(x+y) \\ b(x+y) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = -x$$

$\Rightarrow$ Menge d. EV zum EW $\lambda_1 = a - b$ ist

$$\operatorname{spann}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Eigenvektor $\lambda_2 = a + b \Rightarrow A - \lambda_2 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Menge d. EV zu $\lambda_2 = a + b$ ist

$$\operatorname{spann}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$\Diamond$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

Frage: Für welche Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist A diagonalisierbar?

Satz X. 2 : A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Summe aller geom. Vielfachheiten $= 3$

Wir bestimmen zunächst die EW von A.

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

$\Rightarrow$ EW sind $\lambda_1 = -1$ (alg Multiplizität $=$ geom Mult $= 1$)

$\lambda_2 = 2$ (alg Mult $= 2$)

$$\dim\ker(A - 2\mathbb{1}_3) = \dim\ker\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{\text{Satz V.5}}{=} 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Rang ändert sich nicht unter elementaren Zeilen- & Spaltenumformungen (sh Tutorium 8)

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \overset{II/\gamma}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{III + 3II}{\overset{I - \beta II}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \alpha \neq 0 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dim\ker(A - 2\mathbb{1}) = \begin{cases} 2 & \alpha = 0 \\ 1 & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\alpha = 0 \wedge \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(3) $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\quad \varphi \in \mathbb{R}$ oder $\varphi \in \mathbb{C}$

Bestimmen Sie alle reellen und komplexen EW mit zugehörigen Vektoren

EW: $\chi_{R(\varphi)}(\lambda) = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi \overset{!}{=} 0$

$\lambda \in \mathbb{R}$: beide Summanden müssen 0 sein

$\Rightarrow \varphi = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Fall 1: $\varphi = 2k\pi \rightarrow \cos\varphi = 1 \rightarrow \lambda = 1$

$R(2k\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und zugehörige Menge von EV ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$

Fall 2 $\varphi = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow \cos\varphi = -1$

$\lambda = -1$

$R((2k+1)\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Menge der zugehörigen EV ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$

(In beiden Fällen ist alg Multiplizität $= 2$)

Komplexe EW / komplexe φ.

$(\cos\varphi - \lambda)^2 - (i)^2 \cdot \sin^2\varphi$

$= (\cos\varphi - \lambda - i\sin\varphi)(\cos\varphi - \lambda + i\sin\varphi)$

$\Rightarrow$ EW sind $\lambda_1 = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\lambda_2 = e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

EV $$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{!}{=} e^{i\varphi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix} \underset{\substack{x=1 \\ y=-i}}{=} e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Menge aller EV zum EW $\lambda_1 = e^{i\varphi}$ ist $\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\}\right)$

Analog ist Menge aller EV zum EW $\lambda_2 = e^{-i\varphi}$ gerade $\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}\right)$

(4) $A, B \in K^{n\times n}$ $(K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$

$\Rightarrow$ AB und BA haben dieselben Eigenwerte

Beweis Wir zeigen $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Schritt 1 Angenommen $A \in GL(n, K) \vee B \in GL(n, K)$

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(AB - \lambda \mathbb{1})$$

$$= \det(A(B - \lambda A^{-1})) \quad A \in GL(n, K)$$

$$= \det(A)\det(B - \lambda A^{-1}) \quad (\det \text{ multiplikativ})$$
$$= \det(B - \lambda A^{-1})\det(A)$$
$$= \det(BA - \lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$$

(B invertierbar geht analog)

Schritt 2 allgemeine $A, B \in K^{n \times n}$.

Angenommen $\det \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_n & A \\ B & \mathbb{1}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & B \\ A & \lambda \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$

Aus Tutorium 9 wissen wir zusätzlich

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det (AD - CB) \quad \forall B, C, D \in K^{n \times n}$$

und $A \in GL(n, K)$

mit $AC = CA$

$\lambda = 0$: $\chi_{AB}(0) = \underset{\det(A)\det(B)}{\det(AB)} = \det(BA) = \chi_{BA}(0)$

$\lambda \neq 0$: $\det(\lambda \mathbb{1}_n - AB) \overset{T9}{=} \det \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & B \\ A & \lambda \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$

$\overset{\text{Hinweis}}{=} \det \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_n & A \\ B & \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$

$\overset{T9}{=} \det(\lambda \mathbb{1}_n - BA)$ $\square$

Beweis v. Hinweis: für $n = 1$ ist $\det \begin{pmatrix} \lambda & A \\ B & 1 \end{pmatrix}$

$= (-1) \det \begin{pmatrix} B & 1 \\ \lambda & A \end{pmatrix}$

$= (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & B \\ A & \lambda \end{pmatrix}$

falls $n \geq 2$: vertausche sukzessive

1. mit $(n+1)$-ter Zeile, dann
2. mit $(n+2)$-ter Zeile, dann

$\vdots$

n. mit $(2n)$-ten Zeile,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_n & A \\ B & \mathbb{1}_n \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} B & \mathbb{1}_n \\ \lambda \mathbb{1}_n & A \end{pmatrix}$$

jetzt nochmal dasselbe Vorgehen mit Spalten

vertausche sukzessive

1. mit $(n+1)$-ter Spalte dann

2. mit $(n+2)$-ter Spalte, dann

$\vdots$

n. mit $(2n)$-ten Spalte,

$$\det\begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_n & A \\ B & \mathbb{1}_n \end{pmatrix} = (-1)^{2n} \det\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & B \\ A & \lambda \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$$

$\boxtimes$

LA I - 13. Tutorium $\qquad z = re^{i\varphi} \quad r>0,\ \varphi\in\mathbb{R} \Rightarrow |z| = r$ $\qquad$ 15.2.22

A1 a) $w_1 = 3e^{5\pi i/3} \qquad w_2 = 5e^{3\pi i/2}$

$|w_1| = 3 \qquad \frac{w_1}{w_2} = \frac{3e^{5\pi i/3}}{5e^{3\pi i/2}} = \frac{3}{5}\cdot \exp\left(\frac{5\pi i}{3} - \frac{3\pi i}{2}\right)$

$$= \frac{3}{5}\exp\left(\frac{\pi i}{6}\right)$$

b)

$$C = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$(C,+,\cdot)$ ist ein Körper (ohne Beweis)

$\mathcal{J} : \mathbb{C} \to C \qquad a+ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$

Surjektivität: Sei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix} \in C$. Dann ist

$$A = \mathcal{J}(a+ib)$$

Injektivität: $\underbrace{\mathcal{J}(z_1)}_{a_1+ib_1} = \underbrace{\mathcal{J}(z_2)}_{a_2+ib_2} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2\end{matrix}$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2$$

Verträglichkeit mit der Körperop.

'Addition' $\mathcal{J}(z_1+z_2) = \mathcal{J}(a_1+a_2+i(b_1+b_2))$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2\end{pmatrix}$$

'Multiplikation': $\mathcal{J}(z_1 z_2) = \mathcal{J}(a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1))$

$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

Neutrale Elemente bzgl $+, \cdot$ werden auf neutrale Elemente abgebildet

$+ \qquad \mathcal{J}(0 + i\,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\cdot \qquad \mathcal{J}(1 + i \cdot 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \square$

$\underline{|A2|}$ $\quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ t^2 \end{pmatrix}$

$\sum d_j u_j = 0 \Rightarrow d_j = 0 \Leftrightarrow$ lineare Unabhängigkeit

Wir verwenden Fredholm (Satz VII. 1)

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \underset{\in \mathbb{K}^{n \times n}}{A}$ invertierbar $\Leftrightarrow (Ax = 0 \Rightarrow x = 0)$

$$\sum d_j u_j = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & t & t^2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

(Sarrus) $\rightarrow \det(A) = 2t^2 + 4 + t - 2 - 4t - t^2$

$$= t^2 - 3t + 2$$

$$t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{matrix} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ linear abh. $\Leftrightarrow t \in \{1, 2\}$ $\qquad \square$

c) $p, q \geq 2$ Primzahlen

- $\ln p$, $\ln q$ sind lin. unabhängig über $\mathbb{R}$ aufgefasst als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

- Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$. Betrachte $a_1 \ln p - a_2 \ln q = 0$

Wir zeigen, dass $a_1 \ln p = a_2 \ln q$ $\quad a_1 = a_2 = 0$ impliziert.

$\rightarrow$ oBdA seien $a_1, a_2 \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\ln q}{\ln p} \rightarrow \text{da } a_1, a_2 \in \mathbb{Q}, \text{ können wir}$$

oBdA $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\ln q}{\ln p} \iff p^{a_1} = q^{a_2}$$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = 0$ wg der Eindeutigkeit d

Primfaktorzerlegung (sprich: $\forall x \in \mathbb{Q} \ \exists! \ \underbrace{p_1, \dots, p_m}_{\text{Primzahlen}}$ $\quad a_1, \dots a_m \in \mathbb{Z}$ sd. $x = \prod p_j^{a_j}$)

A3 $\quad f_1, \dots f_4 \in \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$f_1 = \sin \qquad f_2 = \cos \qquad f_3 = x \sin \qquad f_4 = x \cos x$

$X := \operatorname{span}\{\underbrace{f_1, \dots, f_4}_{\mathcal{X}}\}$

$$\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$
$$f \mapsto f'$$

Sei $F \in X$: $\quad F = \sum_{j=1}^{4} a_j f_j \qquad a_j \in \mathbb{R}$

$f_1' = f_2$

$f_2' = -f_1$

$f_3' = f_1 + f_4$

$f_4' = f_2 - f_3$

$$(\Phi F) = F' = \sum a_j f_j'$$

$$= f_1 \cdot (a_3 - a_2) + f_2 \cdot (a_1 + a_4) + f_3 \cdot (-a_4) + a_3 \cdot f_4$$

$$F' = a_1 f_1' + a_2 f_2' + a_3 f_3' + a_4 f_4'$$

$$= a_1 f_2 + a_2(-f_1) + a_3(f_1 + f_4) + a_4(f_2 - f_3)$$

$$= f_1(-a_2 + a_3) + f_2(a_4 + a_1) + f_3(-a_4) + f_4 \cdot a_3$$

$$F = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \qquad \Phi F = \begin{pmatrix} -a_2 + a_3 \\ a_1 + a_4 \\ -a_4 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 + a_3 \\ a_1 + a_4 \\ -a_4 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

<u>ker</u>(Φ), ran(Φ)

ker Φ: $\quad A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0} \iff \left.\begin{matrix} a_2 = a_3 \\ a_1 = -a_4 \\ a_4 = 0 \\ a_3 = 0 \end{matrix}\right\} \iff a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

$\Rightarrow$ ker $\Phi = \{0\}$ $\Rightarrow$ Φ injektiv $\Rightarrow$ Φ surjektiv, da Φ zwischen zwei gleichdimensionalen abbildet

$\Rightarrow$ ran $\Phi = X$

A4 $\left\| \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right| = 1$

$I - II$, dann $II - III$, ...

A5

b) $X = C([-1,1] : \mathbb{R}) \qquad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} fg$

$U = \operatorname{spann}\{\underbrace{x}_{f_1}, \underbrace{x^2}_{f_2}, \underbrace{x^3}_{f_3}\} \Rightarrow \langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_2, f_3 \rangle = 0$

$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{x}{\sqrt{2/3}}$

$e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{x^2}{\sqrt{2/5}} \qquad \left(= \frac{f_2 - e_1 \langle f_2, e_1 \rangle}{\|..\|} \right)$

$e_3 = \frac{f_3 - e_1 \langle f_3, e_1 \rangle}{\|..\|} = \frac{x^3 - x \cdot \frac{3}{5}}{\|...\|} = \sqrt{\frac{175}{8}} \left(x^3 - \frac{3x}{5} \right)$

$= \left(\frac{f_3 - e_1 \langle f_3, e_1 \rangle - e_2 \langle f_3, e_2 \rangle}{\|..\|} \right)$

A6 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ EW, EV, Diagonalisierb.

EW $\chi_A(\lambda) = (5-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) + 12(1-\lambda)$

$= (1-\lambda)\left[\underbrace{-(5-\lambda)(2+\lambda) + 12}\right]$

$2 + \lambda^2 - 3\lambda = (1-\lambda)(2-\lambda)$

$= (1-\lambda)^2 (2-\lambda) \Rightarrow$ EW $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

EV zu $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} 3x \quad & -6z = 0 \\ -y & = 0 \\ 2x \quad & -4z = 0 \end{aligned}$$

Menge der EV ist $\operatorname{spann}\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \setminus \{\vec{0}\}$

EV zu $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x + 2y - 3z = 0$

$\Rightarrow$ Menge der EV ist

$\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}\right\}\right) \setminus \{\vec{0}\}$

diese Matrix hat Rang = 1

$\Rightarrow$ Kern hat Dimension 2

$\Rightarrow$ A diagonalisierbar, da Summe der Dimensionen der Kerne von $A - \lambda_1 \mathbb{1}$ und $A - \lambda_2 \mathbb{1}$ gleich der Dimension von $\mathbb{C}^3 = 3$